ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII, 4 (1966)

R. ZUBER (Wrocław)

O PEWNYM ALGORYTMIE ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH PIERWSZEGO RZĘDU (I)

Wstęp. W niniejszej pracy będziemy się zajmować metodami umożliwiającymi otrzymywanie przybliżonych rozwiązań zagadnienia początkowego

$$\text{(i)} \qquad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

w postaci wyrażeń analitycznych, przybliżających rozwiązanie dokładne. Są to metody podobne do powszechnie znanej metody Picarda [7], [8], [10] lub metod Czapłygina [1], [2], [5], [6], opartych na pewnym twierdzeniu o tzw. nierównościach różniczkowych [9].

Metody Czapłygina umożliwiają konstruowanie tzw. górnych oraz dolnych przybliżeń rozwiązania zagadnienia początkowego (i).

Przybliżeniem górnym rozwiązania zagadnienia początkowego (i) nazywamy każdą funkcję $u(x)$ spełniającą warunki

$$u(x_0) = y_0, \quad u(x) \geqslant y(x) \quad \text{dla} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+a,$$

natomiast *przybliżeniem dolnym* nazywać będziemy każdą funkcję $v(x)$ spełniającą warunki

$$v(x_0) = y_0, \quad v(x) \leqslant y(x) \quad \text{dla} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+a,$$

gdzie $y(x)$ jest dokładnym rozwiązaniem zagadnienia początkowego (i).

Jedna z metod Czapłygina, tzw. metoda stycznych, polega na zastąpieniu zagadnienia początkowego (i) ciągiem zagadnień początkowych

$$\text{(ii)} \qquad y'_{n+1} = f'_y(x, y_n)(y_{n+1}-y_n)+f(x, y_n), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0.$$

Jeżeli odpowiednio ustalić funkcję $y_0(x)$, to z ciągu równań różniczkowych (ii) można uzyskać w sposób rekurencyjny ciąg kolejnych przybliżeń $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_2(x), \ldots$, monotonicznie zbieżnych do rozwiązania zagadnienia początkowego (i). Łuzin [3], [4] wykazał, że ciąg funkcji $\{y(x)-U_n(x)\}$, gdzie $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem przybliżeń uzyskiwanych metodą stycznych Czapłygina, dąży do zera tak szybko, jak ciąg liczbowy $\{C\cdot 2^{-2^n}\}$.

Drugą znaną metodą Czapłygina jest tzw. metoda siecznych, która również polega na zastąpieniu zagadnienia początkowego (i) pewnym ciągiem liniowych równań różniczkowych.

W niniejszej pracy omówiony jest pewien ogólny algorytm, nazwany algorytmem Z, który umożliwia znajdowanie ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania zagadnienia początkowego (i), zbieżnego do rozwiązania w pewnym otoczeniu punktu x_0. Podana jest konstrukcja oraz dowód zbieżności tego algorytmu. Pokazane jest również, że algorytm Z zawiera, jako szczególne przypadki, metodę kolejnych przybliżeń Picarda oraz obie metody Czapłygina.

W przygotowaniu jest druga część pracy, gdzie podana jest konstrukcja pewnych szybko zbieżnych metod przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, będących szczególnymi przypadkami algorytmu Z. Są to mianowicie: metoda stycznych rzędu s oraz metoda interpolacyjna zbudowana na s krzywych węzłowych, przy czym s jest dowolną liczbą naturalną.

Należy dodać, że wiele omawianych w niniejszej pracy zagadnień można uogólnić na układy równań różniczkowych zwyczajnych.

1. O zbieżności pewnego ciągu funkcyjnego. Niech funkcje $f(x, y)$ oraz $F_n(x, y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, będą określone i ciągłe w prostokącie R danym nierównościami

$$|x-x_0| < a, \qquad |y-y_0| < b. \tag{1.1}$$

Zakładamy, że funkcje te spełniają jednakowy warunek Lipschitza

$$\begin{aligned} |f(x, y)-f(x, \bar{y})| &\leqslant L|y-\bar{y}|, \\ |F_n(x, y)-F_n(x, \bar{y})| &\leqslant L|y-\bar{y}|, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie L jest pewną stałą dodatnią, natomiast (x, y) oraz $(x, \bar{y})$ są punktami prostokąta R.

