ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1963)

W. KRYSICKI (Łódź) i M. OLEKIEWICZ (Lublin)

O UOGÓLNIONYM POŁĄCZENIU ZAGADNIEŃ BAYESA I BERNOULLIEGO

Wstęp. W tekście będziemy odróżniali gęstości zmiennych losowych typu ciągłego od rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych typu skokowego, używając w pierwszym przypadku symbolu funkcji „f", w drugim — symbolu funkcji „p". Dystrybuanty tych dwu typów zmiennych losowych oznaczać będziemy odpowiednio symbolami funkcyjnymi „F" i „P". Dla krótkości i przejrzystości sformułowań stosować będziemy oznaczenia $f(x)$ i $f(y)$ lub $p(x)$ i $p(y)$ zamiast np. $f^{(X)}(x)$ i $f^{(Y)}(y)$ lub $p^{(X)}(x)$ i $p^{(Y)}(y)$, opuszczając określający funkcję wskaźnik zmiennej losowej. Natomiast, gdy na miejscu x, y występować będą inne symbole, mogące spowodować nieporozumienie, będziemy umieszczać wskaźnik zmiennej losowej u góry symbolu funkcji, np. $f^{(X)}(a)$ i $f^{(Y)}(b)$ lub $p^{(X)}(a)$ i $p^{(Y)}(b)$ lub *explicite* $P(X=a)$ i $P(Y=b)$ (prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przybiera wartość a lub że zmienna losowa Y przybiera wartość b) itp. Analogicznie oznaczać będziemy gęstości i prawdopodobieństwa w przypadku zmiennych losowych dwuwymiarowych i trójwymiarowych, np. $f(x,y)$ zamiast $f^{(X,Y)}(x,y)$ oraz $p(x,y)$ zamiast $p^{(X,Y)}(x,y)$ lub $P(X=x, Y=y)$ itp.

Dalej, będziemy używać symbolów $X \mid z$, $Y \mid x$ dla oznaczenia zmiennych losowych warunkowych $X \mid Z=z$, $Y \mid X=x$, tj. rozkładów warunkowych zmiennych losowych X lub Y, przy założeniu, że zmienna losowa Z przybiera wartość z, lub rozkładu warunkowego zmiennej losowej Y, przy założeniu, że $X=x$. Gęstości i prawdopodobieństwa warunkowe będziemy wyrażać również skrótowo, np. $f(x \mid z)$, $f(y \mid z)$, $f(y \mid x)$, z tym samym zastrzeżeniem co do przypadków mogących spowodować nieporozumienie.

Klasy zmiennych losowych warunkowych $X \mid z$, $Y \mid z$, $Y \mid x$, utworzonych przy wszystkich możliwych wartościach z, x, oznaczać będziemy przez $(X \mid z)$, $(Y \mid z)$, $(Y \mid x)$.

1. Charakter rozpatrywanych w pracy trójek zmiennych losowych. W pracy tej rozpatrywać będziemy trójki takich zmiennych losowych, z których jedna ma tę właściwość, że rozkłady warunkowe pozostałych ze względu na jej dowolną możliwą wartość są niezależne. Np.

jeśli w przypadku trójki X, Y, Z zmienna losowa Z ma tę właściwość, to $X \mid z$ i $Y \mid z$ brane z klas $(X \mid z)$ i $(Y \mid z)$ będą niezależne, tzn. że dla każdej możliwej wartości z będzie zachodzić równość

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} f(x, y \mid z) &= f(x \mid z) f(y \mid z), \\ p(x, y \mid z) &= p(x \mid z) p(y \mid z) \end{aligned}$$

przy wszystkich możliwych wartościach x i y.

Przy powyższych założeniach udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Rozkład warunkowy zmiennej losowej Y względem możliwej wartości x zmiennej losowej X wyraża się (przy założeniu* (1.1)) *następującymi wzorami (bez względu na typ zmiennej losowej X):*

$$(1.\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} &\textit{Z typu ciągłego} \quad \begin{cases} f(y \mid x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y \mid z) f(z \mid x)\, dz, \\ p(y \mid x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(y \mid z) f(z \mid x)\, dz; \end{cases} \\ &\textit{Z typu skokowego} \quad \begin{cases} f(y \mid x) = \sum\limits_{z} f(y \mid z) p(z \mid x), \\ p(y \mid x) = \sum\limits_{z} p(y \mid z) p(z \mid x). \end{cases} \end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy udowodnić pierwszy z podanych wzorów. Jak wiadomo,

$$f(x, y, z) = f(z) f(x, y \mid z)$$

oraz

$$f(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) f(x, y \mid z)\, dz,$$

a w myśl założenia (1.1)

$$(1.2) \qquad f(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) f(x \mid z) f(y \mid z)\, dz.$$

Korzystając z relacji

$$(1.3) \qquad f(x, z) = f(z) f(x \mid z) = f(x) f(z \mid x)$$

otrzymujemy z wzoru (1.2) wzór

$$(1.4) \qquad f(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z \mid x) f(y \mid z)\, dz.$$

Stąd, pisząc $f(y \mid x) = \dfrac{f(x, y)}{f(x)}$, otrzymujemy, po podstawieniu, wzór twierdzenia, c. b. d. o.

Ze względu na symetrię, twierdzenie 1 jest słuszne przy zamianie zmiennych losowych X i Y.

2. Ogólne zagadnienie Bayesa i Bernoulliego. Wprowadźmy teraz na miejsce zmiennej losowej Z zmienną losową P przyjmującą wartości p z przedziału otwartego $(0,1)$. Na miejsce zmiennych losowych X i Y wprowadźmy zmienne losowe typu skokowego A_n i B_N, przyjmujące odpowiednio wartości $\alpha = 0,1,2,\ldots,n$ i $\beta = 0,1,2,\ldots,N$, będące liczbami zdarzeń pomyślnych zachodzących w seriach n i N doświadczeń przeprowadzonych w ramach jednego doświadczenia złożonego, zorganizowanego jak następuje:

1° W drodze losowej uzyskuje się liczbę p z przedziału otwartego $(0,1)$ jako realizację zmiennej losowej P.

2° a) W przypadku zmiennej losowej A_n przeprowadza się serię n doświadczeń według schematu Bernoulliego, tj. doświadczeń niezależnych i identycznych, ze stałym prawdopodobieństwem (warunkowym) p zdarzenia pomyślnego $\mathscr{A}_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$, równym uzyskanej w punkcie 1° liczbie p; znaczy to, że

$$P(\mathscr{A}_k \mid P = p) = p \quad (k = 1,2,\ldots,n), \tag{2.1}$$

gdzie $\mathscr{A}_k$ oznacza wynik $\mathscr{A}$ w k-tym doświadczeniu;

b) w przypadku zmiennej losowej B_N przeprowadza się serię dalszych N doświadczeń według schematu Bernoulliego z tym samym stałym prawdopodobieństwem (warunkowym) p zdarzenia pomyślnego $\mathscr{A}_l$ $(l = n+1, n+2, \ldots, n+N)$, co w przypadku a), ω oznacza, że

$$P(\mathscr{A}_l \mid P = p) = p \quad (l = n+1, n+2, \ldots, n+N), \tag{2.2}$$

gdzie $\mathscr{A}_l$ — wynik $\mathscr{A}$ w l-tym doświadczeniu.

Zmienną losową A_n określimy więc jako liczbę zdarzeń pomyślnych $(k = 1,2,\ldots,n)$ zachodzących w wyniku całego doświadczenia złożonego, składającego się z punktów 1° i 2°a, w którym prawdopodobieństwo (bezwarunkowe) zdarzenia pomyślnego jest stałe i daje się wyznaczyć ze znanego wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(\mathscr{A}_k) = \int_0^1 P(\mathscr{A}_k \mid P = p) f(p)\,dp = \int_0^1 p f(p)\,dp = E(P) \tag{2.3}$$
$$\text{dla} \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Analogicznie, zmienną losową B_N określimy jako liczbę zdarzeń pomyślnych $\mathscr{A}_l$ $(l = n+1, n+2, \ldots, n+N)$ zachodzących w wyniku całego doświadczenia złożonego, składającego się z punktów 1° i 2°b, w którym prawdopodobieństwo (bezwarunkowe) zdarzenia pomyślnego jest stałe i takie same jak w przypadku zmiennej losowej A_n:

$$(2.4)\qquad P(\mathscr{A}_l) = \int_0^1 P(\mathscr{A}_l \mid P = p) f(p)dp = \int_0^1 pf(p)dp = E(P) = P(\mathscr{A}_k)$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$ i $l = n+1, n+2, \ldots, n+N$.

Tak określone zmienne losowe A_n i B_N stanowią uogólnienie schematu urnowego Lexisa, w którym prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia pomyślnego uzyskuje się w drodze losowej osobno dla każdej serii n czy N doświadczeń; zamiast k jednakowo możliwych wartości tego prawdopodobieństwa, jak to jest w schemacie Lexisa, w grę wchodzą teraz wszystkie możliwe wartości p z przedziału otwartego $(0, 1)$, przy wszelkich możliwych gęstościach zmiennej losowej P.

Można również uważać, że zmienna losowa dwuwymiarowa (A_n, B_N) stanowi uogólnienie dwuwymiarowego schematu urnowego Lexisa. Zmienne losowe A_n i B_N są zależne: są one określone w wyniku doświadczeń złożonych, posiadających pierwszą część wspólną.

Tak więc uogólnione połączenie zagadnień Bayesa i Bernoulliego związane jest z zagadnieniem Lexisa. Jest ono również związane z zagadnieniem zmiennych losowych „zrandomizowanych" (według terminologii Dynkina, [2]).

