ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1963)

M. ŻYCZKOWSKI (Kraków)

TABLICE WSPÓŁCZYNNIKÓW PRZY POTĘGOWANIU SZEREGÓW POTĘGOWYCH

Szeregi potęgowe stanowią narzędzie coraz częściej stosowane w wielu gałęziach fizyki i techniki, szczególnie przy rozwiązywaniu równań różniczkowych i równań przestępnych. Między innymi metoda małego parametru (metoda zakłóceń) wykorzystuje rozwinięcie w szereg potęgowy.

Jednym z podstawowych działań na szeregach potęgowych jest ich potęgowanie, czyli określanie współczynników A_j jako funkcji znanych współczynników a_j, występujących w równaniu

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\Big)^n = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^j. \tag{1}$$

Umiejętność potęgowania jest niezbędna np. przy odwracaniu szeregów potęgowych lub przy podstawianiu szeregu w szereg. W przypadku $n = 2$ lub $n = 3$ możemy stosunkowo łatwo określić kilka pierwszych współczynników A_j stosując mnożenie szeregów; przy innych wartościach n rachunki z reguły komplikują się.

Wielu autorów (W. Laska [7], E. Adams [1], I. M. Ryżyk i I. S. Gradsztejn [10]) podaje wzory rekurencyjne, określające współczynniki A_j. Przy założeniu $a_0 \neq 0$ mamy

$$\begin{cases} A_0 = a_0^n, \\ A_j = \dfrac{1}{ja_0} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (ni+i-j) a_i A_{j-i}. \end{cases} \tag{2}$$

W pracy [15] podano ogólny, bezpośredni wzór na współczynniki A_j, przy dowolnej rzeczywistej wartości wykładnika potęgowego. Wzór ten jest słuszny dla uogólnionych szeregów potęgowych (nazwą tą posługuje się m. in. W. I. Smirnow [11]), mianowicie dla szeregów typu

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j}, \tag{3}$$

gdzie μ i ν są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Założenie $a_0 \neq 0$ nie jest już wtedy konieczne, ponieważ zawsze można dobrać odpowiednią wartość μ. W przypadku $\nu = 2$ szereg (3) określa w zwartej formie funkcje parzyste (μ parzyste) lub nieparzyste (μ nieparzyste). W przypadku ułamkowej wartości μ lub ν przyjęto $x \geqslant 0$, choć założenie to nie zawsze jest niezbędne.

Mamy najpierw

$$F(x) = [f(x)]^\xi = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j}\Big)^\xi = x^{\mu\xi}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\Big)^\xi, \tag{4}$$

gdzie oznaczono

$$x^\nu = t. \tag{5}$$

Potęgowanie uogólnionych szeregów potęgowych sprowadzono w ten sposób do potęgowania zwyczajnych szeregów potęgowych. Jednak w wyniku otrzymuje się na ogół uogólniony szereg potęgowy.

W dalszym ciągu, w oparciu o wzór Faa de Bruno [4] na pochodną rzędu n funkcji złożonej, wyprowadzono ogólny wzór na współczynniki A_j. Mamy mianowicie

$$F(x) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j}\Big)^\xi = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{\mu\xi+\nu j}, \tag{6}$$

gdzie

$$A_j = \sum_{s=1}^{S} \frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-m+1)}{k_{1s}!\,k_{2s}!\,\ldots\,k_{js}!}\, a_0^{\xi-m} a_1^{k_{1s}} a_2^{k_{2s}} \ldots a_j^{k_{js}}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Sumowanie obejmuje tu wszystkie całkowite nieujemne pierwiastki k_{is} równania

