ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1961)

DZAN DZO-I (Wrocław)

O MINIMAKSOWEJ ESTYMACJI PARAMETRU ROZKŁADU DWUMIANOWEGO

Wstęp. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1}$$

Z populacji o rozkładzie (1) pobrano próbkę x. Trzeba na podstawie tej próbki ocenić nieznaną wartość parametru p. Z każdą oceną tego parametru związana jest *strata* L, o której zakładamy, że jest równa kwadratowi różnicy $p-p'$,

$$L(p,p')=(p'-p)^2. \tag{2}$$

Ocena p' zależy od otrzymanej wartości x, $p'=f(x)$. Funkcję f będziemy nazywać *estymatorem* parametru p. Nazwijmy *ryzykiem* wartość oczekiwaną straty związaną z wyborem estymatora f:

$$R(f,p)=E_p\big[L\big(f(X),p\big)\big]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\big(p-f(k)\big)^2. \tag{3}$$

Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich możliwych wartości parametru p. Estymator f^0, który minimizuje $\sup\limits_{p\in\Omega}R(f,p)$, nazywa się *minimaksowy.* Głównym celem niniejszej pracy jest znalezienie minimaksowego estymatora w przypadku, gdy $\Omega=\langle a,b\rangle$.

Niektórzy statystycy zalecają używanie minimaksowych estymatorów w praktyce. Dzieje się to z następujących przyczyn: Ryzyko $R(f,p)$ jest miarą służącą, przy danej wartości parametru, do oceny estymatorów; im mniejsza jest wartość ryzyka, tym lepszy jest estymator. Zależy ono jednak od nieznanej wartości parametru i często się zdarza, że dla jednej wartości parametru, powiedzmy p_1, $R(f_1,p_1)<R(f_2,p_1)$, a dla p_2 zachodzi nierówność przeciwna $R(f_1,p_2)>R(f_2,p_2)$. Aby te trudności ominąć, wprowadza się pojęcie *gwarantowanej wartości ryzyka*

$$g(f)=\sup_{p\in\Omega}R(f,p).$$

Stosując estymator f wiemy, że jakakolwiek będzie wartość parametru p, ryzyko nie przekroczy liczby $g(f)$. Rozsądne jest zastosować taki estymator, żeby liczba g była możliwie mała. Tę własność ma estymator minimaksowy.

Funkcja $g(f)$ zależy od zbioru Ω możliwych wartości parametru. Jeżeli p może przyjmować wszystkie wartości z przedziału $\langle 0,1\rangle$, to, jak wiadomo ([2]), minimaksowy estymator f^0 wyraża się wzorem

$$f^0(x) = \frac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}. \tag{4}$$

W tym przypadku

$$g(f^0) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}. \tag{5}$$

W praktyce często jednak mamy o parametrze p pewne informacje *a priori*. Jeżeli wiadomo, że p zawiera się w przedziale $\langle a,b\rangle$ ($a>0$ lub $b<1$), to taką informację można wykorzystać do znalezienia estymatorów o gwarantowanej wartości ryzyka mniejszej niż (5). Okaże się jednak, że gdy $b=1-a$ i a jest dostatecznie małe, to estymator (4) pozostanie w dalszym ciągu minimaksowy. Rozpatrzymy również ogólny przypadek $p\in\langle a,b\rangle$ i znajdziemy ogólną, chociaż skomplikowaną, metodę konstruowania minimaksowych estymatorów, a dla $n=1,2,3,4$ estymatory te podamy bezpośrednio.

