

C. PLATT (Olsztyn)

*O ROZKŁADZIE PŁCI W MIOTACH TRZODY CHLEWNEJ  
I O MODELACH PROBABILISTYCZNYCH Z NIM ZWIĄZANYCH*

**§ 1. Wstęp.** Zgodnie z genetyczną teorią dziedziczności płęć ssaków zdeterminowana jest przez dwa chromosomy. Samice mają oba te chromosomy jednakowe  $XX$ , samce mają różne chromosomy płciowe  $XY$ . Ponieważ matka przekazuje każdemu potomkowi chromosom  $X$ , więc płęć potomka zależy od chromosomu przekazanego przez ojca. Plemniki męskie powstają przez podział komórek. Przy każdym podziale powstaje para plemników; jeden z chromosomem  $X$ , drugi z chromosomem  $Y$ . Plemniki obu tych rodzajów produkowane są więc w równych ilościach. Zazwyczaj przyjmuje się, że każdy z tych plemników ma jednakowe szanse zapłodnienia jaja, przeto prawdopodobieństwo zygoty męskiej jest takie samo jak i prawdopodobieństwo zygoty żeńskiej. Różnica między obserwowanymi częstościami urodzin samców i samic może być wyjaśniona innymi przyczynami, np. selekcją w okresie ciąży. W opisanym modelu dziedziczności płci należałoby oczekiwać, że rozkład płci wielojajowego rodzeństwa odpowiada schematowi Bernoulliego.

Celem niniejszej pracy jest statystyczna weryfikacja hipotezy, że płęć prosiąt z jednego miotu odpowiada schematowi Bernoulliego. Jako hipotezy alternatywne rozważa się także schematy Poissona, Lexissa lub Coolidge'a. Szczegółowe omówienie teoretyczne tych schematów można znaleźć w pracach [1] (str. 53, 54) i [8].

Będziemy więc porównywali następujące hipotezy.

Hipoteza  $H_1$ : Schemat Bernoulliego. Według tej hipotezy prawdopodobieństwo  $p$ , że urodzone prosię jest samcem, jest stałe dla wszystkich prosiąt i nie zależy od miotu. Wariancja empiryczna  $s_n^2$  liczby knurków w miotach o licznosci  $n$  jest w tym przypadku normalna, to znaczy równa wariancji rozkładu binomialnego o parametrach  $n$  i  $p$

$$(1) \quad s_n^2 = npq, \quad \text{gdzie} \quad q = 1-p.$$

Hipoteza  $H_2$ : Schemat Poissona. Według tego schematu prawdopodobieństwo, że w miocie o licznosci  $n$  urodzone prosię jest samcem,

zależy od numeru  $i$  prosięcia w danym miocie, ale nie zmienia się między miotami. Wariancja liczby knurków w miotach o liczności  $n$  jest podnormalna

$$(2) \quad s_n^2 = np_n q_n - nV_n,$$

gdzie  $p_n = 1 - q_n$  jest średnią wartością prawdopodobieństw w jednym miocie a  $V_n$  ich wariancją.

Hipoteza  $H_3$ : Schemat Lexissa. Według tego schematu prawdopodobieństwo, że prosię z miotu o liczności  $n$  jest samcem, jest stałe dla wszystkich prosiąt tego samego miotu, a zmienia się tylko od miotu do miotu. Wariancja liczby knurków w miotach o liczności  $n$  jest nadnormalna

$$(3) \quad s_n^2 = np_n q_n + n(n-1)W_n,$$

gdzie  $p_n = 1 - q_n$  jest średnią wartością prawdopodobieństw w populacji wszystkich miotów o liczności  $n$  a  $W_n$  wariancją tych prawdopodobieństw.