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + jk_j = j, \tag{8}$$

S oznacza liczbę tych rozwiązań, wreszcie

$$m = k_{1s} + k_{2s} + k_{3s} + \ldots + k_{js} = m(s). \tag{9}$$

Kilka pierwszych wyrazów ciągu A_j określają więc wzory

$$\left\{\begin{aligned}
A_0 &= a_0^\xi, \\
A_1 &= \xi a_0^{\xi-1} a_1, \\
A_2 &= \frac{\xi(\xi-1)}{2!} a_0^{\xi-2} a_1^2 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_2, \\
A_3 &= \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!} a_0^{\xi-3} a_1^3 + \frac{\xi(\xi-1)}{1!\,1!} a_0^{\xi-2} a_1 a_2 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_3, \\
A_4 &= \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3)}{4!} a_0^{\xi-4} a_i^4 + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{2!\,1!} a_0^{\xi-3} a_i^2 a_2 + \\
&\quad + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} a_0^{\xi-2} a_2^2 + \frac{\xi(\xi-1)}{1!\,1!} a_0^{\xi-2} a_1 a_3 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_4.
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

W pracy [15] podano również spis wszystkich wartości pierwiastków równania (8) dla $j = 5, 6$ i 7.

Wzory (10) są dość proste, jednak wobec częstego ich stosowania warto podać tablicę współczynników dla najważniejszych wykładników potęgowych ξ, tak by można je było stosować bez żadnych przygotowawczych obliczeń. Podanie takich tablic jest celem obecnej pracy.

Zauważymy najpierw, że współczynniki występujące we wzorach (10) są pewnymi wielokrotnościami współczynników dwumiennych Newtona $\binom{\xi}{j}$, lub, co na jedno wychodzi, współczynników we wzorze interpolacyjnym Newtona. Istnieje wiele tablic tych współczynników, różniących się zasadniczo tylko doborem argumentów.

Współczynniki dwumienne Newtona podaje się zazwyczaj jedynie dla całkowitych dodatnich argumentów. Najobszerniejszymi z obecnie znanych są tablice [12], obejmujące (przy naszych oznaczeniach) $\xi = 2-(1)-11$, przy $j = 1-(1)-1000$, a nawet większe wartości j przy mniejszych ξ. Ułamkowe wartości ξ obejmują, trudno zresztą dostępne, tablice siedmiocyfrowe G. Vegi i J. A. Hülssego [13], mianowicie $\xi = 0-(0{,}01)-100$, przy $j = 1-(1)-6$, ograniczają się więc jedynie do dodatnich ułamków dziesiętnych.

Tablice współczynników we wzorze interpolacyjnym Newtona obejmują — ze zrozumiałych względów — jedynie zakres $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Najdokładniejsza jest tablica H. T. Davisa [3], podająca jedenastocyfrowe wartości tych współczynników dla $\xi = 0-(0{,}01)-1$, przy $j = 3-(1)-7$, a mniejszy skok mają dziesięciocyfrowe tablice L. N. Karmazinej i L. W. Kuroczkinej [6], mianowicie $\xi = 0-(0{,}001)-1$, przy $j = 3-(1)-8$.

Tablice te na ogół nie dadzą się zastosować w naszym przypadku. Po pierwsze, żadna z nich nie obejmuje zakresu $\xi < 0$, co ogranicza zakres ich zastosowań. Po drugie, przy potęgowaniu szeregów potęgowych z reguły niezbędna jest znajomość ścisłych wartości współczynników, które przy ułamkowych wykładnikach ξ są również ułamkami, a nie ich przybliżeń dziesiętnych, nawet wielocyfrowych. Jak wynika z katalogów tablic matematycznych [8], [2], tablic takich dla ujemnych lub ułamkowych ξ nie opublikowano.

Istnieje zależność pomiędzy współczynnikami dwumiennymi a funkcją beta Eulera $B(x, y)$, ponieważ dla ułamkowych argumentów definiujemy silnię przez funkcję $\Gamma(x)$ Eulera. Mamy mianowicie

$$(11)\qquad \frac{\xi!}{j!\,(\xi-j)!} = \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\xi-j+1)} = \frac{\Gamma(\xi+2)}{(\xi+1)\,\Gamma(j+1)\,\Gamma(\xi-j+1)} = \frac{1}{(\xi+1)B(j+1,\,\xi-j+1)},$$

i częściowo możemy skorzystać z tablic funkcji beta. Niektóre dodatnie ułamkowe wartości argumentów obejmują tablice autora [14]. Jednak nie obejmują one ujemnych wartości argumentów, które, jak widać ze wzoru (11), występują często nawet przy dodatnich ξ.