W dalszych rozważaniach wygodnie będzie założyć, że parametr p jest zmienną losową o nieznanej dystrybuancie G. Założenie to w niczym nie uszczupli wniosków dotyczących przypadku, gdy p jest liczbą stałą, pozwoli natomiast spojrzeć na problemat estymacji z innego punktu widzenia. Funkcję G będziemy nazywali *dystrybuantą a priori* parametru p. Oczekiwane ryzyko $r(f,G)$ obliczymy wtedy z wzoru

$$r(f,G) = \int_{\Omega} R(f,p)\,dG(p).$$

Niech Φ będzie zbiorem wszystkich możliwych dystrybuant a priori parametru p. *Najmniej korzystną* nazwiemy taką dystrybuantę G^0, dla której zachodzi równość

$$\inf_f r(f,G^0) = \sup_{G\in\Phi}\inf_f R(f,G).$$

Pojęcie najmniej korzystnej dystrybuanty wzięło się z teorii gier. Możemy bowiem cały problemat estymacyjny rozpatrywać jako grę Statystyka z Naturą, w której rolę strategii Statystyka grają estymatory, a strategiami Natury są wartości parametru p. Ryzyko R jest w tej grze funkcją wypłaty. Minimaksowy estymator jest wtedy optymalną strategią Statystyka, a najmniej korzystna dystrybuanta optymalną zrandomizowaną strategią Natury.

1. Najmniej korzystne dystrybuanty i minimaksowe estymatory dla $\Omega = \langle a, b\rangle$. Zajmiemy się najpierw przypadkiem $b = 1-a$.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$, to*

(a) *minimaksowy estymator $f^0(x)$ spełnia warunek $f^0(n-x) = 1-f^0(x)$,*

(b) *istnieje najmniej korzystna dystrybuanta $G^0(p)$ spełniająca warunek*

$$G^0(1-p) = 1-G^0(p).$$

Dowód. Ponieważ dla ustalonej wartości parametru funkcja straty (2) jest ściśle wypukła i ograniczona, więc istnieje dokładnie jeden minimaksowy estymator parametru p. Istnieje również co najmniej jedna najmniej korzystna dystrybuanta a priori tego parametru ([1]).

Udowodnimy najpierw pierwszą część twierdzenia. Zdefiniujemy nowy estymator h

$$h(x) = 1-f^0(n-x).$$

Z równości

$$E_p\big(f^0(x)-p\big)^2 = E_q\big(1-f^0(n-x)-q\big)^2 = E_q\big(h(x)-q\big)^2$$

wynika, że

$$\sup_{p\in\langle a,1-a\rangle} E_p\big(f^0(x)-p\big)^2 = \sup_{p\in\langle a,1-a\rangle} E_q\big(h(x)-q\big)^2 = \sup_{p\in\langle a,1-a\rangle} E_p\big(h(x)-p\big)^2.$$

Stąd widzimy, że funkcja $h(x)$ jest również minimaksowym estymatorem parametru p. Z jednoznaczności estymatora minimaksowego otrzymamy $f^0(x) = h(x) = 1-f^0(n-x)$, skąd dowód pierwszej części twierdzenia.

Aby udowodnić drugą część twierdzenia, zauważmy, że jeżeli f^0 jest minimaksowym estymatorem, a $G(p)$ najmniej korzystną dystrybuantą, to f^0 minimizuje oczekiwane ryzyko $r(f, G)$. Mamy więc

$$f^0(x) = \frac{\int_a^{1-a} p^{x+1}(1-p)^{n-x}dG(p)}{\int_a^{1-a} p^{x}(1-p)^{n-x}dG(p)}.$$

Przyjmijmy $H(p) = 1-G(1-p)$. Oznaczmy przez $f'(x)$ estymator, który minimizuje $r(f, H)$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{\int_a^{1-a} p^{x+1}(1-p)^{n-x}dH(p)}{\int_a^{1-a} p^{x}(1-p)^{n-x}dH(p)} = \frac{\int_a^{1-a} p^{x+1}(1-p)^{n-x}d\big(1-G(1-p)\big)}{\int_a^{1-a} p^{x}(1-p)^{n-x}d\big(1-G(1-p)\big)} =$$

$$= \frac{\int_a^{1-a} p^{n-x}(1-p)^{x+1}dG(p)}{\int_a^{1-a} p^{n-x}(1-p)^{x}dG(p)} = 1-\frac{\int_a^{1-a} p^{n-x+1}(1-p)^{x}dG(p)}{\int_a^{1-a} p^{n-x}(1-p)^{x}dG(p)} =$$