Hipoteza  $H_4$ : Schemat Coolidge'a. Według tego schematu prawdopodobieństwo, że urodzone prosię jest samcem, zmienia się wewnątrz miotu i między miotami. Wariancja liczby knurków w miotach o liczności  $n$  jest równa

$$(4) \quad s_n^2 = np_n q_n + n(n-1)W_n - nV_n,$$

gdzie  $p_n = 1 - q_n$  jest średnią wartością prawdopodobieństw knurka (dla wszystkich prosiąt w populacji miotów o liczności  $n$ ),  $V_n$  jest średnią (w populacji wszystkich miotów o liczności  $n$ ) wariancją prawdopodobieństwa wewnątrz miotu;  $W_n$  jest wariancją (w populacji wszystkich miotów o liczności  $n$ ) średnich prawdopodobieństw (dla  $n$  prosiąt jednego miotu).

Jeżeli w przypadku hipotezy  $H_4$  założymy dodatkowo, że  $p_n$ ,  $V_n$  i  $W_n$  nie zależą od  $n$ , wówczas wariancja  $s_n^2$  może być podnormalna dla małych wartości  $n$  a nadnormalna dla miotów licznych. Zmienność między miotami może występować, gdy w rozpatrywanej populacji miotów występują np. różnice ras lub wieku macior i knurów (patrz [3] i [9]). Nadnormalność wariancji może być również spowodowana występowaniem bliźniąt jednojajowych ([2], [4], [5]). Bliźnięta jednojajowe u świń występują jednak bardzo rzadko (patrz [7]) i w dalszych rozważaniach nie będziemy ich brali w rachubę.

W środowisku wrocławskim z inicjatywy prof. H. Steinhausa prowadzone były pod kierunkiem prof. J. Perkala badania sekwencji płci kurcząt (patrz [6]). Profesor Perkal zasugerował mi również zbadanie przypadkowości płci u ssaków wielopłodnych. Wyniki takiego badania są przedmiotem niniejszej pracy.

Pragnę podziękować Panu Profesorowi J. Perkalowi za serdeczną pomoc w opracowywaniu zagadnienia, oraz Panu Docentowi J. Łukaszewiczowi za pomoc w redagowaniu pracy. Składam również podziękowanie za cenne uwagi uczestnikom wrocławskiego seminarium z zastosowań matematyki, gdzie referowałem niniejszą pracę. Ponadto dziękuję Panom Profesorom W. Krautforstowi i J. Szweminowi za ułatwienia w uzyskaniu materiału będącego podstawą tej pracy.

**§ 2. Opis materiału.** Materiał, na którym jest oparta praca, został wydobyty z rejestrów trzody chlewnej w zakładach doświadczalnych Instytutu Zootechnicznego: Pawłowice, Czechnica, Ciałkowo, Mełno, Kołuda Wielka oraz w Zakładzie Weterynarii Trzęsacz. Dotyczy on trzody rasy Wielka Biała Polska. Mioty macior tej rasy cechuje szczególnie duża liczebność, co jest w moich badaniach szczególnie cenne. Razem udało mi się zebrać informacje o 2296 miotach o liczebnościach od 1 do 21. Modalną liczbą prosiąt w miocie jest 10, medianą zaś 11.

**§ 3. Rozkład liczby knurków w zredukowanych miotach sześciostukowych.** Ze względu na duże zróżnicowanie liczebności miotów wybrałem najpierw z każdego miotu o liczebności co najmniej 6, próbkę złożoną z sześciu prosiąt, posługując się metodą losowania bez zwracania. Traktowałem przy tym oddzielnie materiały pochodzące z zakładów: Mełno, Pawłowice, Kołuda Wielka, Ciałkowo powtarzając dwukrotnie losowanie dla zakładów Mełno i Pawłowice.

Uzyskane wyniki dla sześciu populacji podaje w tablicy I. Obok średnich  $\bar{x}$  i wariancji empirycznych  $s_6^2$  liczby knurków w zredukowanym miocie są w niej również podane wariancje teoretyczne  $6\bar{p}\bar{q}$  ( $\bar{p} = 1 - \bar{q} = \bar{x}/6$ ).