Spośród zmiennych losowych: trójwymiarowej — (P, A_n, B_N), dwuwymiarowych — (P, A_n), (P, B_N) i (A_n, B_N) oraz związanych z nimi zmiennych losowych warunkowych szczególną uwagę zwrócimy na zmienną losową dwuwymiarową (A_n, B_N) oraz na zmienną losową warunkową $B_N \mid a$. Z drugich części doświadczeń złożonych 2°a lub 2°b wynikają określenia niezależnych zmiennych losowych warunkowych $A_n \mid p$ i $B_N \mid p$, reprezentujących odpowiednio liczby zdarzeń pomyślnych $\mathscr{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ i $\mathscr{A}_l$ $(l = n+1, n+2, \ldots, n+N)$, które zachodzą w seriach n i N doświadczeń przeprowadzonych według schematu Bernoulliego, z prawdopodobieństwem warunkowym p zdarzenia pomyślnego. Rozkłady tych niezależnych zmiennych losowych warunkowych są oczywiście rozkładami Bernoulliego, bez względu na to jaki jest rozkład zmiennej losowej P:

$$(2.5)\qquad p(a \mid p) = P(A_n = a \mid P = p) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a} \quad (a = 0, 1, \ldots, n)\ (^1),$$

gdzie $q = 1-p$ i podobnie:

$$(2.6)\qquad p(\beta \mid p) = P(B_N = \beta \mid P = p) = \binom{N}{\beta} p^\beta q^{N-\beta} \quad (\beta = 0, 1, \ldots, N)\ (^1).$$

---

(1) Symbol p użyty tu jest w dwu znaczeniach: jako symbol funkcji (przed nawiasem) oraz jako symbol dowolnej możliwej wartości zmiennej losowej P (w nawiasie).

Na podstawie znajomości tych rozkładów warunkowych, rozkłady (bezwarunkowe) zmiennych losowych A_n i B_N wyrażą się wzorami ogólnymi

$$(2.7)\qquad p(a) = P(A_n = a) = \int_0^1 p(a/p)f(p)dp = \binom{n}{a}\int_0^1 f(p)p^a q^{n-a}dp,$$

$$(2.8)\qquad p(\beta) = P(B_N = \beta) = \int_0^1 p(\beta/p)f(p)dp = \binom{N}{\beta}\int_0^1 f(p)p^\beta q^{N-\beta}dp.$$

Zmienne losowe A_n i B_N można uważać za zmienne losowe zrandomizowane, jakkolwiek nie są one równoważne w sensie de Finettiego (chyba, że $N = n$), przy czym czynnikiem randomizującym jest zmienna losowa P.

Ogólny wzór dla rozkładu zmiennej losowej dwuwymiarowej (A_n, B_N) jest

$$p(a, \beta) = P(A_n = a, B_N = \beta) = \int_0^1 p(a, \beta \mid p)f(p)dp = $$

$$= \int_0^1 p(a \mid p)p(\beta \mid p)f(p)dp,$$

co po podstawieniu wzorów (2.5) i (2.6) daje

$$(2.9)\qquad p(a, \beta) = \binom{n}{a}\binom{N}{\beta}\int_0^1 f(p)p^{a+\beta}q^{n-a+N-\beta}dp.$$

Rozkład zmiennej losowej warunkowej $P \mid a$, tj. warunkowy rozkład zmiennej losowej P, przy ustalonej wartości a zmiennej losowej A_n, wyraża się wzorem Bayesa

$$(2.10)\qquad f(p \mid a) = \frac{f(p)p(a \mid p)}{p(a)} = \frac{f(p)p^a q^{n-a}}{\int_0^1 f(p)p^a q^{n-a}dp}$$

i symetrycznie

$$(2.11)\qquad f(p \mid \beta) = \frac{f(p)p(\beta \mid p)}{p(\beta)} = \frac{f(p)p^\beta q^{N-\beta}}{\int_0^1 f(p)p^\beta q^{N-\beta}dp}.$$

Ogólne wzory dla rozkładów zmiennych losowych dwuwymiarowych (A_n, P) i (B_N, P) otrzymujemy przez zastosowanie wzorów (2.5) i (2.6):

$$(2.12)\qquad f(a, p) = f(p)p(a \mid p) = f(p)\binom{n}{a}p^a q^{n-a},$$

$$(2.13)\qquad f(\beta, p) = f(p)p(\beta \mid p) = f(p)\binom{N}{\beta}p^\beta q^{N-\beta}.$$

Stosując twierdzenie 1 (wzór (1.I)), otrzymujemy wzór ogólny dla rozkładu zmiennej losowej warunkowej $B_N \mid a$, tj. dla warunkowego rozkładu zmiennej losowej B_N ze względu na dowolną możliwą wartość a

zmiennej losowej A_n:

$$(2.\mathrm{II})\qquad p(\beta \mid a) = P(B_N = \beta \mid A_n = a) = \int_0^1 p(\beta \mid p) f(p \mid a)\, dp = \binom{N}{\beta} \frac{\int_0^1 f(p) p^{a+\beta} q^{n-a+N-\beta} dp}{\int_0^1 f(p) p^a q^{n-a} dp}.$$

W wielu zastosowaniach praktycznych ważna jest znajomość nie tyle prawdopodobieństwa wyrażonego wzorem (2.II), ile prawdopodobieństwa warunkowego, że zmienna losowa B_N przyjmie wartość nie większą od pewnej wartości β, gdy zmienna losowa A_n przyjmie wartość a. Prawdopodobieństwo to wyrazi się wzorem

$$(2.\mathrm{III})\qquad P(\beta \mid a) = P(B_N \leqslant \beta \mid A_n = a) = \sum_{b=0}^{\beta} p(b \mid a) = \frac{\sum_{b=0}^{\beta} \binom{N}{b} \int_0^1 f(p) p^{a+b} q^{n-a+N-b} dp}{\int_0^1 f(p) p^a q^{n-a} dp}.$$

Rozpatrzmy teraz pewne szczególne przypadki rozkładu zmiennej losowej P:

(a) zmienna losowa P ma rozkład prostokątny

$$(2.14)\qquad f(p) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 < p < 1, \\ 0 & \text{dla} \quad p \leqslant 0 \text{ i } p \geqslant 1; \end{cases}$$

(b) zmienna losowa P ma rozkład beta o stałych parametrach r, s $(-1 < r < s+1)$ (²)

$$(2.15)\qquad f(p) = \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)} p^r q^{s-r} \quad \text{dla} \quad 0 < p < 1.$$

W przypadkach (a) i (b) wzory (2.7)-(2.13), po zastąpieniu całek jako funkcji B Eulera przez ich wartości, przyjmują postać

$$(2.16)\qquad p(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & \text{(a)} \\ \dbinom{n}{a} \dfrac{\Gamma(s+2)\Gamma(a+r+1)\Gamma(n-a+s-r+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)\Gamma(n+s+2)}; & \text{(b)} \end{cases}$$

(²) Jak wiadomo, w praktyce spotykamy wiele rozkładów zbliżonych do rozkładu beta. Znane są metody szacowania parametrów r i s na podstawie danych doświadczalnych. Między innymi w pracy [6] można znaleźć informacje na ten temat, jak również inne cenne informacje o rozkładzie beta.

$$(2.17)\qquad p(\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & \text{(a)}\\[2ex] \dbinom{N}{\beta}\dfrac{\Gamma(s+2)\Gamma(\beta+r+1)\Gamma(N-\beta+s-r+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)\Gamma(N+s+2)}; & \text{(b)}\end{cases}$$

$$(2.18)\quad p(a,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+N+1}\cdot\dfrac{\binom{n}{a}\binom{N}{\beta}}{\binom{n+N}{a+\beta}}=\dfrac{n!N!(a+\beta)!(n-a+N-\beta)!}{a!\beta!(n-a)!(N-\beta)!(n+N+1)!}, & \text{(a)}\\[2ex] \dbinom{n}{a}\dbinom{N}{\beta}\dfrac{\Gamma(s+2)\Gamma(a+\beta+r+1)}{\Gamma(n+N+s+2)\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)}; & \text{(b)}\end{cases}$$

$$(2.19)\qquad f(p\mid a)=\begin{cases}(n+1)p(a\mid p)=(n+1)\dbinom{n}{a}p^{a}q^{n-a}, & \text{(a)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(n+s+2)}{\Gamma(a+r+1)\Gamma(n-a+s-r+1)}p^{a+r}q^{n-a+s-r}; & \text{(b)}\end{cases}$$

$$(2.20)\qquad f(p\mid \beta)=\begin{cases}(N+1)p(\beta\mid p)=(N+1)\dbinom{N}{\beta}p^{\beta}q^{N-\beta}, & \text{(a)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(N+s+2)}{\Gamma(\beta+r+1)\Gamma(N-\beta+s-r+1)}p^{\beta+r}q^{N-\beta+s-r}; & \text{(b)}\end{cases}$$

$$(2.21)\qquad f(a,p)=\begin{cases}p(a\mid p)=\dbinom{n}{a}p^{a}q^{n-a}, & \text{(a)}\\[2ex] \dbinom{n}{a}\dfrac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)}p^{a+r}q^{n-a+s-r}; & \text{(b)}\end{cases}$$

$$(2.22)\qquad f(\beta,p)=\begin{cases}p(\beta\mid p)=\dbinom{N}{\beta}p^{\beta}q^{N-\beta}, & \text{(a)}\\[2ex] \dbinom{N}{\beta}\dfrac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)}p^{\beta+r}q^{N-\beta+s-r}. & \text{(b)}\end{cases}$$

W końcu, interesujący nas szczególnie wzór (2.II) przyjmuje postać

(2.IV)

$$p(\beta\mid a)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{n+N+1}\cdot\dfrac{\binom{n}{a}\binom{N}{\beta}}{\binom{n+N}{a+\beta}}=\dfrac{(n+1)!(a+\beta)!(n-a+N-\beta)}{a!\beta!(n-a)!(n-\beta)!(n+N+1)!}, & \text{(a)}\\[2ex] \dbinom{N}{\beta}\dfrac{\Gamma(n+s+2)\Gamma(a+\beta+r+1)\Gamma(n-a+N-\beta+s-r+1)}{\Gamma(n+N+s+2)\Gamma(a+r+1)\Gamma(n-a+s-r+1)}. & \text{(b)}\end{cases}$$

Wzór (2.IVa) podano w pracy [5]. Można go znaleźć również u Fishera [3].