$$= 1-f^0(n-x) = f^0(x).$$

Widzimy, że $\inf_f r(f, G) = \inf_f r(f, H)$, a więc dystrybuanta H jest również najmniej korzystna. Funkcjonały $r(f, G)$ i $r(f, H)$ osiągają wspólne minimum dla tej samej funkcji f^0. Stąd wynika, że dystrybuanta $G^0(p) = \frac{1}{2}[G(p)+H(p)]$ jest również najmniej korzystna. Lecz

$$G^0(1-p) = \tfrac{1}{2}[G(1-p)+H(1-p)] = \tfrac{1}{2}[1-H(p)+1-G(p)] =$$
$$= 1-\tfrac{1}{2}[G(p)+H(p)] = 1-G^0(p)$$

c.b.d.o.

Można postawić pytanie następujące: Czy każda najmniej korzystna dystrybuanta $G(p)$ spełnia warunek $G(1-p) = 1-G(p)$? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Podamy prosty kontrprzykład. Z wzoru (4) wynika, że dla $n = 1$ i $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ minimaksowym estymatorem jest funkcja $f^0(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ $(x = 0, 1)$. Jeśli przyjmiemy

$$G(p) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad p = 0, \\ \frac{1}{3} & \text{dla} \quad 0 < p \leqslant \frac{3}{4}, \\ 1 & \text{dla} \quad \frac{3}{4} < p \leqslant 1, \end{cases} \tag{6}$$

to, jak można łatwo wykazać, $f^0(x)$ minimizuje oczekiwane ryzyko

$$r(f, G) = \int_0^1 \left[(1-p)\big(f(0)-p\big)^2+p\big(f(1)-p\big)^2\right] dG(p) =$$
$$= \tfrac{1}{3}f^2(0)+\tfrac{2}{3}\big(f(0)-\tfrac{3}{4}\big)^2+\tfrac{1}{2}\big(f(1)-\tfrac{3}{4}\big)^2.$$

Dystrybuanta (6) jest więc najmniej korzystna, nie spełnia natomiast warunku $G(1-p) = 1-G(p)$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$ $(0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2})$, to*

(a) *albo estymator $f^0(x) = (x+\frac{1}{2}\sqrt{n})/(n+\sqrt{n})$ jest minimaksowy, albo każda najmniej korzystna dystrybuanta $G^0(p)$ jest funkcją schodkową, posiadającą co najwyżej $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ (1) punktów nieciągłości,*

(b) *dla $a > \dfrac{1}{2(\sqrt{n}+1)}$, $f^0(x)$ nie jest minimaksowym estymatorem parametru p.*

Dowód. (a) oznaczmy przez $f_a(x)$ minimaksowy estymator parametru p, dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$. Oznaczmy przez Ω' zbiór wszystkich punktów $p \in \Omega$, dla których zachodzi równość

$$R(f_a, p) = \sup_{\xi \in \langle a, 1-a\rangle} R(f_a, \xi).$$

(1) $[r]$ oznacza część całkowitą liczby r.

Z [1] wynika, że jeżeli $G^0(p)$ jest najmniej korzystną dystrybuantą, to $\int\limits_{p\in\Omega'} dG^0(p) = 1$. Z wzoru (2) wynika

$$R(f_a, p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (p-f_a(k))^2.$$

Z twierdzenia 1 wiemy, że $f_a(n-x) = 1-f_a(x)$, a więc $R(f_a, p)$ jest wielomianem zmiennej p stopnia co najwyżej $2\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Mogą więc zachodzić dwa przypadki: Albo zbiór Ω' zawiera pewien przedział $\langle \alpha, \beta \rangle$ $(\alpha < \beta)$, albo składa się co najwyżej z $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ punktów.