Niech teraz funkcje $y_{n+1}(x)$, o wykresach należących do prostokąta R, spełniają odpowiednio równania różniczkowe

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}) \tag{1.3}$$

dla $|x-x_0| < a$ oraz warunki początkowe

$$y_{n+1}(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Załóżmy jeszcze, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_x \big|F_n\big(x, y_n(x)\big)-f\big(x, y_n(x)\big)\big| < +\infty. \tag{1.5}$$

Przy tych założeniach udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Ciąg funkcji $y_n(x)$ jest w pewnym otoczeniu punktu x_0 jednostajnie zbieżny do funkcji $y(x)$, spełniającej równanie różniczkowe*

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

i warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

Dla dowodu wprowadzimy oznaczenie

$$\delta_n(x) = F_n(x, y_n) - f(x, y_n). \tag{i}$$

Z równania (1.3) otrzymamy

$$y'_{n+1} = f(x, y_n) + F_n(x, y_{n+1}) - F_n(x, y_n) + \delta_n(x). \tag{ii}$$

Odejmując kolejne równości i całkując, otrzymamy, przy uwzględnieniu warunków początkowych, następujące równości:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) - y_n(x) &= \\ &= \int_{x_0}^{x} [f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})]\,dt + \int_{x_0}^{x} [F_n(t, y_{n+1}) - F_n(t, y_n)]\,dt - \\ &\quad - \int_{x_0}^{x} [F_{n-1}(t, y_n) - F_{n-1}(t, y_{n-1})]\,dt + \int_{x_0}^{x} [\delta_n(t) - \delta_{n-1}(t)]\,dt. \end{aligned} \tag{iii}$$

W dalszym ciągu ograniczymy zmienność x do wystarczająco małego przedziału $|x - x_0| < h$, co najmniej takiego, aby $hL < 1$, i wprowadzimy oznaczenia:

$$\varrho_{n+1} = \sup_{|x - x_0| < h} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|, \qquad \varepsilon_n = \sup_{|x - x_0| < h} |\delta_n(x)|.$$

Wykorzystując warunki (1.2), z równości (iii) otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\varrho_{n+1} \leqslant 2hL\varrho_n + hL\varrho_{n+1} + h(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})$$

lub też

$$\varrho_{n+1} \leqslant \frac{2hL}{1 - hL}\varrho_n + \frac{h}{1 - hL}(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}).$$

Za pomocą tej nierówności łatwo dowieść, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n$ ma majorantę postaci

$$\left[\varrho_0 + \frac{h}{1 - hL}\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})\right]\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2hL}{1 - hL}\right)^n.$$

Na mocy założenia (1.5) majoranta ta jest zbieżna, jeśli tylko $2hL/(1 - hL) < 1$, co prowadzi do warunku

$$hL < 1/3. \tag{1.7}$$

Przy spełnieniu tego warunku wynika stąd zbieżność szeregu funkcyjnego

$$y_0(x)+[y_1(x)-y_0(x)]+[y_2(x)-y_1(x)]+\dots$$

jednostajnie w przedziale $|x-x_0|<h$, gdzie h jest określone warunkiem (1.7).

A zatem ciąg funkcji $y_n(x)$ jest w tym przedziale jednostajnie zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $y(x)$.

Jeżeli scałkujemy równość (ii), otrzymamy

$$\text{(iv)}\qquad y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_n)\,dt+\int_{x_0}^{x}[F_n(t,y_{n+1})-F_n(t,y_n)]\,dt+\int_{x_0}^{x}\delta_n(t)\,dt.$$

Przechodząc w tej równości do granicy dla $n\to\infty$, otrzymamy dla poszczególnych jej składników

$$|F_n(x,y_{n+1})|-F_n(x,y_n)|\leqslant L|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\rightrightarrows 0$$

dla $|x-x_0|<h$, $hL<1/3$, a także dla $\delta_n(x)\rightrightarrows 0$ w tym samym przedziale. Wobec tego z (iv) dostajemy

$$\text{(v)}\qquad y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(t,y(t)\big)\,dt,$$

skąd już bezpośrednio wynika teza twierdzenia.