Tablica 1 podaje wartości współczynników dla całkowitych ξ, $\xi = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm 10$, a tablica 2 — dla ważniejszych ułamkowych wykładników ξ, dodatnich i ujemnych. Zastosowanie tablic jest, dzięki ich układowi, niezmiernie proste. Odczytujemy z nich bezpośrednio na przykład

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu j}\Big)^{-3} = a_0^{-3} - 3a_0^{-4} a_1 x^{\mu} + (6a_0^{-5} a_1^2 - 3a_0^{-4} a_2) x^{2\mu} + \\ + (-10 a_0^{-6} a_1^3 + 12 a_0^{-5} a_1 a_2 - 3a_0^{-4} a_3) x^{3\mu} + \ldots$$

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu j}\Big)^{1/6} = a_0^{1/6} + \frac{1}{6} a_0^{-5/6} a_1 x^{\mu} + \left(-\frac{5}{72} a_0^{-11/6} a_1^2 + \frac{1}{6} a_0^{-5/6} a_2\right) x^{2\mu} + \\ + \left(\frac{55}{1296} a_0^{-17/6} a_1^3 - \frac{5}{36} a_0^{-11/6} a_1 a_2 + \frac{1}{6} a_0^{-5/6} a_3\right) x^{3\mu} + \ldots$$

Tak więc zastosowanie tablic 1 i 2 umożliwia również pierwiastkowanie szeregów potęgowych i dzielenie przez szereg.

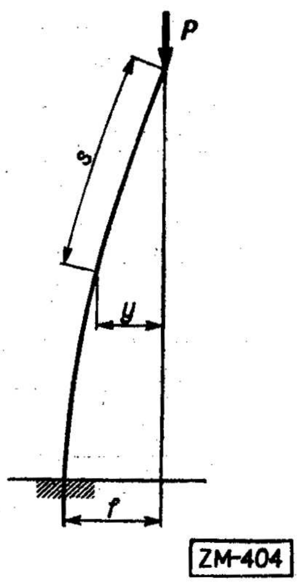
Tablice 1 i 2 są oczywiście zarazem tablicami współczynników dwumiennych Newtona $\binom{\xi}{j}$ dla $j = 1, 2, 3$ i 4, przy różnych dodatnich i ujemnych, całkowitych i ułamkowych wartościach argumentu ξ (pierwsze kolumny odnoszą się do poszczególnych wyrazów A_j).

Jako przykład zastosowania tablic przytoczymy rozwiązanie (metodą małego parametru) problemu skończonych ugięć pręta osiowo ściskanego siłą ponadkrytyczną. Metodę małego parametru stosował tu po raz pierwszy T. Pöschl [9], ograniczając się jedynie do pierwszego przybliżenia i nie podając metody określenia przybliżeń następnych. Dzięki przytoczonym w obecnej pracy tablicom zamiana równania różniczkowego nieliniowego na układ łatwych do całkowania równań różniczkowych liniowych jest niezmiernie prosta.

W najdogodniejszym tu, niekartezjańskim układzie współrzędnych $s - y$ (s — zmienna mierzona po łuku ugiętej osi pręta, y — ugięcie) równanie różniczkowe rozpatrywanego problemu ma postać, [9],

$$\frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} + \varkappa^2 y = 0, \tag{12}$$