Jeśli zbiór Ω' zawiera przedział $\langle \alpha, \beta \rangle$, to dla wszystkich punktów $p \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $R(f_a, p) = \text{const}$. Ponieważ $R(f_a, p)$ jest wielomianem zmiennej p, więc $R(f_a, p) = \text{const} = c(a)$ dla wszystkich $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Lecz dla estymatora $f^0(x) = (x+\frac{1}{2}\sqrt{n})/(n+\sqrt{n})$ zachodzi również

$$R(f^0, p) = \text{const} = 1/4(\sqrt{n}+1)^2$$

dla wszystkich $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Ponieważ f^0 jest jedynym estymatorem minimaksowym dla $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$, więc $c(a) > 1/4(\sqrt{n}+1)^2$ lub $f_a \equiv f^0$. Z drugiej strony

$$c(a) = R(f_a, p) = \sup_{\xi \in \langle a, 1-a \rangle} R(f, \xi) \leqslant \sup_{\xi \in \langle 0,1 \rangle} R(f, \xi) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}.$$

Stąd $f_a \equiv f^0$.

Załóżmy teraz, że zbiór Ω' składa się co najwyżej z $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ punktów. Ponieważ dla każdej najmniej korzystnej dystrybuanty G^0 musi zachodzić $\int\limits_{p\in\Omega'} dG^0(p) = 1$, więc jest ona schodkowa i posiada co najwyżej $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ punktów nieciągłości. Część pierwsza twierdzenia została więc udowodniona.

(b) Załóżmy, że $a > \dfrac{1}{2(\sqrt{n}+1)}$. Zdefiniujemy estymator g

$$g(x) = \begin{cases} a & \text{dla} \quad a \geqslant \dfrac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}, \\[2ex] \dfrac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} & \text{dla} \quad a < \dfrac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} < 1-a, \\[2ex] 1-a & \text{dla} \quad 1-a \leqslant \dfrac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Łatwo przekonać się, że $R(g, p) < R(f^0, p)$, gdy $p \in \langle a, 1-a \rangle$, c.b.d.o.

TWIERDZENIE 3. *Jeśli* $\Omega = \langle 0, 1\rangle$, *to istnieje najmniej korzystna dystrybuanta a priori parametru* p *spełniająca warunek* $G(1-p) = 1-G(p)$ *i będąca funkcją schodkową o co najwyżej* $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ *punktach nieciągłości.*

Potrzebne nam będą dwa lematy.

LEMAT 1. *Niech* X *będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym*

$$P(X = k) = p_\omega(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

i niech $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ *będzie ciągiem zbiorów wartości parametru* ω. *Jeżeli*

(a) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} \Omega_i = \Omega_\infty$,

(b) $f_i(x)$ *jest minimaksowym estymatorem parametru* ω *dla straty* $L(a, \omega) = (a-\omega)^2$ *i dla* $\Omega = \Omega_i$,

(c) *dla każdego* x $(x = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *istnieje* $\omega \in \Omega_\infty$ *takie, że* $p_\omega(x) > 0$,

(d) $\inf\limits_{f} \sup\limits_{\omega\in\Omega_\infty} E\big(f(x)-\omega\big)^2 < \infty$,

to istnieje zbieżny podciąg ciągu $\{f_i\}$ *a granica każdego zbieżnego podciągu jest minimaksowym estymatorem parametru* ω *przy* $\Omega = \Omega_i$.

Dowód. Jeśli $\Omega = \Omega_i$, to

$$(7) \quad E_\omega\big(f_i(x)-\omega\big)^2 \leqslant \sup_{\omega\in\Omega_i} E_\omega\big(f_i(x)-\omega\big)^2 = \inf_f \sup_{\omega\in\Omega_i} E_\omega\big(f_i(x)-\omega\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \inf_f \sup_{\omega\in\Omega_\infty} E_\omega\big(f_i(x)-\omega\big)^2 = \varrho < \infty.$$