Uwaga. Twierdzenie 1 można bez trudności uogólnić na przypadek układu równań różniczkowych postaci

$$y_i'=f_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\qquad i=1,2,3,\dots,n.$$

2. Konstrukcja algorytmu Z. Twierdzenie 1 daje praktyczną możliwość konstruowania ciągu kolejnych przybliżeń zbieżnego do rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\text{(2.1)}\qquad y'=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0,$$

a tym samym zbudowania takiej funkcji $y_p(x)$, która w pewnym otoczeniu punktu x_0 spełnia nierówność

$$\text{(2.2)}\qquad \big|y_p'(x)-f\big(x,y_p(x)\big)\big|<\varepsilon$$

dla dowolnie ustalonego ε. Funkcję $y_p(x)$, spełniającą nierówność (2.2), będziemy nazywać *ε-przybliżeniem* rozwiązania zagadnienia początkowego (2.1).

W celu otrzymania ε-przybliżenia rozwiązania zagadnienia początkowego (2.1) zbudujmy ciąg funkcji

$$\text{(2.3)}\qquad y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,$$

ciągłych w otoczeniu punktu x_0, według następującego algorytmu.

Jako zerowy wyraz ciągu (2.3) przyjmiemy pewną funkcję $y_0(x)$, ciągłą w otoczeniu punktu x_0, o wykresie należącym do prostokąta R, a ponadto spełniającą warunek $y(x_0) = y_0$.

Następnie konstruujemy funkcję dwu zmiennych $F_0(x, y)$, ciągłą ze względu na obie zmienne w prostokącie R oraz taką, aby

$$F_0\big(x, y_0(x)\big) \equiv f\big(x, y_0(x)\big).$$

Rozwiązując teraz zagadnienie początkowe

$$y_1' = F_0(x, y_1), \quad y_1(x_0) = y_0,$$

otrzymujemy następny wyraz ciągu (2.3)

Następnie konstruujemy funkcję dwu zmiennych $F_1(x, y)$, ciągłą ze względu na obie zmienne w prostokącie R i taką, aby

$$F_1\big(x, y_1(x)\big) \equiv f\big(x, y_1(x)\big),$$

oraz rozwiązujemy zagadnienie początkowe

$$y_2' = F_1(x, y_2), \quad y_2(x_0) = y_0,$$

którego rozwiązanie przyjmujemy jako kolejny wyraz ciągu (2.3).

Ogólnie, przy założeniu, że skonstruowaliśmy już funkcję $y_n(x)$ w ciągu (2.3), budujemy kolejny jego wyraz w następujący sposób:

1° konstruujemy funkcję dwu zmiennych $F_n(x, y)$, ciągłą ze względu na obie zmienne w prostokącie R oraz taką, aby

$$F_n\big(x, y_n(x)\big) \equiv f\big(x, y_n(x)\big), \tag{2.4}$$

2° rozwiązujemy zagadnienie początkowe

$$y_{n+1}' = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0, \tag{2.5}$$

skąd znajdujemy funkcję $y_{n+1}(x)$.

Omówiony tu algorytm budowania ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania zadania początkowego (2.1) będziemy nazywali *algorytmem Z*.

Szybkość zbieżności algorytmu Z jest uzależniona od wyboru ciągu funkcji dwu zmiennych

$$F_0(x, y), \quad F_1(x, y), \quad F_2(x, y), \ldots \tag{2.6}$$

oraz funkcji $y_0(x)$ — zerowego przybliżenia ciągu (2.3). Algorytm Z może być zrealizowany oczywiście tylko wtedy, gdy ciąg funkcji (2.6) jest tak dobrany, że zagadnienia początkowe (2.5) dają się rozwiązać przez kwadratury.

Określenie 1. Ciąg funkcji dwu zmiennych (2.6) będziemy nazywali *ciągiem określającym algorytm* lub krótko *ciągiem określającym*, jeżeli:

1° spełnia on założenia twierdzenia 1,

2° jest tak dobrany, że zadania początkowe (2.5) dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ daje się rozwiązać przez kwadratury.

Zauważmy, że w przypadku gdy spełniony jest warunek (2.4), otrzymamy następujące oszacowanie dla ϱ_n:

$$\varrho_n \leqslant \left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^n \varrho_0.$$

3. Przykład algorytmu Z. Rozpatrzmy ciąg funkcji dwu zmiennych

$$F_n(x, y) = d_n(x)\big(y-y_n(x)\big)+f\big(x, y_n(x)\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

gdzie $\{d_n(x)\}$ oznacza pewien ciąg funkcji jednej zmiennej x.