gdzie $\varkappa^2 = P/EI$, P jest siłą osiowo ściskającą,



Rys. 1

TABLICA 1

Wartości współczynników przy całkowitych wykładnikach potęgowych

ξ	A_1	A_2		A_3			A_4				
	$a_0^{\xi-1}a_1$	$a_0^{\xi-2}a_1^2$	$a_0^{\xi-1}a_2$	$a_0^{\xi-3}a_1^3$	$a_0^{\xi-2}a_1a_2$	$a_0^{\xi-1}a_3$	$a_0^{\xi-4}a_1^4$	$a_0^{\xi-3}a_1^2a_2$	$a_0^{\xi-2}a_2^2$	$a_0^{\xi-2}a_1a_3$	$a_0^{\xi-1}a_4$
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
2	2	1	2	0	2	2	0	0	1	2	2
3	3	3	3	1	6	3	0	3	3	6	3
4	4	6	4	4	12	4	1	12	6	12	4
5	5	10	5	10	20	5	5	30	10	20	5
6	6	15	6	20	30	6	15	60	15	30	6
7	7	21	7	35	42	7	35	105	21	42	7
8	8	28	8	56	56	8	70	168	28	56	8
9	9	36	9	84	72	9	126	252	36	72	9
10	10	45	10	120	90	10	210	360	45	90	10
—1	—1	1	—1	—1	2	—1	1	—3	1	2	—1
—2	—2	3	—2	—4	6	—2	5	—12	3	6	—2
—3	—3	6	—3	—10	12	—3	15	—30	6	12	—3
—4	—4	10	—4	—20	20	—4	35	—60	10	20	—4
—5	—5	15	—5	—35	30	—5	70	—105	15	30	—5
—6	—6	21	—6	—56	42	—6	126	—168	21	42	—6
—7	—7	28	—7	—84	56	—7	210	—252	28	56	—7
—8	—8	36	—8	—120	72	—8	330	—360	36	72	—8
—9	—9	45	—9	—165	90	—9	495	—495	45	90	—9
—10	—10	55	—10	—220	110	—10	715	—660	55	110	—10

TABLICA 2

Wartości współczynników przy ułamkowych wykładnikach potęgowych

ξ	A_1	A_2		A_3			A_4				
	$a_0^{\xi-1}a_1$	$a_0^{\xi-2}a_1^2$	$a_0^{\xi-1}a_2$	$a_0^{\xi-3}a_1^3$	$a_0^{\xi-2}a_1a_2$	$a_0^{\xi-1}a_3$	$a_0^{\xi-4}a_1^4$	$a_0^{\xi-3}a_1^2a_2$	$a_0^{\xi-2}a_2^2$	$a_0^{\xi-2}a_1a_3$	$a_0^{\xi-1}a_4$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{128}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{35}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{105}{16}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{35}{4}$	$\frac{7}{2}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{105}{16}$	$\frac{63}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{315}{128}$	$\frac{315}{16}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{63}{4}$	$\frac{9}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{15}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{35}{16}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{315}{128}$	$-\frac{105}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{35}{8}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{105}{16}$	$\frac{35}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1155}{128}$	$-\frac{315}{16}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{35}{4}$	$-\frac{5}{2}$
$-\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{63}{8}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{231}{16}$	$\frac{63}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3003}{128}$	$-\frac{693}{16}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{63}{4}$	$-\frac{7}{2}$
$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{99}{8}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{429}{16}$	$\frac{99}{4}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{6435}{128}$	$-\frac{1287}{16}$	$\frac{99}{8}$	$\frac{99}{4}$	$-\frac{9}{2}$

$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{27}$	$-\frac{10}{243}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$-\frac{7}{243}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{27}$	$\frac{5}{243}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{27}$	$\frac{5}{243}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{14}{27}$	$\frac{35}{243}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{40}{27}$	$\frac{110}{243}$
$-\frac{4}{3}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{14}{9}$	$-\frac{140}{27}$	$\frac{455}{243}$
$-\frac{5}{3}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{20}{9}$	$-\frac{220}{27}$	$\frac{770}{243}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{32}$	$\frac{21}{128}$	$-\frac{77}{2048}$
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{32}$	$\frac{15}{128}$	$-\frac{45}{2048}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{35}{2048}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{21}{32}$	$-\frac{21}{128}$	$\frac{35}{2048}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{45}{128}$	$-\frac{45}{2048}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$-\frac{45}{128}$	$\frac{195}{2048}$

$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{5}{81}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{4}{81}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$	$-\frac{5}{81}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{14}{81}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$	$-\frac{40}{81}$
$-\frac{4}{3}$	$\frac{28}{9}$	$-\frac{140}{81}$
$-\frac{5}{3}$	$\frac{40}{9}$	$-\frac{220}{81}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{7}{128}$
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{5}{128}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{128}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{21}{16}$	$-\frac{7}{128}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{15}{128}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{15}{128}$