Udowodnimy, że istnieje taka funkcja $u(x) < \infty$, że

$$(8) \quad f_i(x) \leqslant u(x).$$

Przypuśćmy, że tak nie jest. Istniałaby wtedy taka wartość x_0 i taki podciąg $\{i_j\}$ wskaźników i, że $f_{i_j}(x_0) \to \infty$. Niech $p_{\omega_0}(x_0) > 0$. Ponieważ

$$E_{\omega_0}\big(f_{i_j}(x)-\omega_0\big) = \sum_{x=0}^{n} p_{\omega_0}(x_0)\big(f_{i_j}(x)-\omega_0\big)^2 \geqslant p_{\omega_0}(x_0)\big(f_{i_j}(x_0)-\omega_0\big)^2$$

dla $j = 1, 2, \ldots$ i $f_{i_j}(x_0) \to \infty$ dla $j \to \infty$, więc $E_{\omega_0}\big(f_{i_j}(x)-\omega_0\big)^2 \to \infty$, co jest sprzeczne z wzorem (7).

Z wzoru (8) i z uwagi, że x przyjmuje skończoną liczbę wartości wnioskujemy, że istnieje zbieżny podciąg ciągu $\{f_i\}$.

Załóżmy, że podciąg $f_{i_l}(x)$, $l = 1, 2, \ldots$, jest zbieżny do granicy $f(x)$. Udowodnimy, że $f(x)$ jest minimaksowym estymato·.n parametru ω. Z nierówności

$$E_\omega\big(f_{i_j}(x)-\omega\big)^2 \leqslant \varrho$$

otrzymujemy, że

$$E_\omega\big(f(x)-\omega\big)^2 \leqslant \varrho = \inf_f \sup_{\omega\in\Omega_\infty} E_\omega\big(f(x)-\omega\big)^2.$$

Estymator f jest więc minimaksowy, c.b.d.o.

WNIOSEK. *Niech $f_a(x)$ będzie minimaksowym estymatorem parametru p dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$. Funkcja $f_a(x)$ jest prawostronnie ciągłą funkcją zmiennej a.*

Dowód. Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym zbieżnym do a. Z lematu 1 wiemy, że istnieje podciąg zbieżny ciągu $\{f_{a_k}(x)\}$ i granica każdego zbieżnego podciągu $\{f_{a_{k_j}}(x)\}$ jest minimaksowym estymatorem parametru p dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$. Z jednoznaczności estymatora minimaksowego wynika, że ciąg $\{f_{a_k}(x)\}$ jest zbieżny, a więc $f_a(x)$ jest prawostronnie ciągłą funkcją zmiennej a.

LEMAT 2. *Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów a takich, że dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$ estymator $f^0(x) = (x+\frac{1}{2}\sqrt{n})/(n+\sqrt{n})$ jest minimaksowy. Zbiór A jest przedziałem otwartym.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że jeśli $a_1 \epsilon A$, to $\langle a_1, 1-a_1\rangle \subset A$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieje wtedy stała b taka, że $f^0(x)$ jest minimaksowym estymatorem parametru p dla $\Omega = \langle b, 1-b\rangle$. A więc

$$\frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2} = \sup_{p\epsilon\langle b, 1-b\rangle} R(f^0, p) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_f \sup_{p\epsilon\langle a_1, 1-a_1\rangle} R(f, p) < R(f^0, p) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2},$$

co przeczy naszemu założeniu.

Niech $a_0 = \inf\limits_{a\epsilon A} a$. Przypuśćmy, że $a_0 \epsilon A$. Wtedy $a_0 \neq 0$, gdyż dla $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ f^0 jest minimaksowym estymatorem. Oznaczmy przez f_a minimaksowy estymator parametru p dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$. Zachodzi nierówność

$$\sup_{p\epsilon\langle a_0, 1-a_0\rangle} R(f_{a_0}, p) < R(f_0, p) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}.$$

Ponieważ $R(f, p)$ jest funkcją ciągłą zmiennej p, więc istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że

$$\sup_{p\epsilon\langle a_0-\varepsilon, 1-a_0+\varepsilon\rangle} R(f_{a_0-\varepsilon}, p) \leqslant \sup_{p\epsilon\langle a_0-\varepsilon, 1-a_0+\varepsilon\rangle} R(f_{a_0}, p) < R(f_0, p) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}.$$

Stąd wynika, że $(a_0-\varepsilon)\epsilon A$, co przeczy definicji liczby a_0.