Udowodnimy następujące

TWIERDZENIE 2. *Zakładamy, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła ze względu na obie zmienne oraz spełnia warunek Lipschitza ze względu na zmienną y w prostokącie R, określonym nierównościami* (1.1). *Ponadto zakładamy, że funkcje $d_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, należą do klasy C w przedziale $|x-x_0| < a$ oraz są w tym przedziale wspólnie ograniczone. Przy tych założeniach ciąg funkcji* (3.1) *jest ciągiem określającym algorytm.*

Dowód. Funkcje ciągu (3.1) są liniowe ze względu na zmienną y, skąd wnioskujemy od razu, że ciąg zagadnień początkowych (2.5) daje się rozwiązać przez kwadratury. Pokażemy również, że funkcje ciągu (3.1) spełniają założenia twierdzenia 1. Ciągłość funkcji $F_n(x, y)$ wynika z założenia twierdzenia oraz postaci ciągu funkcji (3.1). Funkcja $f(x, y)$ z założenia spełnia warunek Lipschitza, skąd wynika istnienie takiej stałej dodatniej L_1, że nierówność

$$|f(x, y)-f(x, \bar{y})| \leqslant L_1|y-\bar{y}| \tag{i}$$

jest spełniona dla dowolnych punktów (x, y) oraz $(x, \bar{y})$ z obszaru R. Wprowadzając oznaczenie

$$L_2 = \sup_{\langle x, n\rangle} |d_n(x)|$$

dla x z przedziału $|x-x_0| < a$ oraz $n = 0, 1, 2, \ldots$ (istnienie L_2 wynika z założenia), otrzymamy z (3.1)

$$|F_n(x, y)-F_n(x, \bar{y})| = |d_n(x)||y-\bar{y}| \leqslant L_2|y-\bar{y}|. \tag{ii}$$

Z (i) oraz (ii) wnioskujemy, że funkcje $f(x, y)$ oraz $F_n(x, y)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ spełniają jednakowo warunek Lipschitza (1.2), jeśli przyjąć

$$L = \max(L_1, L_2).$$

Na koniec zauważmy, że

$$F_n(x, y_n)-f(x, y_n) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

skąd oczywiście wynika spełnienie warunku (1.5). W ten sposób wykazaliśmy, że ciąg (3.1) jest ciągiem określającym algorytm.

Zauważmy jeszcze, że algorytm Z, wyznaczony przez ciąg funkcji określających (3.1), daje się zapisać za pomocą wzoru

$$y_{n+1}(x) = e^{r_n(x)}\Big\{y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-r_n(x)}\big[f\big(x, y_n(x)\big) - y_n(x)d_n(x)\big]dx\Big\},$$

gdzie

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} d_n(x)dx,$$

który w sposób rekurencyjny określa ciąg kolejnych przybliżeń, jeżeli tylko określić funkcję $y_0(x)$.

Uwaga. Z powyższego wzoru rekurencyjnego otrzymamy znaną metodę Picarda, jeśli podstawimy $d_n(x) \equiv 0$.

4. Metoda Czapłygina jako szczególny przypadek algorytmu Z. Jedną z najszybciej zbieżnych metod, umożliwiających budowanie ε-przybliżeń rozwiązania zagadnienia początkowego (2.1), jest znana metoda Czapłygina. Istnieją dwie modyfikacje tej metody: metoda stycznych oraz metoda siecznych. Pokażemy, że każda z tych metod jest szczególnym przypadkiem omówionego wyżej algorytmu Z.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli $f(x, y)$ oraz $f'_y(x, y)$ są ciągłe w prostokącie R, określonym nierównościami* (1.1), *to istnieje taki algorytm Z, który jest identyczny z metodą stycznych Czapłygina.*

Dowód. Dla wyznaczenia algorytmu Z przyjmiemy ciąg funkcji określających postaci (3.1), w którym odpowiednio wybierzemy ciąg funkcji $\{d_n(x)\}$. Przyjmiemy mianowicie

$$d_n(x) \equiv f'_y\big(x, y_n(x)\big), \tag{i}$$

czyli

$$F_n(x, y) \equiv f'_y\big(x, y_n(x)\big)\big(y - y_n(x)\big) + f\big(x, y_n(x)\big). \tag{4.1}$$