$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$
$-\frac{4}{3}$	$\frac{14}{9}$
$-\frac{5}{3}$	$\frac{20}{9}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{32}$
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{32}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{32}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{21}{32}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{45}{32}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{3}$
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{2}{3}$
$-\frac{4}{3}$
$-\frac{5}{3}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$
$\frac{7}{4}$
$\frac{9}{4}$
$-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{3}$
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{2}{3}$
$-\frac{4}{3}$
$-\frac{5}{3}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$
$\frac{7}{4}$
$\frac{9}{4}$
$-\frac{1}{4}$

(c. d. tablicy 2)

ξ	A_1	A_2		A_3			A_4				
	$a_0^{\xi-1}a_1$	$a_0^{\xi-2}a_1^2$	$a_0^{\xi-1}a_2$	$a_0^{\xi-3}a_1^3$	$a_0^{\xi-2}a_1a_2$	$a_0^{\xi-1}a_3$	$a_0^{\xi-4}a_1^4$	$a_0^{\xi-3}a_1^2a_2$	$a_0^{\xi-2}a_2^2$	$a_0^{\xi-2}a_1a_3$	$a_0^{\xi-1}a_4$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{21}{32}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{77}{128}$	$\frac{21}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1155}{2048}$	$-\frac{231}{128}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{21}{16}$	$-\frac{3}{4}$
$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{195}{128}$	$\frac{45}{16}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{3315}{2048}$	$-\frac{585}{128}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{45}{16}$	$-\frac{5}{4}$
$-\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{77}{32}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{385}{128}$	$\frac{77}{16}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{7315}{2048}$	$-\frac{1155}{128}$	$\frac{77}{32}$	$\frac{77}{16}$	$-\frac{7}{4}$
$-\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{117}{32}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{663}{128}$	$\frac{117}{16}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{13923}{2048}$	$-\frac{1989}{128}$	$\frac{117}{32}$	$\frac{117}{16}$	$-\frac{9}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{125}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{21}{625}$	$\frac{18}{125}$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{125}$	$-\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{26}{625}$	$\frac{24}{125}$	$-\frac{3}{25}$	$-\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{125}$	$-\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{21}{625}$	$\frac{21}{125}$	$-\frac{3}{25}$	$-\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{125}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{11}{625}$	$\frac{12}{125}$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{125}$	$\frac{6}{25}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{44}{625}$	$-\frac{33}{125}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$-\frac{1}{5}$
$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{7}{25}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{28}{125}$	$\frac{14}{25}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{119}{625}$	$-\frac{84}{125}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{14}{25}$	$-\frac{2}{5}$
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{12}{25}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{52}{125}$	$\frac{24}{25}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{234}{625}$	$-\frac{156}{125}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{24}{25}$	$-\frac{3}{5}$
$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{18}{25}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{84}{125}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{399}{625}$	$-\frac{252}{125}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{4}{5}$

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{72}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{55}{1296}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{935}{31104}$	$\frac{55}{432}$	$-\frac{5}{72}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{72}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{1296}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{455}{31104}$	$\frac{35}{432}$	$-\frac{5}{72}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{72}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{91}{1296}$	$\frac{7}{36}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1729}{31104}$	$-\frac{91}{432}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{7}{36}$	$-\frac{1}{6}$
$-\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{55}{72}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{935}{1296}$	$\frac{55}{36}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{21505}{31104}$	$-\frac{935}{432}$	$\frac{55}{72}$	$\frac{55}{36}$	$-\frac{5}{6}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{49}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{13}{343}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{65}{2401}$	$\frac{39}{343}$	$-\frac{3}{49}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{1}{7}$
$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{49}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{20}{343}$	$\frac{8}{49}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{110}{2401}$	$-\frac{60}{343}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{8}{49}$	$-\frac{1}{7}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{128}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{35}{1024}$	$-\frac{7}{64}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{805}{32768}$	$\frac{105}{1024}$	$-\frac{7}{128}$	$-\frac{7}{64}$	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{128}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{51}{1024}$	$\frac{9}{64}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1275}{32768}$	$-\frac{153}{1024}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{9}{64}$	$-\frac{1}{8}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{68}{2187}$	$-\frac{8}{81}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{442}{19683}$	$\frac{68}{729}$	$-\frac{4}{81}$	$-\frac{8}{81}$	$\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{81}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{95}{2187}$	$\frac{10}{81}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{665}{19683}$	$-\frac{95}{729}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{10}{81}$	$-\frac{1}{9}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{200}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{57}{2000}$	$-\frac{9}{100}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1653}{80000}$	$\frac{171}{2000}$	$-\frac{9}{200}$	$-\frac{9}{100}$	$\frac{1}{10}$
$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{11}{200}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{77}{2000}$	$\frac{11}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2387}{80000}$	$-\frac{231}{2000}$	$\frac{11}{200}$	$\frac{11}{100}$	$-\frac{1}{10}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{11}{288}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{253}{10368}$	$-\frac{11}{144}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{8855}{497664}$	$\frac{253}{3456}$	$-\frac{11}{288}$	$-\frac{11}{144}$	$\frac{1}{12}$
$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{13}{288}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{325}{10368}$	$\frac{13}{144}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{12025}{497664}$	$-\frac{325}{3456}$	$\frac{13}{288}$	$\frac{13}{144}$	$-\frac{1}{12}$