Dowód twierdzenia 3. Niech A będzie zbiorem zdefiniowanym w lemacie 2. Z twierdzenia 2 wynika, że gdy $a\epsilon A$, to minimaksowym estymatorem parametru p dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$ jest funkcja

$$f_a(x) = \frac{\int\limits_a^{1-a} p^{x+1}(1-p)^{n-x} dG_a(p)}{\int\limits_a^{1-a} p^x(1-p)^{n-x} dG_a(p)}, \tag{9}$$

gdzie $G_a(p)$ jest najmniej korzystną dystrybuantą. Funkcja $G_a(p)$ jest ponadto funkcją schodkową o liczbie $l(a)$ punktów nieciągłości nie większej od $\left[\frac{n+3}{2}\right]$. Na mocy twierdzenia 1 możemy założyć, że $G_a(1-p) = 1-G_a(p)$. Oznaczmy przez $p_i(a)$, $i = 1, 2, \ldots, l(a)$, punkty nieciągłości dystrybuanty $G_a(p)$, a przez $\xi_i(a)$, $i = 1, 2, \ldots, l(a)$, wartości odpowiednich skoków. Ponieważ $0 \leqslant p_i(a) \leqslant 1$, $0 \leqslant \xi_i(a) \leqslant 1$, więc dla każdego malejącego ciągu $\{a_k\}$ dążącego do $a_0 = \inf_{a\in A} a$, istnieje podciąg $\{a_{k_j}\}$ taki, że ciągi $\{p_1(a_{k_j})\}, \ldots, \{p_l(a_{k_j})\}$, $\{\xi_1(a_{i_j})\}, \ldots, \{\xi_l(a_{i_j})\}$ są zbieżne, gdzie $l = \sup l(a_k)$.

Dystrybuanty $G_{a_k}(p)$, $k = 1, 2, \ldots$, mają wspólnie ograniczoną przez $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ ilość skoków, zatem funkcja $G'(p)$ zdefiniowana przez granice ciągów $\{p_i(a_{k_j})\}$ i $\{\xi_i(a_{k_j})\}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, jest również dystrybuantą schodkową o co najwyżej l skokach i wyznacza za pomocą wzoru (9) estymator f, który na mocy wniosku do lematu 1 jest minimaksowym estymatorem parametru p dla $\Omega = \langle a_0, 1-a_0\rangle$. Lecz $a_0 \notin A$, więc estymator f jest z definicji identyczny z estymatorem $f^0(x) = (x+\frac{1}{2}\sqrt{n})/(n+\sqrt{n})$. Dystrybuanta G', która go za pomocą wzoru (9) wyznacza, jest zatem najmniej korzystna. Lecz dla $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ estymator f^0 pozostaje minimaksowy, a więc i dystrybuanta $G'(p)$ przedłużona na przedział $\langle 0, 1\rangle$ w ten sposób, że $G'(p) = 0$, dla $0 \leqslant p \leqslant a_0$ i $G'(p) = 1$, dla $1-a_0 \leqslant p \leqslant 1$ pozostaje najmniej korzystna. Jest ona funkcją schodkową i posiada najwyżej $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ punktów nieciągłości, c.b.d.o.