Pokażemy przede wszystkim, że ciąg funkcji (4.1) jest ciągiem określającym algorytm. W tym celu wystarczy pokazać, że ciąg funkcji $d_n(x)$, określony równością (i), jest wspólnie ograniczony oraz że funkcja $f(x, y)$ spełnia warunek Lipschitza. Założenie wspólnej ograniczoności wyrazów ciągu $d_n(x)$ nie podlega dyskusji, gdyż w tym przypadku ciąg ten sprowadza się do jednej funkcji. Z założenia ciągłości pochodnej cząstkowej $f'_y(x, y)$ w prostokącie R wynika istnienie takiej stałej dodatniej L, że

$$|f'_y(x, y)| \leqslant L \quad \text{dla} \quad x, y \in R.$$

Natomiast z ograniczoności pochodnej cząstkowej $f'_y(x, y)$ wynika warunek

Lipschitza dla funkcji $f(x, y)$. Rzeczywiście, na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej możemy napisać

$$f(x, \bar{y})-f(x, y) = (\bar{y}-y)f'_y\big(x, \bar{y}+\theta(\bar{y}-y)\big), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Stąd oraz z ograniczoności pochodnej cząstkowej $f'_y(x, y)$ wynika natychmiast warunek Lipschitza

$$|f(x, y)-f(x, \bar{y})| \leqslant L|y-\bar{y}|.$$

Zatem ciąg funkcji (4.1) spełnia założenia twierdzenia 2, a tym samym jest ciągiem określającym algorytm.

Realizacja omówionego tu algorytmu polega na rozwiązaniu następującego ciągu zadań początkowych:

$$y'_{n+1} = f'_y(x, y_n)(y_{n+1}-y_n)+f(x, y_n), \qquad y_{n+1}(x_0) = y_0.$$

Jeżeli podstawimy

$$y_{n+1} = y_n+r_n, \tag{4.2}$$

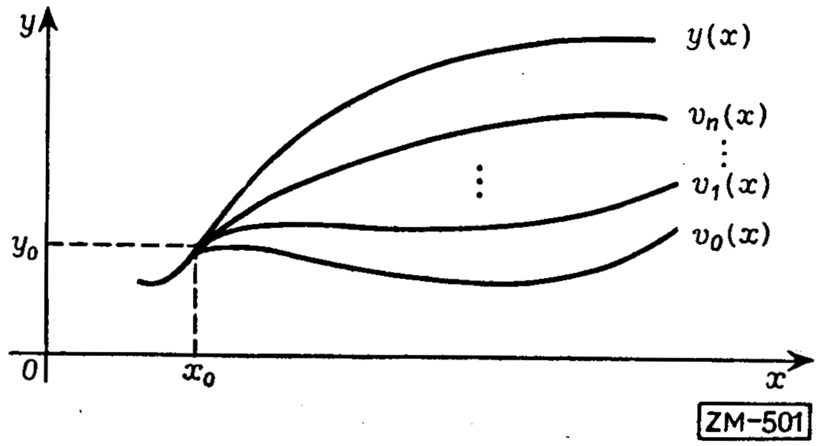
to ten ciąg równań różniczkowych przyjmie postać

$$r'_n = f'_y(x, y_n)r_n+f(x, y_n)-y'_n, \qquad r_n(x_0) = 0. \tag{4.3}$$

Wzory (4.2) oraz (4.3) są identyczne ze wzorami, jakie otrzymuje się w metodzie stycznych Czapłygina.

Uwaga. Metoda stycznych Czapłygina wyznacza, przy założeniu stałości znaku drugiej pochodnej cząstkowej $f''_{yy}(x, y)$ w obszarze R, ciąg kolejnych przybliżeń monotonicznie zbieżny do rozwiązania zagadnienia początkowego (2.1).

Rozpatrzmy przypadek, kiedy $f''_{yy}(x, y) \geqslant 0$ (co oczywiście nie narusza ogólności rozważań). W tym przypadku metoda stycznych wyznacza ciąg kolejnych przybliżeń $v_n(x)$, dolnych w pewnym otoczeniu punktu x_0, tzn. takich, że $v_n(x) \leqslant y(x)$ oraz $v_n(x_0) = y_0$ dla $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$, gdzie $y(x)$ — dokładne rozwiązanie zadania początkowego, h — odpowiednio mała liczba.