EI — sztywnością zginania pręta. Równanie (12) daje się scałkować ściśle za pomocą całek eliptycznych, jednak metoda małego parametru daje dużo dogodniejsze wzory przybliżone.

Oznaczmy strzałkę ugięcia pręta przez f (rys. 1) i załóżmy rozwiązanie w postaci

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j f^{1+2j}, \tag{13}$$

ponieważ ze względów fizycznych wiadomo, że rozwiązanie to musi być nieparzystą funkcją parametru f. Stosując najpierw tablicę 1, a następnie tablicę 2, obliczamy

$$y'^2 = y_0'^2 f^2 + 2y_0' y_1' f^4 + (y_1'^2 + 2y_0' y_2') f^6 + \ldots \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(1-y'^2)^{-1/2} &= [1 - y_0'^2 f^2 - 2y_0' y_1' f^4 - (y_1'^2 + 2y_0' y_2') f^6 - \ldots]^{-1/2} = \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} y_0'^2 f^2 + \tfrac{3}{8} y_0'^4 f^4 + y_0' y_1' f^4 + \tfrac{5}{16} y_0'^6 f^6 + \tfrac{3}{2} y_0'^3 y_1' f^6 + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(y_1'^2 + 2y_0' y_2') f^6 + \ldots;\end{aligned} \tag{15}$$

zatem, po podstawieniu do (12),

$$\begin{aligned}&(y_0'' f + y_1'' f^3 + y_2'' f^5 + y_3'' f^7 + \ldots)[1 + \tfrac{1}{2} y_0'^2 f^2 + (\tfrac{3}{8} y_0'^4 + y_0' y_1') f^4 + \\ &\quad + (\tfrac{5}{16} y_0'^6 + \tfrac{3}{2} y_0'^3 y_1' + \tfrac{1}{2} y_1'^2 + y_0' y_2') f^6 + \ldots] + \\ &\quad + \varkappa^2 (y_0 f + y_1 f^3 + y_2 f^5 + y_3 f^7 + \ldots) = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Mnożąc szeregi i porównując współczynniki przy równych potęgach parametru f otrzymujemy układ równań liniowych, które można napisać krótko w postaci

$$y_j'' + \varkappa^2 y_j = S_j, \qquad j = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

przy czym prawe strony tych równań — S_j — określone są kolejno wzorami

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_1 = -\tfrac{1}{2} y_0'^2 y_0'', \\ S_2 = -\tfrac{1}{2} y_0'^2 y_1'' - \tfrac{3}{8} y_0'^4 y_0'' - y_0' y_1' y_0'', \\ S_3 = -\tfrac{1}{2} y_0'^2 y_2'' - \tfrac{3}{8} y_0'^4 y_1'' - y_0' y_1' y_1'' - \tfrac{5}{16} y_0'^6 y_0'' - \tfrac{3}{2} y_0'^3 y_1' y_0'' - \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2} y_1'^2 y_0'' - y_0' y_2' y_0'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{18}$$