3. Extremum funkcji $p(\beta \mid a) = P(B_N = \beta \mid A_n = a)$, przy stałych n, N, a w przypadku (a) lub przy stałych n, N, a, r, s w przypadku (b). W przypadku (a), tj. w przypadku gdy zmienna losowa P ma rozkład prostokątny (2.10), extremum tej funkcji zbadano w pracy [5]. Zbadamy więc extremum w przypadku (b), tj. w przypadku, gdy zmienna losowa P ma rozkład beta (2.11). Stosując wzór (2.IV) otrzymujemy

$$\frac{p(\beta+1 \mid a)}{p(\beta \mid a)} = \frac{(a+\beta+r+1)(N-\beta)}{(\beta+1)(n-a+N-\beta+s-r)}.$$

Gdy β przebiega wartości $0, 1, \ldots, N$, stosunek ten zmienia się i jest nie mniejszy niż 1, dopóty funkcja rozpatrywana nie maleje; zachodzi to dla

$$\beta \leqslant \frac{(N+1)(a+r)}{n+s} - 1.$$

Dyskusja poszczególnych przypadków prowadzi do następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 2. *Przy stałych n, a, N, r, s:*

1° *Jeżeli $(N+1)(a+r) < n+s$, to $p(\beta \mid a)$ jest funkcją malejącą β, tzn. przy $\beta = 0$ osiąga wartość największą*

$$\max[p(\beta \mid a)] = P(B_N = 0 \mid A_n = a) = \frac{\Gamma(n+s+2)\Gamma(n-a+N+s-r+1)}{\Gamma(n+N+S+2)\Gamma(n-a+s-r+1)}, \tag{3.1}$$

a przy $\beta = N$ — wartość najmniejszą

$$\min[p(\beta \mid a)] = P(B_N = N \mid A_n = a) = \frac{\Gamma(n+s+2)\Gamma(a+N+r+1)}{\Gamma(n+N+s+2)\Gamma(a+r+1)}. \tag{3.2}$$

2° *Jeżeli $a+r = n+s$,* to *$p(\beta \mid a)$ jest funkcją rosnącą β, tzn. przy $\beta = N$ osiąga wartość największą*

$$\max[p(\beta \mid a)] = P(B_N = N \mid A_n = a) = \frac{n+s+1}{n+N+s+1}, \tag{3.3}$$

a przy $\beta = 0$ — wartość najmniejszą

$$\min[p(\beta \mid a)] = P(B_N = 0 \mid A_n = a) = \frac{N!\,\Gamma(n+s+2)}{\Gamma(n+N+s+2)}. \tag{3.4}$$

3° *Jeżeli $a+r = n+s$ oraz $\dfrac{(N+1)(a+r)}{(n+s)} = k$, gdzie k jest liczbą naturalną, to $p(\beta \mid a)$ osiąga tę samą największą wartość zarówno dla $\beta = k-1$, jak i dla $\beta = k$*

$$\max[p(\beta \mid a)] = P(B_N = k-1 \mid A_n = a) = P(B_N = k \mid A_n = a). \tag{3.5}$$

4° *Jeżeli* $\dfrac{(N+1)(a+r)}{(n+s)}$ *nie jest liczbą naturalną, to* $p(\beta \mid a)$ *osiąga największą wartość, gdy* β *równa się największej liczbie całkowitej* l *mniejszej niż* $\dfrac{(N+1)(a+r)}{(n+s)}$:

$$\max[p(\beta \mid a)] = P(B_N = l \mid A_n = a). \tag{3.6}$$

Poniżej, dla przykładu podano wartości β, dla których zachodzi maksimum przy pewnych wartościach n, N, a, r, s.

	n	a	N	β_0
	100	5	500	17
$r = 1$	100	6	500	20
$s = 75$	200	10	500	20
	200	10	1000	40

	n	a	N	β_0
	100	5	500	14
$r = 3$	100	6	500	16
$s = 178$	200	10	500	17
	200	10	1000	34

4. Zagadnienia graniczne

1. Obliczmy wartość graniczną $p(\beta \mid a)$ przy stałych N, β, zakładając, że n oraz a rosną nieograniczenie w ten sposób, że stosunek

$$\frac{a}{n} = p_0 \qquad (p_0 \neq 0, p_0 \neq 1) \tag{4.1}$$

pozostaje stały. Mamy zatem obliczyć

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p_0=\text{const}}} p(\beta \mid a) = \binom{N}{\beta} \lim_{\substack{n\to\infty \\ p_0=\text{const}}} \frac{\int\limits_0^1 f(p) p^{a+\beta} q^{n-a+N-\beta} dp}{\int\limits_0^1 f(p) p^a q^{n-a} dp}. \tag{4.2}$$

W tym celu oznaczmy

$$p - p_0 = h, \qquad \text{gdzie} \qquad q_0 = 1 - p_0; \tag{4.3}$$

wówczas $q - q_0 = -h$ oraz

$$p^a q^{n-a} = p_0^a q_0^{n-a} \left(1 - \frac{h}{p_0}\right)^a \left(1 - \frac{h}{q_0}\right)^{n-a}$$

Po analogicznym przekształceniu w liczniku wyrażenie (4.2) przyjmie postać

$$\binom{N}{\beta} p_0^\beta q_0^{N-\beta} \lim_{\substack{n\to\infty \\ p_0=\text{const}}} \frac{\int\limits_{-p_0}^{q_0} f^{(p)}(h+p_0)\left(1+\dfrac{h}{p_0}\right)^{np_0+\beta}\left(1-\dfrac{h}{q_0}\right)^{nq_0+M-\beta} dh}{\int\limits_{-p_0}^{q_0} f^{(p)}(h+p_0)\left(1+\dfrac{h}{p_0}\right)^{np_0}\left(1-\dfrac{h}{q_0}\right)^{nq_0} dh}. \tag{4.4}$$

Wykażemy, że przy pewnych założeniach sformułowanych poniżej, granica we wzorze (4.4) jest 1. Jest to równoznaczne z tym, że

$$(4.5)\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ p_0=\mathrm{const}}} \int_{-p_0}^{q_0} f^{(p)}(h+p_0)\left(1+\frac{h}{p_0}\right)^{np_0}\left(1-\frac{h}{q_0}\right)^{nq_0}\times$$
$$\times\left[\left(1+\frac{h}{p_0}\right)^{\beta}\left(1-\frac{h}{q_0}\right)^{N-\beta}-1\right]dh=0.$$

Wyrażenie zawarte w nawiasie kwadratowym nie zależy od n, a będąc funkcją ograniczoną ma tę własność, że jego wartość bezwzględna ma kres górny (skończony). Wystarczy więc udowodnić, że

$$(4.6)\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ p_0=\mathrm{const}}} \int_{-p_0}^{q_0} f^{(p)}(h+p_0)\left(1+\frac{h}{p_0}\right)^{np_0}\left(1-\frac{h}{q_0}\right)^{nq_0}dh = 0.$$

Otóż, rozpatrując przebieg funkcji

$$\Phi_n(h)=\left(1+\frac{h}{p_0}\right)^{np_0}\left(1-\frac{h}{q_0}\right)^{nq_0}$$

w przedziale $-p_0 \leqslant h \leqslant q_0$, przy $n\to\infty$, oraz zakładając ograniczoność drugiej pochodnej funkcji $f(p)$ w pewnym otoczeniu punktu p_0, wykazano (dla innych celów) w pracy [4] możliwość oszacowania całki występującej w (4.6) za pomocą wyrażenia

$$(4.7)\qquad \sqrt{\frac{2\pi p_0 q_0}{n}}\,[f^{(p)}(p_0)+O(n^{-2\omega})],$$

gdzie $\frac{1}{3}<\omega<\frac{1}{2}$. Z oszacowania (4.7), przy $n\to\infty$, wynika bezpośrednio słuszność wzoru (4.6), a tym samym prawdziwość tego, że granica we wzorze (4.4) jest równa 1. Otrzymujemy więc wzór graniczny:

$$(4.\mathrm{V})\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ p_0=\mathrm{const}}} p(\beta\mid\alpha)=\binom{N}{\beta}p_0^{\beta}q_0^{N-\beta}.$$

Otrzymany wynik jest interesujący: mówi on, że niezależnie od gęstości prawdopodobieństwa a priori $f(p)$, przy podanych wyżej założeniach wyrażenie graniczne $p(\beta\mid\alpha)$ jest równe prawdopodobieństwu, że w N doświadczeniach niezależnych o stałym prawdopodobieństwie p_0 zdarzenia pomyślnego, zdarzenie zajdzie dokładnie β razy. Inaczej mówiąc, wyrażenie graniczne $p(\beta\mid\alpha)$ jest dane wzorem Bernoulliego. Wzór (4.V) jest więc znacznie ogólniejszy od wzoru (II) pracy [5].