ZM-501

Czapłygin podał również metodę umożliwiającą budowanie ciągu funkcji $u_n(x)$, górnych w pewnym otoczeniu punktu x_0, tzn. takich, że $u_n(x) \geqslant y(x)$ oraz $u_n(x_0) = y_0$ dla $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$. Metoda ta została nazwana metodą siecznych Czapłygina. Wykorzystuje ona w każdym kroku iteracyjnym dwa przybliżenia: dolne $v_n(x)$, uzyskane w poprzednim kroku iteracyjnym metodą stycznych, oraz górne $u_n(x)$, uzyskane w poprzednim kroku iteracyjnym metodą siecznych, i wyznacza nowe przybliżenie górne $u_{n+1}(x)$ takie, że $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$.

Zauważmy, że metoda siecznych Czapłygina nie jest metodą „samodzielną". Jest ona ściśle związana z metodą stycznych.

Należy jeszcze dodać, że założenie stałości znaku drugiej pochodnej cząstkowej $f''_{yy}(x, y)$ w istotny sposób wykorzystuje się w klasycznym dowodzie zbieżności obu metod Czapłygina.

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $f'_y(x, y)$ spełniają założenia twierdzenia 3, to istnieje taki algorytm Z, który jest identyczny z metodą Czapłygina siecznych.*

Dowód. Algorytm Z będzie identyczny z metodą siecznych Czapłygina, jeżeli przyjmiemy

$$(4.4)\qquad d_n(x) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \dfrac{f(x, u_n)-f(x, v_n)}{u_n-v_n} & \text{dla każdego } x, \text{ dla którego } u_n(x) \neq v_n(x), \\ f'_y(x, u_n) & \text{dla każdego } x, \text{ dla którego } u_n(x) = v_n(x), \end{cases}$$

czyli

$$(4.5)\qquad F_n(x, y) \equiv \frac{f(x, u_n)-f(x, v_n)}{u_n-v_n}(y-u_n)+f(x, u_n),$$

gdzie funkcje $u_n(x)$ oraz $v_n(x)$ — dwa przybliżenia rozwiązania zagadnienia początkowego (2.1) uzyskane w poprzednich krokach iteracyjnych. Funkcje $u_n(x)$ oraz $v_n(x)$ mogą być górnym i dolnym przybliżeniem, uzyskane odpowiednio metodą siecznych i stycznych w poprzednim kroku iteracyjnym, mogą to być również dwa przybliżenia uzyskane w dwóch ostatnich krokach iteracyjnych metodą siecznych. Należy przede wszystkim wykazać, że ciąg funkcji, określony wzorem (4.5), jest ciągiem określającym algorytm. W tym celu należy podobnie jak w twierdzeniu 3, udowodnić, że funkcja $f(x, y)$ spełnia warunek Lipschitza oraz że ciąg funkcji $\{d_n(x)\}$, określony wzorem (4.4), jest wspólnie ograniczony w przedziale $|x-x_0| < a$. Spełnienie warunku Lipschitza przez funkcję $f(x, y)$, przy podanych założeniach, było wykazane w twierdzeniu 3. Zajmiemy się więc wykazaniem, że ciąg funkcji $\{d_n(x)\}$ jest wspólnie ograniczony. Rozpatrzmy wpierw zbiór tych x-ów należących do przedziału $|x-x_0| < a$, dla których $u_n(x) = v_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Z definicji wynika, że dla tych x-ów

$$|d_n(x)| = |f'_y(x, u_n(x))| \leqslant \sup_{x \in R} |f'_y(x, y)| = L_1.$$

Weźmy teraz pod uwagę zbiór tych x-ów, dla których $u_n(x) \neq v_n(x)$. Korzystając z warunków Lipschitza, otrzymamy

$$|d_n(x)| = \left| \frac{f(x, u_n) - f(x, v_n)}{u_n - v_u} \right| = \frac{L_2 |u_n - v_n|}{|u_n - v_n|} = L_2.$$

Zatem

$$|d_n(x)| \leqslant L \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < a,$$

gdzie $L = \max(L_1, L_2)$. W ten sposób wykazaliśmy, że spełnione są założenia twierdzenia 2, a zatem ciąg funkcji $F_n(x, y)$, określony wzorem (4.5), jest ciągiem określającym algorytm.