WNIOSEK 1. 3. *Niech p_i oznaczają współrzędne punktów nieciągłości dystrybuanty schodkowej G, a ξ_i wartości skoków w tych punktach. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dla $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ dystrybuanta G była najmniej korzystna jest, żeby dla każdego k ($k = 1, 2, \ldots, n$), zachodziła równość*

$$\frac{k+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} p_i^{k+1}(1-p_i)^{n-k}\xi_i}{\sum_{i=1}^{l} p_i^{k}(1-p_i)^{n-k}\xi_i}. \tag{10}$$

WNIOSEK 2. 3. *Niech $p_1 < p_2 < \ldots < p_l$ oznaczają współrzędne punktów nieciągłości najmniej korzystnej schodkowej dystrybuanty a priori $G^0(p)$, gdy $\Omega = \langle 0, 1\rangle$. Jeśli zbiór Ω możliwych wartości parametru p ograniczymy do przedziału $\langle a, b\rangle$, gdzie $0 \leqslant a \leqslant p_1$, $1-p_1 \leqslant b \leqslant 1$, to dystrybuanta G^0 pozostanie najmniej korzystna, a estymator $f^0 = (x+\frac{1}{2}\sqrt{n})/(n+\sqrt{n})$ pozostanie minimaksowy.*

Jeżeli więc mamy informację, która pozwala ograniczyć zbiór Ω do przedziału $\langle a, b\rangle$, ale tylko takiego, że $a \leqslant p_1$ i $b \geqslant 1-p_1$, to taka informacja nie pozwala na znalezienie estymatora o gwarantowanej wartości ryzyka mniejszej niż dla estymatora $(x+\frac{1}{2}\sqrt{n})/(n+\sqrt{n})$.

Korzystając z twierdzeń od 1 do 3 znaleźliśmy najmniej korzystne schodkowe dystrybuanty dla $n = 1, 2, 3, 4$ ($\Omega = \langle 0, 1\rangle$). Dla większych n rachunki stają się bardzo żmudne

$n = 1$:

$$p_1 = 1-p_2 = \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}146,$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \tfrac{1}{2};$$

$n = 2$:

$$p_1 = 1-p_2 = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\right) \approx 0{,}178,$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \tfrac{1}{2};$$

$n = 3$:

$$p_1 = 1-p_3 = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{3+\sqrt{3}}}\right) \approx 0{,}102, \qquad p_2 = \tfrac{1}{2},$$

$$\xi_1 = \xi_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad \xi_2 = 1-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$n = 4$:

$$p_1 = 1-p_3 = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0{,}113, \qquad p_2 = \tfrac{1}{2},$$

$$\xi_1 = \xi_3 = \tfrac{5}{18}, \qquad \xi_2 = \tfrac{4}{9}.$$

Dystrybuanty te otrzymaliśmy rozwiązując układ równań (10) i korzystając z warunków

$$p_{l-i} = p_i, \qquad \xi_{l-i} = \xi_i, \qquad \sum_{i=1}^{l} \xi_i = 1, \qquad \text{gdzie} \quad l = \left[\frac{n+3}{2}\right].$$

2. Twierdzenia od 1 do 3 można wykorzystać dla znalezienia minimaksowych estymatorów parametru p, gdy $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$. Pokażemy to na przykładzie $n = 1$.

Przyjmijmy $f(0) = a$, $f(1) = 1-a$. Mamy zatem

$$R(f, p) = (a-p)^2(1-p)+(1-a-p)^2 p,$$

$$\frac{dR}{dp} = -2(1-4a)p+1-4a.$$

Gdy $1-4a \neq 0$, to $R(f,p)$ ma jedyne ekstremum w punkcie $p = \frac{1}{2}$. Z twierdzenia 1 otrzymujemy, że jeżeli $R(f, a) > R(f, \frac{1}{2})$ i $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$, to najmniej korzystnym rozkładem a priori G parametru p jest rozkład określony następująco

$$P(p = a) = P(p = 1-a) = \tfrac{1}{2}.$$

Oczekiwane ryzyko $r(f, G)$ osiąga minimum dla estymatora $f_a^{(1)}$ o wartościach

$$f_a^{(1)}(0) = 2a(1-a), \quad f_a^{(1)}(1) = 1-f_a^{(1)}(0). \tag{11}$$

Z nierówności $R(f_a^{(1)}, a) \geqslant R(f_a^{(1)}, \frac{1}{2})$ otrzymamy

$$a \geqslant \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$ i $a > \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$ estymator $f_a^{(1)}(x)$ określony wzorem (11) jest więc estymatorem minimaksowym. Gdy $\Omega = \langle a, b\rangle$, $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $1 \geqslant b \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$, estymatorem minimaksowym pozostanie $f^0(x) = (x+\frac{1}{2}\sqrt{n})/(n+\sqrt{n})$ (tu $n = 1$), jak to już pokazaliśmy w poprzednim paragrafie.