2. Obliczmy teraz graniczną wartość prawdopodobieństwa $p(\beta \mid a)$ przy stałych n i a, zakładając, że β i N rosną nieograniczenie w ten sposób, że stosunek

$$\frac{\beta}{N} = P_0 \qquad (P_0 \neq 0,\ P_0 \neq 1) \tag{4.8}$$

pozostaje stały, tj. obliczmy

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ P_0=\mathrm{const}}} p(\beta \mid a) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ P_0=\mathrm{const}}} \binom{N}{\beta} \frac{\int_0^1 f(p) p^{a+\beta} q^{n-a+N-\beta} dp}{\int_0^1 f(p) p^a q^{n-a} dp}. \tag{4.9}$$

Przekształcając wyrażenie pod znakiem granicy przy użyciu wzoru Stirlinga, jak również wykorzystując oszacowanie (4.7) (przy innych oczywiście oznaczeniach) otrzymujemy taką jego postać:

$$\frac{P_0^a Q_0^{n-a} [f^{(p)}(P_0) + O(n^{-2\omega})]}{N \int_0^1 f(p) p^a q^{n-a} dp}, \qquad \text{gdzie} \quad Q_0 = 1 - P_0. \tag{4.10}$$

Granicą tego wyrażenia przy $N \to \infty$ jest zero, lecz z postaci wyrażenia wnioskujemy, że rzędem zbieżności do zera względem $1/N$ jest 1, oraz że

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ P_0=\mathrm{const}}} \{N p(\beta \mid a)\} = \frac{f^{(p)}(P_0)}{\int_0^1 f(p) p^a q^{n-a} dp} P_0^a Q_0^{n-a} \tag{4.VI}$$

W przypadku (a), gdy zmienna losowa P ma rozkład prostokątny (2.10), jest oczywiście $f^{(P)}(P_0) = 1$, a po zastąpieniu całki jako funkcji B Eulera przez jej wartość otrzymuje się wzór (III) pracy [5].

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ P_0=\mathrm{const}}} \{N p(\beta \mid a)\} = (n+1) \binom{n}{a} P_0^a Q_0^{n-a}. \tag{4.11}$$

W przypadku (b), gdy zmienna losowa P ma rozkład beta (2.15), otrzymuje się wzór

$$\lim \{N p(\beta \mid a)\} = \frac{P_0^{a+r} Q_0^{n-a+s-r}}{\int_0^1 p^{a+r} q^{n-a+s-r} dp} = \tag{4.12}$$

$$= \frac{\Gamma(n+s+2)}{\Gamma(a+r+1)\Gamma(n-a+s-r+1)} P_0^{a+r} Q_0^{n+a-s-r}.$$

5. Wartości oczekiwane i wariancje

a) Wartości oczekiwane i wariancje zmiennych losowych A_n i B_N. Na podstawie wzorów (2.7) i (2.8) możemy otrzymać ogólne wzory dla wartości oczekiwanych zmiennych losowych A_n i B_N, wynikające bezpośrednio z definicji wartości oczekiwanej:

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} E(A_n) &= \sum_{\alpha=0}^{n} \alpha p(\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{n} \alpha \binom{n}{\alpha} \int_0^1 f(p) p^{\alpha} q^{n-\alpha} dp, \\ E(B_n) &= \sum_{\beta=0}^{N} \beta p(\beta) = \sum_{\beta=0}^{N} \beta \binom{N}{\beta} \int_0^1 f(p) p^{\beta} q^{N-\beta} dp. \end{aligned}$$

Można jednak obliczyć $E(A_n)$ i $E(B_N)$ w sposób łatwiejszy, korzystając z tego, że warunkowe wartości oczekiwane zmiennych losowych A_n i B_N względem losowo otrzymanej wartości zmiennej losowej P — rozpatrywane jako zmienne losowe $E(A_n \mid P)$ i $E(B_N \mid P)$ — są funkcjami zmiennej losowej P,

$$(5.2)\qquad E(A_n \mid P) = nP, \qquad E(B_N \mid P) = NP,$$

oraz z tego, że ich wartości oczekiwane są wartościami oczekiwanymi zmiennych losowych A_n i B_N,

$$(5.3)\qquad E[E(A_n \mid P)] = E(A_n), \qquad E[E(B_N \mid P)] = E(B_N).$$

Mamy zatem, biorąc wartości oczekiwane prawych stron równości (5.2),

$$(5.\mathrm{VII})\qquad E(A_n) = nE(P), \qquad E(B_N) = NE(P).$$

Aby otrzymać wzory ogólne na wariancje zmiennych losowych A_n i B_N, określone jako

$$\sigma_{A_n}^2 = E(A_n^2) - E^2(A_n), \qquad \sigma_{B_N}^2 = E(B_N^2) - E^2(B_N),$$

trzeba jeszcze obliczyć drugie momenty tych zmiennych losowych $E(A_n^2)$ i $E(B_N^2)$. Zamiast korzystać z bezpośrednich wzorów opartych na definicji drugiego momentu

$$E(A_n^2) = \sum_{\alpha=0}^{n} \alpha^2 p(\alpha) \quad \text{i} \quad E(B_N^2) = \sum_{\beta=0}^{N} \beta^2 p(\beta),$$

analogicznych do wzorów (5.1), zastosujemy znowu metodę pośrednią. Przez analogię do (5.3) mamy

$$(5.4)\qquad E(A_n^2) = E[E(A_n^2 \mid P)], \qquad E(B_N^2) = E[E(B_N^2 \mid P)],$$

ale, jak wiadomo z teorii rozkładów Bernoulliego,

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} E(A_n^2 \mid P) &= nPQ+n^2P^2 = nP+n(n-1)P^2, \\ E(B_N^2 \mid P) &= NPQ+N^2P^2 = NP+N(N-1)P^2. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$(5.6)\qquad \begin{aligned} E(A_n^2) &= nE(P)+n(n-1)E(P^2), \\ E(B_N^2) &= NE(P)+N(N-1)E(P^2). \end{aligned}$$

Relacje wyrażone wzorami (5.VII) i (5.6) są szczególnymi przypadkami następującego twierdzenia ogólniejszego:

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli k-ty moment warunkowy jakiejkolwiek zmiennej losowej U względem dowolnie ustalonej wartości v innej zmiennej losowej V jest wielomianem m-tego stopnia ze względu na v, tj. jeżeli*

$$(5.7)\qquad E(U^k \mid v) = W_m(v),$$

gdzie

$$(5.8)\qquad W_m(v) = a_0+a_1v+a_2v^2+\ldots+a_mv^m,$$

to k-ty moment zmiennej losowej U wyraża się wzorem

$$(5.\mathrm{VIII})\qquad E(U^k) = a_0+a_1E(V)+a_2E(V^2)+\ldots+a_mE(V^m).$$

Dowód jak wyżej, z odpowiednią zmianą oznaczeń.

Ogólne wzory na wariancje zmiennych losowych A_n i B_N otrzymamy biorąc pod uwagę wzory (5.VIII) i (5.6):

$$(5.\mathrm{IX})\qquad \begin{aligned} \sigma_{A_n}^2 &= E(A_n^2)-E^2(A_n) = nE(P)[1-E(P)]+n(n-1)\sigma_p^2, \\ \sigma_{B_N}^2 &= E(B_N^2)-E^2(B_N) = NE(P)[1-E(P)]+N(N-1)\sigma_p^2. \end{aligned}$$

Wzory (5.IX) są znanymi wzorami dla wariancji liczby zdarzeń pomyślnych w schemacie urnowym Lexisa [1], [7].

Obliczmy teraz wartości oczekiwane, drugie momenty i wariancje zmiennych losowych A_n i B_N w interesujących nas przypadkach szczególnych: (a) — gdy P ma rozkład prostokątny (2.14), oraz (b) — gdy P ma rozkład beta (2.15). Po zastosowaniu odpowiednich wzorów i zastąpieniu w przypadku (b) całki jako funkcji B Eulera przez jej wartość, z wykorzystaniem relacji rekurencyjnej

$$\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1),$$

otrzymamy

$$E(P) = \int_0^1 pf(p)dp = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{(a)} \\ \dfrac{r+1}{s+2}; & \text{(b)} \end{cases} \tag{5.9}$$

$$E(P^2) = \int_0^1 p^2 f(p)dp = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{(a)} \\ \dfrac{(r+1)(r+2)}{(s+2)(s+3)}; & \text{(b)} \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\sigma_p^2 = E(P^2) - E^2(P) = \begin{cases} \dfrac{1}{12}, & \text{(a)} \\ \dfrac{(r+1)(s-r+1)}{(s+2)^2(s+3)}. & \text{(b)} \end{cases} \tag{5.11}$$

Stąd, po podstawieniu do wzorów (5.VII), (5.6) i (5.IX), otrzymujemy

$$\begin{aligned} E(A_n) &= \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{(a)} \\ n\dfrac{r+1}{s+2}; & \text{(b)} \end{cases} \\ E(B_N) &= \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & \text{(a)} \\ N\dfrac{r+1}{s+2}. & \text{(b)} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.X}$$

$$\begin{aligned} E(A_n^2) &= \begin{cases} \dfrac{n(2n+1)}{6}, & \text{(a)} \\ \dfrac{n(r+1)[n+s+2+(n-1)(r+1)]}{(s+2)(s+3)}; & \text{(b)} \end{cases} \\ E(B_N^2) &= \begin{cases} \dfrac{N(2N+1)}{6}, & \text{(a)} \\ \dfrac{N(r+1)[N+s+2+(N-1)(r+1)]}{(s+2)(s+3)}; & \text{(b)} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\text{(5.XI)}\qquad \sigma^2_{A_n} = \begin{cases} \dfrac{n(n+2)}{12}, & \text{(a)} \\ \dfrac{n(n+s+2)(r+1)(s-r+1)}{(s+2)^2(s+3)}; & \text{(b)} \end{cases}$$

$$\sigma^2_{B_N} = \begin{cases} \dfrac{N(N+2)}{12}, & \text{(a)} \\ \dfrac{N(N+s+2)(r+1)(s-r+1)}{(s+2)^2(s+3)}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Zauważmy, że w obu przypadkach (a) i (b) wariancja zmiennej losowej A_n jest rzędu $O(n^2)$, a wariancja zmiennej losowej B_N jest rzędu $O(N^2)$:

$$\text{(5.13)}\qquad \sigma^2_{A_n} = O(n^2), \qquad \sigma^2_{B_N} = O(N^2).$$

W dalszych rozważaniach dotyczących zmiennych losowych warunkowych będziemy brali pod uwagę wyłącznie zmienną losową $B_N \mid a$. Otrzymane wyniki będą oczywiście ważne i dla zmiennej losowej warunkowej $A_n \mid \beta$, z odpowiednią zmianą oznaczeń.

b) Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej warunkowej $B_N \mid a$. Opierając się na (2.II) możemy napisać ogólny wzór na warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej B_N, przy założeniu, że $A_n = a$, korzystając bezpośrednio z definicji

$$\text{(5.14)}\qquad E(B_N \mid a) = \sum_{\beta=0}^{N} \beta p(\beta \mid a) = \frac{\sum\limits_{\beta=0}^{N} \beta \binom{N}{\beta} \int\limits_0^1 f(p) p^{a+\beta} q^{n-a+N-\beta} dp}{\int\limits_0^1 f(p) p^a q^{n-a} dp}.$$

Łatwiej jest jednak obliczyć $E(B_N \mid a)$ w sposób pośredni. Stosując wzór (1.I) z zamianą x na a, y na β, z na p, otrzymujemy

$$\text{(5.15)}\qquad E(B_N \mid a) = \sum_{\beta=0}^{N} \beta \int\limits_0^1 p(\beta \mid p) f(p \mid a) dp =$$

$$= \int\limits_0^1 f(p \mid a) \sum_{\beta=0}^{N} \beta p(\beta \mid p) dp = \int\limits_0^1 f(p \mid a) E(B_N \mid p) dp.$$

Podstawiając $E(B_N \mid p) = Np$, otrzymujemy wzór ogólny

$$\text{(5.XII)}\qquad E(B_N \mid a) = N \int\limits_0^1 p f(p \mid a) dp = NE(P \mid a).$$

Aby otrzymać wzór na wariancję $B_N \mid a$, trzeba jeszcze obliczyć drugi moment $E(B_N^2 \mid a)$. Przekształcenia analogiczne do (5.15) prowadzą do wzoru

$$(5.16) \qquad E(B_N^2 \mid a) = \int_0^1 f(p \mid a) E(B_N^2 \mid p) dp,$$

skąd, podstawiając $E(B_N^2 \mid p) = Np + N(N-1)p^2$, otrzymujemy

$$(5.17) \qquad E(B_N^2 \mid a) = NE(P \mid a) + N(N-1)E(P^2 \mid a).$$

Relacje wyrażone wzorami (5.XII) i (5.17) są szczególnymi przypadkami twierdzenia ogólniejszego, będącego rozszerzeniem twierdzenia 3.

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli zmienne losowe warunkowe $X \mid z$ i $Y \mid z$ są niezależne (wzór (1.1)) oraz k-ty moment zmiennej losowej warunkowej $Y \mid z$ jest wielomianem m-tego stopnia ze względu na z, tj. jeżeli*

$$(5.18) \qquad E(Y^k \mid z) = W_m(z),$$

gdzie

$$(5.19) \qquad W_m(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m,$$

to k-ty moment zmiennej losowej warunkowej $Y \mid x$ wyraża się wzorem

$$(5.\mathrm{XIII}) \qquad E(Y^k \mid x) = b_0 + b_1 E(Z \mid x) + b_2 E(Z^2 \mid x) + \ldots + b_m E(Z^m \mid x).$$

Dowód jak wyżej, z odpowiednią zmianą oznaczeń.

Ogólny wzór na wariancję zmiennej losowej warunkowej $B_N \mid a$ otrzymamy biorąc pod uwagę wzory (5.XII) i (5.17):

$$(5.\mathrm{XIV}) \qquad \sigma^2_{B_N \mid a} = E(B_N^2 \mid a) - E^2(B_N \mid a) =$$
$$= NE(P \mid a)[1 - E(P \mid a) + N(N-1)\sigma^2_{P \mid a}.$$

Na podkreślenie zasługuje ta sama struktura wzoru na wariancję zmiennej losowej warunkowej $B_N \mid a$, co na wariancję zmiennej losowej B_N, mianowicie struktura charakterystyczna dla wariancji w schemacie urnowym Lexisa. Zmienna losowa warunkowa $B_N \mid a$ również podlega prawom tego schematu.

Obliczmy teraz wartość oczekiwaną, drugi moment i wariancję zmiennej losowej warunkowej $B_N \mid a$ w interesujących nas przypadkach szczególnych: (a) gdy P ma rozkład prostokątny (2.14) oraz (b) — gdy P ma rozkład beta (2.15). Po zastosowaniu wzoru (2.19) otrzymujemy wzory (znane dla przypadku (a)):

$$(5.20) \qquad E(P \mid a) = \int_0^1 pf(p \mid a)dp = \begin{cases} \dfrac{a+1}{n+2}, & \text{(a)} \\ \dfrac{a+r+1}{n+s+2}; & \text{(b)} \end{cases}$$

$$(5.21) \qquad E(P^2 \mid a) = \int_0^1 p^2 f(p \mid a)dp = \begin{cases} \dfrac{(a+1)(a+2)}{(n+2)(n+3)}, & \text{(a)} \\ \dfrac{(a+r+1)(a+r+2)}{(n+s+2)(n+s+3)}; & \text{(b)} \end{cases}$$

$$(5.22) \qquad \sigma^2_{P|a} = E(P^2 \mid a) - E^2(P \mid a) = \begin{cases} \dfrac{(a+1)(n-a+1)}{(n+2)^2(n+3)}, & \text{(a)} \\ \dfrac{(a+r+1)(n-a+s-r+1)}{(n+s+2)^2(n+s+3)}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Stąd, po podstawieniu do wzorów (5.XII), (5.17) i (5.XIV), otrzymujemy

$$(5.\mathrm{XV}) \qquad E(B_N \mid a) = \begin{cases} N\dfrac{a+1}{n+2}, & \text{(a)} \\ N\dfrac{a+r+1}{n+s+2}; & \text{(b)} \end{cases}$$

$$(5.23) \qquad E(B_N^2 \mid a) = \begin{cases} \dfrac{N(a+1)n+N+2+(N-1)(a+1)}{(n+2)(n+3)}, & \text{(a)} \\ \dfrac{N(a+r+1)n+N+s+2+(N-1)(a+r+1)}{(n+s+2)(n+s+3)}; & \text{(b)} \end{cases}$$

$$(5.\mathrm{XVI}) \qquad \sigma^2_{B_N|a} = \begin{cases} \dfrac{N(n+N+2)(a+1)(n-a+1)}{(n+2)^2(n+3)}, & \text{(a)} \\ \dfrac{N(n+N+s+2)(a+r+1)(n-a+s-r+1)}{(n+s+2)^2(n+s+3)}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Wynik (5.XV) dla przypadku (a), otrzymany w pracy [5] jako wzór (IV), wyprowadzono tu w sposób znacznie prostszy. Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE 5. *Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej warunkowej $B_N \mid a$ wyrażają się w ogólnym przypadku wzorami* (5.XII) *i* (5.XV), *a w przypadkach szczególnych* (a) — *gdy P ma rozkład prostokątny* (2.14) *oraz* (b) — *gdy P ma rozkład beta* (2.15) — *wzorami* (5.XV) *i* (5.XVI).

Zbadamy teraz zmienność wariancji warunkowej $\sigma^2{}_{B_N|a}$ osobno dla przypadku (a), gdy zmienna losowa P ma rozkład prostokątny (2.14) i dla przypadku (b), gdy P ma rozkład beta (2.15). Wariancja ta przy stałych wartościach n, N lub n, N r, s jest funkcją a $(a = 0, 1, \ldots, n)$.

(a) P ma rozkład prostokątny (2.14). Przedstawmy wariancję warunkową (wzór (5.XVI)) w postaci

$$\sigma^2_{B_N|a} = \varphi(n, N)(a+1)(n-a+1),$$

gdzie

$$\varphi(n, N) = \frac{N(n+N+2)}{(n+2)^2(n+3)}.$$

Wynika stąd natychmiast

TWIERDZENIE 6. *Wariancja warunkowa* $\sigma^2_{B_N|a}$, *dana wzorem* (5.XVI) — *przypadek* (a) — *ma dwa jednakowe minima przy* $a = 0$ *i przy* $a = n$:

$$\min \sigma^2_{B_N|a} = \sigma^2_{B_N|A_n=0} = \sigma^2_{B_N|A_n=n} = \frac{N(n+1)(n+N+2)}{(n+2)^2(n+3)}. \tag{5.24}$$

Gdy n *jest liczbą parzystą, maksimum występuje w* $a = \frac{1}{2}n$, *gdy zaś* n *jest liczbą nieparzystą, dwa jednakowe maksima znajdują się w* $a = \frac{1}{2}(n-1)$ *oraz w* $a = \frac{1}{2}(n+1)$:

$$\max \sigma^2_{B_N|a} = \begin{cases} \dfrac{N(n+N+2)}{4(n+3)} & (\textit{przy } a = \frac{1}{2}n), \\ \dfrac{N(n+1)(n+N+2)}{4(n+2)} & (\textit{przy } a = \frac{1}{2}(n-1),\ \frac{1}{2}(n+1)). \end{cases} \tag{5.25}$$