Realizacja omówionego tu algorytmu polega na rozwiązaniu następującego ciągu równań:

$$v'_{n+1} = \frac{f(x, u_n) - f(x, v_n)}{u_n - v_n} (v_{n+1} - u_n) + f(x, u_n), \qquad v_{n+1}(x_0) = y_0.$$

Ten sam ciąg równań uzyskuje się w metodzie siecznych Czapłygina.

5. Trójargumentowa funkcja określająca algorytm. Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona i ciągła w prostokącie R danym nierównościami

(5.1) $$|x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b.$$

Ponadto niech funkcja $F(x, y, z)$ będzie określona i ciągła w obszarze S danym nierównościami

(5.2) $$|x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b, \qquad |z - z_0| < c.$$

Zakładamy, że funkcja $F(x, y, z)$ spełnia warunek Lipschitza

(5.3) $$|F(x, y, z) - F(x, \bar{y}, \bar{z})| \leqslant L(|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|),$$

gdzie L jest pewną stałą dodatnią, natomiast (x, y, z) oraz $(x, \bar{y}, \bar{z})$ są punktami obszaru S. Niech dalej funkcje $y_{n+1}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o wykresach należących do prostokąta R, spełniają równania różniczkowe

(5.4) $$y'_{n+1} = F(x, y_{n+1}, y_n)$$

dla $|x - x_0| < a$ oraz warunki początkowe

(5.5) $$y_{n+1}(x_0) = y_0.$$

Na koniec załóżmy, że ciąg

(5.6) $$\delta_n(x) \equiv F(x, y_n(x), y_n(x)) - f(x, y_n(x))$$

jest jednostajnie zbieżny do zera dla n dążącego do nieskończoności i $|x-x_0| < a$.

Przy tych założeniach udowodnimy

TWIERDZENIE 5. *Ciąg funkcji $y_n(x)$ jest w pewnym otoczeniu punktu x_0 jednostajnie zbieżny do funkcji $y(x)$, spełniającej równanie różniczkowe*

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \tag{5.7}$$

oraz warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

Dowód. Najpierw udowodnimy jednostajną zbieżność ciągu funkcji $y_n(x)$ w pewnym otoczeniu punktu x_0. Odejmując stronami kolejne dwie równości (5.4) oraz całkując, przy uwzględnieniu warunków początkowych otrzymamy

$$y_{n+1}(x)-y_n(x) = \int_{x_0}^{x} [F(x, y_{n+1}, y_n)-F(x, y_n, y_{n-1})]dx. \tag{i}$$

W dalszym ciągu ograniczymy zmienność x do wystarczająco małego przedziału $|x-x_0|< h$, co najmniej takiego, aby $hL<1$, oraz wprowadzimy oznaczenia:

$$\varrho_{n+1} = \sup_{|x-x_0|<h} |y_{n+1}(x)-y_n(x)|.$$

Wykorzystując warunki (5.3), dostaniemy z równości (i) następujące oszacowanie:

$$\varrho_{n+1} \leqslant hL\varrho_{n+1}+hL\varrho_n$$

lub także

$$\varrho_{n+1} \leqslant \frac{hL}{1-hL}\varrho_n. \tag{ii}$$

Rozpatrzmy szereg funkcyjny

$$y_0(x)+[y_1(x)-y_0(x)]+[y_2(x)-y_1(x)]+ \cdots \tag{iii}$$

Z oszacowania (ii) wynika, że szereg ten ma majorantę postaci

$$\varrho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{hL}{1-hL}\right)^n,$$

która jest zbieżna, jeśli tylko $hL/(1-hL) < 1$, co prowadzi do warunku

$$hL < 1/2. \tag{5.8}$$

Przy spełnieniu tego warunku szereg (iii) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $|x-x_0| < h$, gdzie h jest określone warunkiem (5.8), a tym samym ciąg funkcji $y_n(x)$ jest w tym przedziale jednostajnie zbieżny. Oznaczmy granicę tego ciągu przez $y(x)$.