Równania (17) można rozwiązać w sposób ogólny przy pomocy całki Duhamela

$$y_j(s) = C_j \sin \varkappa s + D_j \cos \varkappa s + \frac{1}{\varkappa} \int_0^s S_j(\eta) \sin \varkappa (s - \eta)\, d\eta, \tag{19}$$

gdzie η jest zmienną całkowania. Efektywne wzory dla $j = 0$ i $j = 1$ podaje T. Pöschl [9]; określenie dalszych funkcji y_j wymaga jedynie łatwego (choć czasem żmudnego) całkowania. Całkowania tego nie będziemy przytaczali, ponieważ nie jest ono celem obecnej pracy. W każdym razie — po uwzględnieniu odpowiednich warunków brzegowych — możliwość określenia poszukiwanego związku między siłą $\varkappa$ a strzałką ugięcia f jest widoczna.

Inny, znacznie bardziej złożony przykład zastosowania przytoczonych w obecnej pracy tablic podaje praca [16].

Prace cytowane

[1] E. Adams, *Smithsonian mathematical formulae*, Washington 1922.

[2] Н. М. Бурунова, *Справочник по математическим таблицам, дополнение*, Москва 1959.

[3] H. T. Davis, *Tables of the higher mathematical functions*, vol. I, Bloomington 1933.

[4] Faa de Bruno, Quart. Journal of Mathematics, vol. I, str. 359 (cytowane za [5]).

[5] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, Paris 1927.

[6] Л. Н. Кармазина, Л. В. Курочкина, *Таблицы интерполяционных коэффициентов*, Москва 1956.

[7] W. Laska, *Sammlung von Formeln der Reinen und angewandten Mathematik*, Braunschweig 1888.

[8] А. В. Лебедев, Р. М. Федорова, *Справочник по математическим таблицам*, Москва 1956.

[9] T. Pöschl, *Über eine Methode zur angenäherten Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung der Durchbiegung bei der Knickung gerader Stäbe*, Ing.-Archiv 1, 9 (1938), str. 34-41.

[10] И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1951.

[11] W. I. Smirnow, *Matematyka wyższa*, tom II, Warszawa 1960.

[12] *Table of binomial coefficients*, Roy. Soc. Math. Tables, Cambridge University Press 1954.

[13] G. Vega, J. A. Hülsse, *Sammlung mathematischer Tafeln*, Leipzig 1849.

[14] M. Życzkowski, *Tablice funkcyj Eulera i pokrewnych*, Warszawa 1954.

[15] — *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, Z. angew. Math. Phys. 6, 12 (1961), str. 572-576.

[16] — *Krzywe graniczne przy jednoczesnym zginaniu i rozciąganiu prętów o różnych kształtach przekroju*, Arch. Mech. Stos. (w druku).

Praca wpłynęła 5. 8. 1961

М. ЖИЧКОВСКИЙ (Краков)

ТАБЛИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ВОЗВОЖДЕНИИ В СТЕПЕНЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

РЕЗЮМЕ

В работе [15] дана общая формула возвождения в степень обобщенных степенных рядов путем выполнения действия (6). Это формула (7). Несколько первых членов ряда определяют формулы (10). В настоящей работе даны таблицы употребляемых в этих формулах коэффициентов, найденных для важных для прикладных целей значений степени — целых и дробных, положительных и отрицательных.

Таблицы 1 и 2 содержат одновременно таблицы биномиальных коэффициентов Ньютона, которые можно получить как частный случай, принимая $a_j = 0$ при $j \geqslant 2$. В работе даны примеры применения таблиц.

M. ŻYCZKOWSKI (Kraków)

TABLES OF COEFFICIENTS FOR RAISING POWER SERIES TO ANY POWER

SUMMARY

In [15] a general formula for raising generalized power series to any power was given, viz. formula (7) of operation (6). The first terms of the new series are defined by formulas (10). The present paper gives the tables of coefficients used in these formulas, for some values of the exponent (integer and fraction, positive and negative), important in applications of mathematics.

Tables 1 and 2 contain also tables of binomial coefficients which can be obtained as a particular case when $a_j = 0$ for $j \geqslant 2$. Examples of application of the tables are given.