W przypadku $n = 1$, *wartości obu maksimów i obu minimów są, co widać ze wzorów* (5.24) *i* (5.25), *jednakowe*:

$$\max \sigma^2_{B_N|a} = \min \sigma^2_{B_N|a} = \sigma^2_{B_N|A_1=0} = \sigma^2_{B_N|A_1=1} = \frac{N(N+3)}{18}. \tag{5.26}$$

Sens twierdzenia 6 jest taki, że spośród $n+1$ zmiennych losowych warunkowych $B_N \mid a$ $(a = 0, 1, \ldots, n)$ zmienne losowe $B_N \mid A_n = 0$ i $B_N \mid A_n = n$ mają najmniejszą wariancję, daną wzorem (5.24), największą zaś wariancję ma zmienna losowa $B_N \mid A_n = \frac{1}{2}n$ (gdy n jest parzyste), bądź zmienne losowe $B_N \mid A_n = \frac{1}{2}(n-1)$ i $B_N \mid A_n = \frac{1}{2}(n+1)$ (gdy n jest nieparzyste) (wzory (5.25)). Gdy $n = 1$, to w klasie $(B_N \mid a)$ są tylko dwie zmienne losowe: $B_N \mid A_1 = 0$ oraz $B_N \mid A_1 = 1$ i obie te zmienne losowe mają jednakową wariancję daną wzorem (5.26).

(b) P ma rozkład beta (2.15). Przedstawmy wariancję warunkową (wzór (5.XVI)) w postaci

$$\sigma^2_{B_N|a} = \psi(n, N, s)(a+r+1)(n-a+s-r+1)$$

gdzie

$$\psi(n, N, s) = \frac{N(n+N+s+2)}{(n+s+2)^2(n+s+3)}.$$

Wynika stąd, po przeprowadzeniu dyskusji, następujące

TWIERDZENIE 7. *Minima i maksima wariancji warunkowej* $\sigma^2_{B_N|a}$, *określonej wzorem* (5.XVI)—*przypadek* (b)— *kształtują się w sposób następujący:*

Minima:

I. *Gdy* $r < \frac{1}{2}s$, *minimum występuje w* $a = 0$, *przy czym jest ono funkcją rosnącą* r.

II. *Gdy* $r = \frac{1}{2}s$, *dwa jednakowe minima występują w* $a = 0$ *i* $a = n$, *przy czym ich wartość jest większa niż w przypadku* I; *wtedy maksimum występuje w* $a = \frac{1}{2}n$, *gdy* n *jest parzyste, bądź występują dwa jednakowe maksima, w* $a = \frac{1}{2}(n-1)$ *i w* $a = \frac{1}{2}(n+1)$, *gdy* n *jest nieparzyste.*

III. *Gdy* $r > \frac{1}{2}s$, *minimum występuje w* $a = n$ (*mniejsze co do wartości niż w przypadku* II), *przy czym jest ono funkcją malejącą* r:

$$
(5.27)\qquad \min_a \sigma^2_{B_N|a} = \begin{cases} \dfrac{N(n+N+s+2)(r+1)(n+s-r+1)}{(n+s+2)^2(n+s+3)} \\ \qquad\qquad \text{przy } a = 0, \quad \text{jeśli} \quad r < \frac{1}{2}s, \\ \dfrac{N(n+N+s+2)(s+2)(2n+s+2)}{4(n+s+2)^2(n+s+3)} \\ \qquad\qquad \text{przy } a = 0, n, \quad \text{jeśli} \quad r = \frac{1}{2}s, \\ \dfrac{N(n+N+s+2)(n+r+1)(s-r+1)}{(n+s+2)^2(n+s+3)} \\ \qquad\qquad \text{przy } a = n, \quad \text{jeśli} \quad r > \frac{1}{2}s. \end{cases}
$$

Mamy zatem

$$
(5.28)\qquad \max_r \min_a \sigma^2_{B_N|a} = \frac{N(n+N+s+2)(s+2)(2n+s+2)}{4(n+s+2)^2(n+s+3)},
$$

tj. największą wartość ma minimum przy $a = 0, n$ (*gdy* $r = \frac{1}{2}s$).

Maksima:

I. *Gdy* $r \leqslant \frac{1}{2}(s-n)$, *maksimum występuje w* $a = n$, *przy czym jest ono funkcją rosnącą* r, *osiągającą największą wartość w* $r = (s-n)/2$.

II. *Gdy* $\frac{1}{2}(s-n) < r < \frac{1}{2}(s+n)$:

1° *Jeśli* $\frac{1}{2}(n+s-2r) = m = 1, 2, \ldots, n-1$, *to maksimum występuje w* $a = m$, *przy czym jest ono jednakowe dla wszystkich wartości* r *i równe największej wartości z przypadku* I;

2° *Jeśli* $\frac{1}{2}(n+s-2r) = \lambda$, *gdzie* λ *jest liczbą niecałkowitą, to maksimum występuje bądź w* $a = l$, *bądź w* $a = l+1$, *bądź też występują dwa jednakowe maksima w* $a = l$ *i przy* $a = l+1$, *gdzie* $l = 1, 2, \ldots, n-1$ *jest największą liczbą całkowitą mniejszą od* λ, *zależnie od następujących przypadków:*

1) *jeśli* $l = \lambda - \frac{1}{2}$, *to dwa jednakowe maksima zachodzą przy* $a = l$ *i przy* $a = l+1$, *przy czym wartość ich nie zależy od* r,

2) *jeśli* $l > \lambda - \frac{1}{2}$, *to maksimum zachodzi przy* $a = l$,

3) *jeśli* $l < \lambda - \frac{1}{2}$, *to maksimum zachodzi przy* $a = l+1$.

III. *Gdy* $r \geqslant \frac{1}{2}(s+n)$, *to maksimum zachodzi przy* $a = 0$, *przy czym jest ono funkcją malejącą* r, *a największa jego wartość zachodzi przy* $r = \frac{1}{2}(s+n)$ *i jest równa największej wartości maksimum z przypadku* I.

$$
(5.29)\qquad \max \sigma^2_{B_N|a} = \begin{cases}
\dfrac{N(n+N+s+2)(n+r+1)(s-r+1)}{(n+s+2)^2(n+s+3)} & \\
\qquad \textit{przy } a = n, \textit{ gdy } r < \frac{1}{2}(s-n), \\
\dfrac{N(n+N+s+2)}{4(n+s+3)} & \\
\qquad \textit{przy } a = n, \textit{ gdy } r = \frac{1}{2}(s-n), \\
\dfrac{N(n+N+s+2)}{4(n+s+3)} & \\
\qquad \textit{przy } a = m, \textit{ gdy } \frac{1}{2}(s-n) < r < \frac{1}{2}(s+n) \\
\qquad\qquad \textit{oraz } \frac{1}{2}(n+s-2r) = m, \\
\dfrac{N(n+N+s+2)(n+s+1)}{4(n+s+2)^2} & \\
\qquad \textit{przy } a = l, l+1, \textit{ gdy } \frac{1}{2}(s-n) < r < \frac{1}{2}(s+n) \\
\qquad\qquad \textit{oraz } \frac{1}{2}(n+s-2r) = \lambda \text{ i } l = \lambda - \frac{1}{2}, \\
\dfrac{N(n+N+s+2)(l+r+1)(n-l+s-r+1)}{(n+s+2)^2(n+s+3)} & \\
\qquad \textit{przy } a = l, \textit{ gdy } \frac{1}{2}(s-n) < r < \frac{1}{2}(s+r) \\
\qquad\qquad \textit{oraz } \frac{1}{2}(n+s-2r) = \lambda \text{ i } l > \lambda - \frac{1}{2}, \\
\dfrac{N(n+N+s+2)(l+r+2)(n-l+s-r)}{(n+s+2)^2(n+s+3)} & \\
\qquad \textit{przy } a = l+1, \textit{ gdy } \frac{1}{2}(s-n) < r < \frac{1}{2}(s+r) \\
\qquad\qquad \textit{oraz } \frac{1}{2}(n+s-2) = \lambda \text{ i } l < \lambda - \frac{1}{2}, \\
\dfrac{N(n+N+s+2)}{4(n+s+3)} & \\
\qquad \textit{przy } a = 0, \textit{ gdy } r = \frac{1}{2}(s+n), \\
\dfrac{N(n+N+s+2)(r+1)(n+s-r+1)}{(n+s+2)^2(n+s+3)} & \\
\qquad \textit{przy } a = 0, \textit{ gdy } r > \frac{1}{2}(s+n).
\end{cases}
$$

Mamy zatem

$$\max_r \max_a \sigma^2_{B_N|a} = \frac{N(n+N+s+2)}{4(n+s+3)}, \tag{5.30}$$

tj. największa wartość maksimum zachodzi bądź przy $a = n$ (*gdy* $r = \frac{1}{2}(s-n)$), *bądź przy* $a = m = 1, 2, \ldots, n-1$ (*gdy* $\frac{1}{2}(s-n) < r < \frac{1}{2}(s+n)$), *bądź przy* $a = 0$ (*gdy* $r = \frac{1}{2}(s+n)$).

c) Wariancja warunkowej wartości oczekiwanej $E(B_N \mid A_n)$. Korzystając ze wzoru (5.XII), wyrazimy tę warunkową wartość oczekiwaną jako funkcję zmiennej losowej A_n,

$$E(B_N \mid A_n) = NE(P \mid A_n),$$

skąd otrzymamy ogólny wzór na wariancję

$$\sigma^2_{E(B_N \mid A_n)} = N^2 \sigma^2_{E(P \mid A_n)}. \tag{5.31}$$

Obliczmy tę wariancję dla interesujących nas przypadków: (a) — gdy P ma rozkład prostokątny (2.14) oraz (b) — gdy P ma rozkład beta (2.15).