Podobnie możemy postępować dla większych n. Rezultaty są następujące: Niech

$$f_a^{(2)}(0) = 1-f_a^{(2)}(2) = \frac{a(1-a)}{a^2+(1-a)^2}, \quad f_a^{(2)}(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Gdy $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1/(1+\sqrt{2})}\right) \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, $f_a^{(2)}(x)$ jest estymatorem minimaksowym, przy $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$. Dla $a \leqslant \frac{1}{2}(1-1/\sqrt{1+\sqrt{2}})$, $b \geqslant \frac{1}{2}(1+1/\sqrt{1+\sqrt{2}})$ i $\Omega = \langle a, b\rangle$ minimaksowym estymatorem pozostaje $f^0(x)$.

$f_a^{(3)}(x)$ jest określony następująco

$$f_a^{(3)}(0) = \frac{a(1-a)^3+a^3(1-a)}{a^3+(1-a)^3},$$

$$f_a^{(3)}(1) = \frac{2a^2(1-a)^2}{a(1-a)^2+(1-a)a^2} = 2a(1-a),$$

$$f_a^{(3)}(3-x) = 1-f_a^{(3)}(x),$$

i jest minimaksowy dla $\Omega = \langle a, 1-a\rangle$ i $0{,}13 < a \leqslant \frac{1}{2}$.

Dziękuję dr Stanisławowi Trybule za pomoc w przygotowaniu ostatecznej wersji niniejszej pracy.

Prace cytowane

[1] D. Blackwell and M. A. Girshick, *Theory of games and statistical decisions*, New York 1954, str. 294.

[2] H. Steinhaus, *The problem of estimation*, Annals of Math. Stat. 28 (1957), str. 633-648.

[3] A. Wald, *Statistical decision functions*, New York 1950, str. 88.

Praca wpłynęła 26. 1. 1960

ДЗАН ДЗО-И (Вроцлав)

О МИНИМАКСОВОЙ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРА БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Пусть X случайная величина с биномиальным распределением

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

с неизвестным параметром p.

Статья посвящена минимаксовой оценке параметра p в предположении, что функция потери квадратная для $p \in \langle a,\ 1-a \rangle$.

Известно, что если $a = 0$, то минимаксовая оценка параметра p дается формулой Рубина:

$$f(x) = \frac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}.$$

Если $a > 0$, то минимаксовые оценки, вообще, очень сложны. В работе мы исследовали некоторые их свойства, а также свойства наименее выгодных распределений *a priori* параметра p (теоремы 1, 2, 3). Кроме того мы показали, что оценка Рубина остается минимаксовой, если a не превосходит некоторой определенной границы.

DZAN DZO-I (Wrocław)

ON THE MINIMAX ESTIMATE OF THE PARAMETER OF BINOMIAL DISTRIBUTION

SUMMARY

Let X be a random variable with the binomial distribution with unknown parameter p:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

The paper is devoted to the problem of the minimax estimate of parameter p under the quadratic loss function and for $p \epsilon \langle a, 1-a \rangle$. It is known that for $a = 0$ the minimax estimate of p is given by the formula of H. Rubin:

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}.$$

If $a > 0$ the minimax estimates are, in general, fairly complicated. In this paper we have investigated some of their properties, as well as the properties of the least favorable *a priori* distributions of parameter p (theorems 1, 2, 3). Besides, we have shown that if a does not exceed a certain fixed number, the estimate of Rubin is still minimax.