Udowodnimy teraz, że funkcja $y(x)$ spełnia równanie różniczkowe (5.7) oraz warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.
Z równań (5.4) oraz (5.6) otrzymamy tożsamości

$$y'_{n+1} = f(x, y_n) + F(x, y_{n+1}, y_n) - F(x, y_n, y_n) + \delta_n(x)$$

lub też po obustronnym scałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych (5.5)

$$\text{(iv)} \qquad y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n)\,dt + \\ + \int_{x_0}^{x} [F(t, y_{n+1}, y_n) - F(t, y_n, y_n)]\,dt + \int_{x_0}^{x} \delta_n(t)\,dt.$$

Przechodząc w równości (iv) do granicy przy $n \to \infty$ i uwzględniając warunki (5.3) oraz założenia dotyczące ciągu (5.6), otrzymamy dla poszczególnych składników

$$|F(x, y_{n+1}, y_n) - F(x, y_n, y_n)| \leqslant L|y_{n+1} - y_n| \rightrightarrows 0$$

dla $|x - x_0| < h$, $hL < 1$, a także $\delta_n(x) \rightrightarrows 0$ w tym samym przedziale. Wobec tego z (iv) dostaniemy

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

skąd już bezpośrednio wynika teza twierdzenia.

Prace cytowane

[1] С. А. Чаплыгин, *Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений*, Труды ЦАГИ, вып. 130, 1932.

[2] П. П. Логинов, *Метод Чаплыгина в доказательстве теоремы существования*, w zbiorze Исслед. по матем. анализу и механике в Узбекистане, Ташкент 1960, str. 203-213.

[3] Н. Н. Лузин, *О методе приближённого интегрирования Академика С. А. Чаплыгина*, Труды ЦАГИ, вып. 141, 1932.

[4] Н. Н. Лузин, *О методе приближённого интегрирования Академика С. А. Чаплыгина*, Успехи матем. наук 6 (1951), str. 3-27.

[5] Б. Н. Бабкин, *К теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах*, Матем. сборник 46 (1958), str. 389-398.

[6] Б. А. Верштейн, *О скорости сходимости приближений в методе Академика С. А. Чаплыгина и в модификациах этого метода*, Науч. труды Молотовского Горн. Ин-та, вып. 1, 1956.

[7] W. A. J. Luxemburg, *On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations*, Canad. Math. Bull. 1 (1958), str. 9-20.

[8] O. Kooi, *The method of successive approximations and a uniqueness-theorem of Krasnosielskij and Krein in the theory of differential equations*, Indag. Math. 20 (1958), str. 322-327.

[9] И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, 3, Москва 1959.

[10] E. A. Coddington i N. Levinson, *Theory of differential equations*, New York 1955.

Praca wpłynęła 4. 3. 1965

Р. ЗУБЕР (Вроцлав)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА (I)

РЕЗЮМЕ

Предметом настоящей работы является алгоритм Z, который даёт возможность построения последовательных приближений

(i) $$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$$

решения начальной задачи

(ii) $$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Последовательные приближения (i) определены рекуррентно следующим образом. Имея функцию $y_n(x)$, строим функцию двух переменных $F_n(x, y)$ такую, чтобы

$$F_n(x, y_n(x)) \equiv f(x, y_n(x)).$$

Далее, решая начальную задачу

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0$$

получаем следующее приближение $y_{n+1}(x)$. Функцию $y_0(x)$ в последовательности (i) принимаем произвольно. Следующая теорема указывает на сходимость последовательности (i) к решению дифференциального уравнения (ii).

Последовательность (i) сходится в некоторой окрестности точки x_0 равномерно к решению начальной задачи (ii) (теорема 1), если выполнены следующие условия:

(a) Функции $f(x, y)$ и $F_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определены и непрерывны в прямоугольнике R, заданном (1.1);

(b) Эти функции выполняют условия Липшица (1.2);

(c) Графики фуикций $y_n(x)$ лежат в прямоугольнике R и для $|x-x_0| < a$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.3) с начальными условиями (1.4);

(d) Существует конечное супре́мум (1.5).

Наконец показано, что известный метод Пикара последовательных приближений, а также методы касательных и секущих Чаплыгина, являются частными случаями алгоритма Z.