Ponieważ w przypadku (a) mamy

$$E(P \mid A_n) = \frac{A_n+1}{n+2},$$

a w przypadku (b)

$$E(P \mid A_n) = \frac{A_n+r+1}{n+s+2}$$

(por. wzory (5.20)), więc

$$\sigma^2_{E(P \mid A_n)} = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2_{A_n}}{(n+2)^2}, & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{\sigma^2_{A_n}}{(n+s+2)^2}. & \text{(b)} \end{cases} \tag{5.32}$$

Podstawiając wartości $\sigma^2_{A_n}$ z wzorów (5.XI), otrzymujemy

$$\sigma^2_{E(B_N \mid A_n)} = \begin{cases} \dfrac{nN^2}{12(n+2)}, & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{nN^2(r+1)(s-r+1)}{(s+2)^2(s+3)(n+s+2)}. & \text{(b)} \end{cases} \tag{5.XVII}$$

Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE 8. *Wariancja warunkowej wartości oczekiwanej* $E(B_N \mid A_n)$ *wyraża się w przypadku ogólnym wzorem* (5.31), *a w przypadkach szczególnych*: (a) — *gdy* P *ma rozkład prostokątny* (2.14) *oraz* (b) — *gdy* P *ma rozkład beta* (2.15) — *wzorami* (5.XVII).

d) Wartość oczekiwana wariancji warunkowej $\sigma^2_{B_N|A_n}$. Powyższą wartość oczekiwaną obliczymy na podstawie znanej zależności jako różnicę dwu wielkości już obliczonych,

$$E(\sigma^2_{B_N|A_n}) = \sigma^2_{B_N} - \sigma^2_{E(B_N|A_n)}, \tag{5.33}$$

gdzie odjemna jest wyrażona wzorem (5.IX), a odjemnik wzorem (5.31).

Dla interesujących nas przypadków szczególnych (a) — gdy P ma rozkład prostokątny (2.14), oraz (b) — gdy P ma rozkład beta (2.15), otrzymujemy, po podstawieniu (5.XI) i (5.XVII),

$$E(\sigma^2_{B_N|A_n}) = \begin{cases} \dfrac{N(n+N+2)}{6(n+2)}, & \text{(a)} \\ \dfrac{N(n+N+s+2)(r+1)(s-r+1)}{(s+2)(s+3)(n+s+2)}. & \text{(b)} \end{cases} \tag{5.XVIII}$$

Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE 9. *Wartość oczekiwana wariancji warunkowej* $\sigma^2_{B_N|A_n}$ *wyraża się w przypadku ogólnym wzorem* (5.33), *w którym odjemna jest dana wzorem* (5.IX) *a odjemnik wzorem* (5.31), *w przypadkach zaś szczególnych* (a) — *gdy* P *ma rozkład prostokątny* (2.14) *oraz* (b) — *gdy* P *ma rozkład beta* (2.15) — *wzorami* (5.XVIII).

e) Udział składników wariancji $\sigma^2_{B_N}$. Zbadajmy udział składników w sumie $\sigma^2_{B_N}$ według relacji (5.33) przy stałym n oraz $N \to \infty$. Mamy dla interesujących nas przypadków szczególnych (a) i (b)

$$\frac{E(\sigma^2_{B_N|A_n})}{\sigma^2_{B_N}} = \begin{cases} \dfrac{2(n+N+2)}{(n+2)(N+2)} \to \dfrac{2}{n+2}, & \text{(a)} \\ \dfrac{(s+2)(n+N+s+2)}{(n+s+2)(N+s+2)} \to \dfrac{s+2}{n+s+2}; & \text{(b)} \end{cases}$$

(5.XIX)

$$\frac{\sigma^2_{E(B_N|A_n)}}{\sigma^2_{B_N}} = \begin{cases} \dfrac{nN}{(n+2)(N+2)} \to \dfrac{n}{n+2}, & \text{(a)} \\ \dfrac{nN}{(n+s+2)(N+s+2)} \to \dfrac{n}{n+s+2}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE 10. *Gdy przy stałym* n *liczba doświadczeń* $N \to \infty$, *wówczas w obu przypadkach szczególnych,* (a) — *gdy* P *ma rozkład prostokątny* (2.14) *oraz* (b) — *gdy* P *ma rozkład beta* (2.15), *wszystkie trzy wielkości*: 1) *wariancja zmiennej losowej* B_N, 2) *wariancja warunkowej wartości oczekiwanej* $E(B_N \mid A_n)$ *oraz* 3) *wartość oczekiwana wariancji warunkowej* $\sigma^2_{B_N|A_n}$ *rosną nieograniczenie* (*dokładniej*: *są rzędu* $O(N^2)$); *stosunki* *wielkości* 2) *do wielkości* 1) *i wielkości* 3) *do wielkości* 1) *wyrażają wzory* (5.XIX).

6. Kowariancja i współczynnik korelacji zmiennych losowych A_n **i** B_N. Z definicji kowariancji mamy

$$\text{(6.1)} \qquad \operatorname{Cov}(A_n, B_N) = E\{[A_n - E(A_n)][B_N - E(B_N)]\},$$

co łatwo doprowadza się do dogodniejszej w użyciu postaci

$$\text{(6.2)} \qquad \operatorname{Cov}(A_n, B_N) = E(A_nB_N) - E(A_n)E(B_N).$$

Czynniki odjemnika są już obliczone, trzeba więc jeszcze obliczyć drugi moment mieszany, jakim jest odjemna. W tym celu skorzystamy ze znanej relacji

$$\text{(6.3)} \qquad E(A_nB_N) = E[E(A_nB_N \mid P)].$$

Zmienne losowe warunkowe $A_n \mid P$ i $B_N \mid P$ są niezależne przy każdej możliwej wartości P, a więc

$$E(A_nB_N \mid P) = E(A_n \mid P)E(B_N \mid P),$$

i wzór (6.3) przyjmuje postać

$$\text{(6.4)} \qquad E(A_nB_N) = E[E(A_n \mid P)E(B_N \mid P)].$$

Ponieważ, na podstawie (5.2), $E(A_n \mid P) = nP$, $E(B_N \mid P) = NP$, więc

$$\text{(6.5)} \qquad E(A_nB_N) = nNE(P^2).$$

Stąd, korzystając z (5.VII) otrzymujemy ogólny wzór na kowariancję zmiennych losowych A_n i B_N:

$$\text{(6.XX)} \qquad \operatorname{Cov}(A_n, B_N) = nN[E(P^2) - E^2(P)] = nN\sigma_P^2.$$

Współczynnik korelacji zmiennych losowych A_n i B_N wyraża się, zgodnie z definicją, wzorem ogólnym, tj. wzorem

$$\text{(6.XXI)} \quad \varrho_{A_nB_N} = \frac{\operatorname{Cov}(A_n, B_N)}{\sigma_{A_n}\sigma_{B_N}} = \frac{nN\sigma_P^2}{\sigma_{A_n}\sigma_{B_N}} =$$

$$= \sqrt{\frac{nN}{\left[n-1+\dfrac{E(P)E(Q)}{\sigma_P^2}\right]\left[N-1+\dfrac{E(P)E(Q)}{\sigma_P^2}\right]}},$$

$$\varrho_{A_nB_N} = \varrho_{A_1B_1}\sqrt{\frac{n}{1+(n-1)\varrho_{A_1B_1}}}\sqrt{\frac{N}{1+(N-1)\varrho_{A_1B_1}}},$$

gdzie $E(Q) = 1 - E(P)$ a $\varrho_{A_1B_1} = \sigma_P^2/E(P)E(Q)$ jest współczynnikiem korelacji zmiennych losowych A_1 i B_1.

Obliczmy teraz drugi moment mieszany, kowariancję i współczynnik korelacji dla interesujących nas przypadków szczególnych: (a) — gdy P ma rozkład prostokątny (2.14) oraz (b) — gdy P ma rozkład beta (2.15).

Korzystając z wzoru (5.10), otrzymujemy na podstawie (6.5)

$$(6.6)\qquad E(A_n B_N) = \begin{cases} \dfrac{nN}{3}, & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{nN(r+1)(r+2)}{(s+2)(s+3)}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Korzystając z (5.11), otrzymujemy na podstawie (6.XX)

$$(6.\mathrm{XXII})\qquad \operatorname{Cov}(A_n, B_N) = \begin{cases} \dfrac{nN}{12}, & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{nN(r+1)(s-r+1)}{(s+2)^2(s+3)}. & \text{(b)} \end{cases}$$

I wreszcie, korzystając ze wzorów (5.XII) otrzymujemy na podstawie (6.XXI)

$$(6.\mathrm{XXIII})\qquad \varrho_{A_n B_N} = \begin{cases} \dfrac{nN}{(n+2)(N+2)}, & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{nN}{(n+s+2)(N+s+2)}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE 11. 1° *Kowariancja zmiennych losowych* A_n *i* B_N *wyraża się w przypadku ogólnym wzorem* (6.XXI), *a w przypadkach szczególnych*: (a) — *gdy* P *ma rozkład prostokątny* (2.14) *oraz* (b) — *gdy* P *ma rozkład beta* (2.15) — *wzorami* (6.XXII), *przy czym w przypadku ogólnym jest ona proporcjonalna zarówno do* n, *jak i do* N *ze współczynnikiem proporcjonalności* σ_P^2, *a więc w przypadku* (a) $1/12$, *natomiast w przypadku* (b) $(r+1)(s-r+1)/(s+2)^2(s+3)$.

2° *Współczynnik korelacji tych zmiennych losowych wyraża się w ogólnym przypadku wzorem* (6.XXI), *a w przypadkach szczególnych* (a) *i* (b) — *wzorami* (6.XXIII).

Wyprowadzimy stąd wnioski: Gdy przy stałym n liczba doświadczeń N rośnie nieograniczenie, współczynnik korelacji zmiennych losowych A_n i B_N dąży do $\sqrt{n/(n+2)}$ w przypadku (a), a do $\sqrt{n/(n+s+2)}$ w przypadku (b), a więc w przypadku (a) dla n rzędu kilkudziesięciu, a w przypadku (b) dla n dużych w porównaniu z s jest on, praktycznie biorąc, nieznacznie mniejszy od 1. Gdy jednocześnie n i N rosną nieograniczenie, otrzymujemy w obu przypadkach

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ N\to\infty}} \varrho_{A_n B_N} = 1.$$

7. **Możliwości zastosowań praktycznych.** Wytwarzanie pewnych partii towaru może nieraz zależeć od pewnego ustawienia technicznego trwającego bez zmiany przez czas wytwarzania danej partii, a dokonywanego na nowo dla następnej partii. Jeśli tak jest, to wadliwość p partii jest realizacją zmiennej losowej P, której forma rozkładu i parametry mogą być oszacowane na podstawie długotrwałej obserwacji procesu produkcyjnego. Może się np. okazać, że rozkład liczby sztuk niedobrych, w n-sztukowych próbkach, pobranych z jakiejkolwiek partii bieżącej, nie będzie rozkładem dwumianowym, lecz omawianym w pracy niniejszej rozkładem zmiennej losowej A_n. Wprawdzie dwumianowym będzie rozkład warunkowy $A_n \mid P = p$, tj. dla próbek z tych partii, w których wadliwość jest stale p, ale partii tych umiejscowić nie możemy, ponieważ wartości p pozostają nieznane. Dlatego wydaje się, że statystyczną kontrolę jakości racjonalniej jest przeprowadzić, korzystając z rozkładu bezwarunkowego zmiennej losowej A_n, będącego modelem teoretycznym dla wyników z faktycznie pobieranych próbek na całej rozciągłości procesu produkcyjnego, niż z warunkowych rozkładów dwumianowych $A_n \mid P = p$, będących modelami dla wyników z pomyślanych, ale faktycznie nie przeprowadzanych powtórzeń prób z tych samych wyizolowanych partii (lub dla wyników z prób faktycznie wprawdzie przeprowadzanych z różnych partii, ale nie wiadomo z jakich). Ograniczenie się do rozkładów warunkowych $A_n \mid P = p$, w których wartości p, pozostając niewiadomymi, nie są związane żadnym prawem stochastycznym, nie wykorzystuje informacji, jaką daje to prawo, które odzwierciedla przecież pewne właściwości procesu technologicznego.

Statystyczną kontrolę jakości można pojmować jako ciąg zabiegów, w którym wyniki bieżące mogą być wykorzystywane dla oceny wyników następnych. Tak na przykład realizacja zmiennej losowej A_n, służąca do oceny partii bieżącej, może stać się jednocześnie informacją pomocną przy ocenie następnej partii. Stąd też zmienne losowe $B_N \mid A_n = a$ mogą również znaleźć zastosowanie praktyczne w statystycznej kontroli jakości prowadzonej w warunkach określonego procesu technologicznego.

Prace cytowane

[1] A. C. Aitken, *Statistical mathematics*, Edinburgh and London 1957.

[2] Е. Б. Дынкин, *Классы эквивалентных случайных величин*, УМН, т. VIII, 2 (54) (1953), str. 125-130.

[3] R. A. Fisher, *Statistical methods and scientific inference*, London 1959.

[4] W. Krysicki, *Twierdzenie graniczne o wyrazach wyższego rzędu w zagadnieniu Bayesa*, Prace Mat. 1 (1955), str. 93-112.

[5] — *O połączonym zagadnieniu Bayesa i Bernoulliego*, Zastosow. Mat. 2 (1956), str. 172-178.

[6] J. Oderfeld, *Statystyczny odbiór towarów klasycznych według alternatywy*, Studia i prace statystyczne, 2 (1950), str. 100-104.

[7] M. Olekiewicz, *Statystyka jako metoda poznawcza*, Zeszyty problemowe Kosmosu 2 (1956), str. 112.

Praca wpłynęła 22. 7. 1962

В. КРИСИЦКИ (Лодзъ) и М. ОЛЕКЕВИЧ (Люблин)

ОБ ОБОБЩЕННОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ПРОБЛЕМ БЭЙЕСА И БЕГНУЛЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается тройка случайных переменных X, Y, Z, таких, что условные случайные переменные $X \mid z$ и $y \mid z$ независимы при всяком z. Выводятся некоторые свойства условных распределений, связанные с этими тройками случайных переменных.

Рассматривая объединенную проблему Бернулли и Бэйеса, вместо случайной переменной Z берем случайную переменную P непреривного типа, принимающую величину p из открытого интервала $(0, 1)$, а вместо условных случайных переменных $X \mid z$ и $Y \mid z$ берем биномиальные случайные переменные $A_n \mid p$ и $B_N \mid p$, принимающие соответственно величины $\alpha = 0, 1, \ldots, n$ и $\beta = 0, 1, \ldots, N$. Объединённая проблема Бернулли и Бэйеса связана с проблемой Лексиса, так как случайные переменные A_n и B_N, имеющие соответственно ожидания $nE(P)$ и $NE(P)$ и сверхнормальные дисперсии $nE(P)E(Q)+n(n-1)\sigma_P^2$ и $NE(P)E(Q)+N(N-1)\sigma_P^2$, определены согласно урновой схеме Лексиса.

Рассматриваются два частных случая распределения случайной переменной P:

a) прямоугольное распределение при $f(p) = 1$ в $(0, 1)$,

b) β-распределение при $f(p) = \dfrac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)}\, p^r q^{s-r}$.

Особое внимание уделяется условным случайным переменным $B_N \mid \alpha$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, n$). Обсуждаются их распределения в двух частных случаях a) и b) и выводятся некоторые асимптотические свойства. Одно интересное асимптотическое свойство распространяется на общий случай: предельная величина $p(\beta \mid \alpha)$ (при n и α фиксированных) оказывается равной ее оценке по принципу максимального правдоподобия. Даются и обсуждаются условные ожидаемые величины $E(B_N \mid \alpha)$ и условные дисперсии $\sigma^2_{B_N|\alpha}$ для общего случая и для частных случаев a) и b).

Даются и обсуждаются формулы для дисперсии $\sigma^2_{E(B_N|A_n)}$ ожидаемой величины $E(B_N \mid A_n)$ (рассматриваемой как случайная переменная, принимающая величины $\sigma^2_{B_N|\alpha}$, с учетом частных случаев a) и b)).

Наконец, даются формулы для смешанных вторых моментов и коэффициенты корреляции случайных переменных A_n и B_N для общего случая и для частных случаев a) и b).

Кажется, что представленные результаты могут найти применение в статистическом контроле качества.

W. KRYSICKI (Łódź) and M. OLEKIEWICZ (Lublin)

ON THE GENERALIZED JOINT PROBLEM OF BAYES AND BERNOULLI

SUMMARY

Triads of random variable (r. v.) X, Y, Z are considered, such that r.v. $X \mid z$ and $Y \mid z$ are independent for each value of z. Certain properties of conditional distributions in such triads are deduced.

Considering the joint problem of Bernoulli and Bayes, for Z a r. v. P of continuous type is taken, assuming values p from the open interval $(0, 1)$, while for $X \mid z$ and $Y \mid z$ binomial r. v.'s $A_n \mid p$ and $B_N \mid p$ are taken assuming values $a = 0, 1, \ldots, n$ and $\beta = 0, 1, \ldots, N$, respectively. The problem is linked with the problem of Lexis, inasmuch as r. v. 's A_n and B_N are of Lexian type, with expectations $nE(P)$ and $NE(P)$, and with supernormal (Lexian) variances $nE(P)E(Q)+n(n-1)\sigma_P^2$ and $NE(P)E(Q)$ $+N(N-1)\sigma_P^2$ (where $Q = 1-P$) respectively.

Two special cases of distributions of r. v. P are given consideration:

a) rectangular with $f(p) = 1$ in $(0, 1)$,

b) beta with $f(p) = \dfrac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s-r+1)} p^r q^{s-r}$.

The conditional r. v.'s $B_N \mid a$ $(a = 0, 1, \ldots, n)$ are given particular attention. Their distributions $p(\beta \mid a)$ $(\beta = 0, 1, \ldots, N)$ are discussed for the two special cases a) and b) and certain assymptotic properties are drawn. An interesting assymptotic property is extended to the general case: the limit value of $p(\beta \mid a)$ (with n and a held constant) is found to be equal to its maximum likelihood estimate. Conditional expectations $E(B_N \mid a)$ and conditional variances $\sigma^2_{B_N} \mid a$ are given and discussed for the general case and for the two special cases.

Formulas for the variance $\sigma^2_{E(B_N|A_n)}$ of conditional expectation $E(B_N \mid A_n)$ (considered as a r. v. assuming values $E(B_N \mid a)$) and for the expectation $E(\sigma^2_{B_N|A_n})$ of conditional variance $\sigma^2_{B_N|A_n}$ (considered as r. v. assuming values $\sigma^2_{B_N|a}$) are given and discussed both for the general case and for the two special cases a) and b).

Eventually the covariance of r. v.'s A_n, B_N and their coefficient of correlation are given and discussed for the general case and for the two special cases a) and b).

It is hoped that these results may prove useful in the statistical quality control.