TABLICA I

Porównanie wariancyj liczby knurków w zredukowanych miotach sześciostukowych z wariancjami teoretycznymi

	Liczba zredukowanych miotów	$\bar{x}$	$s_6^2$	$6\bar{p}\bar{q}$	$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$
Mełno	252	3,11	1,18	1,50	2,77
Mełno losowanie powtórzone	252	3,32	1,36	1,48	1,05
Pawłowice	449	3,04	1,48	1,50	0,20
Pawłowice losowanie powtórzone	449	3,16	1,41	1,50	0,88
Kołuda	238	3,05	1,45	1,50	0,35
Ciałkowo	312	3,01	1,35	1,50	1,25

Dla porównania wariancji empirycznych  $s_6^2$  z wariancjami rozkładu binomialnego  $\sigma^2 = 6\bar{p}\bar{q}$  obliczyłem wartości statystyki  $t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$ , gdzie  $\chi^2 = (n-1)s_6^2/\sigma^2$  a  $n$  jest liczbą zredukowanych miotów w populacji. Statystyka  $t$  ma rozkład asymptotycznie normalny  $N(0, 1)$ . Z tablic rozkładu normalnego odczytujemy wartość 1,96 odpowiadającą poziomowi istotności  $\alpha = 0,05$ . Przyjmuję, że wariancja empiryczna  $s_6^2$  różni się istotnie od wariancji teoretycznej  $\sigma^2$  jeśli  $|t| > 1,96$ .

Okazuje się, że dla wszystkich sześciu populacji wariancja liczby knurków w zredukowanym miocie jest mniejsza od normalnej, w tym dla jednej istotnie mniejsza. Świadczy to o małej wiarygodności hipotez  $H_1$  i  $H_3$ . Wobec tego odrzucamy te dwie hipotezy. Pozostałe do rozstrzygnięcia hipotezy  $H_2$  i  $H_4$  omówię w dalszej części pracy.

**§ 4. Rozkład liczby knurków w pełnych miotach.** Dla zbadania rozkładu liczby knurków w pełnych miotach cały materiał podzieliłem według liczności miotów. Przedstawia to tablica II. Wiersze tej tablicy przedstawiają empiryczne rozkłady liczby knurków w miotach o równej liczności. Obliczając wariancje liczby knurków wziąłem pod uwagę tylko te wiersze, w których liczba wszystkich miotów jest nie mniejsza niż  $3(n+1)$ , gdzie  $n$  jest licznością miotu. Do takich należą wiersze odpowiadające miotom o licznościach od 3 do 16 włącznie. Okazało się, że chociaż wariancje empiryczne  $s_n^2$  nie różnią się istotnie od wariancji teoretycznych  $\sigma_n^2 = npq$ , to jednak zaobserwowane odchylenia wykazują pewną prawidłowość: dla miotów o licznościach  $n \leq 12$  wariancje empiryczne są podnormalne, dla miotów o licznościach  $n > 12$  są nadnormalne. Niewątpliwie nie wolno przeoczyć tego zjawiska. Przemawia ono bowiem przeciw hipotezie  $H_2$  o schemacie Poissona czyli za hipotezą  $H_4$  o schemacie Coolidge'a. Przyjmując schemat Coolidge'a i zakładając dodatkowo, że wariancje  $V_n$  i  $W_n$  nie zależą od liczności miotu  $n$ , metodą najmniejszych kwadratów uzyskuje estymacje  $V = 0,0833$ ,  $W = 0,0071$ . Podstawiając te wartości do (4) uzyskuje wzór na wariancje teoretyczne

$$(4') \quad \overline{\sigma_n^2} = npq + 0,0071n(n-1) - 0,0833n,$$

gdzie  $p$  jest równe frakcji knurków w całym materiale, czyli  $p = 13053/25614 = 0,5096$ , a  $q = 1 - p = 0,4904$ .

Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres krzywej, której równanie wyraża się wzorem (4'). Punkty odpowiadają wariancjom empirycznym, a prosta przerywana ilustruje przebieg wariancji teoretycznych w schemacie Bernoulliego  $\sigma_n^2 = npq$ . Jako estymator średniego kwadratu odchyleni wariancji empirycznych  $s_n^2$  od teoretycznych  $\sigma_n^2 = npq$  przyjmujemy wielkość

$$\frac{1}{r-1} \sum_n (s_n^2 - \sigma_n^2)^2 = 0,0993.$$

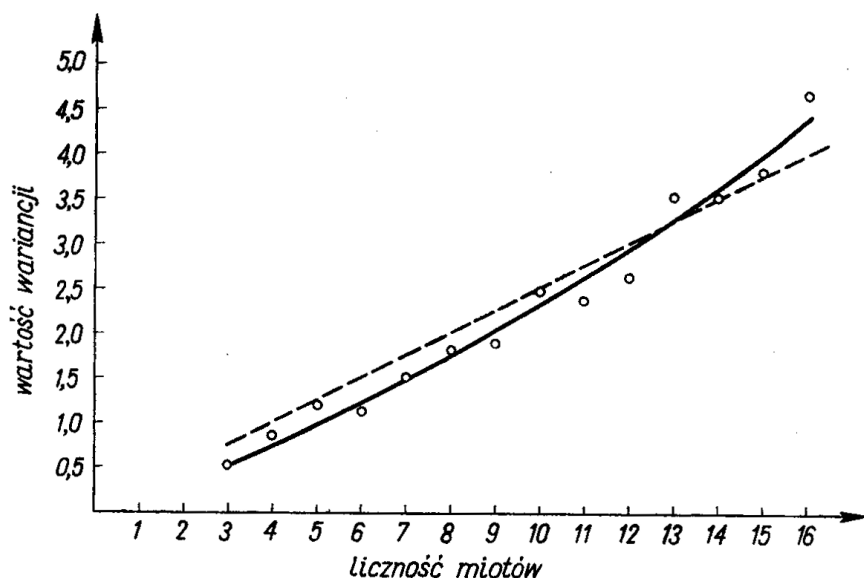
TABLICA II

Liczność miotów	Liczba knurków w miocie																					Liczba knurków w grupie	Liczba prosiąt w grupie	Frakcje knurków w grupie	Wariancje empiryczne	Wariancje teoretyczne		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20						21	
1	1																					1	0	1				
2	2	3	2																			7	7	14				
3		4	6	2																		12	22	36	0,61	0,52	0,75	
4		5	9	5	2																	21	46	84	0,55	0,86	0,99	
5	1	4	15	10	3	2																35	86	175	0,49	1,20	1,25	
6		3	13	21	17	1	2															57	177	342	0,52	1,13	1,50	
7		2	6	19	20	9	4	1														61	227	427	0,53	1,50	1,74	
8		4	12	35	45	43	20	5	1													165	691	1320	0,52	1,81	1,99	
9	1	3	7	36	50	73	28	9	2	2												211	955	1899	0,50	1,89	2,25	
10		2	9	49	71	91	70	44	19	3	2											360	1833	3600	0,51	2,48	2,49	
11			3	23	41	77	93	57	30	9	4											337	1942	3707	0,52	2,38	2,74	
12			2	12	24	66	87	64	45	27	7	1										335	2120	4020	0,53	2,66	2,99	
13			3	9	22	34	50	48	34	22	11	2	1									236	1541	3068	0,50	3,53	3,25	
14			2	7	22	25	48	45	32	22	11	2	1									217	1439	3038	0,47	3,49	3,49	
15					4	4	20	21	21	12	11	5	3	1								102	794	1530	0,52	3,77	3,74	
16				1	3	6	6	9	10	11	12	3	3									64	512	1024	0,50	4,66	4,00	
17						1	3	6	12	7	6	4	1									40	340	680				
18							3	1	5	5	4		4	1								23	211	414				
19							1		2	3		1										7	60	133				
20									1				1	1								3	33	60				
21										1												2	17	42				
Razem																						2296	13053	25614				

Jako analogiczny estymator dla wariancji teoretycznych (4') przyjmujemy wielkość

$$\frac{1}{r-3} \sum_n (s_n^2 - \bar{\sigma}_n^2)^2 = 0,0440.$$

W obu tych wzorach  $n$  przebiega wartości od 3 do 16 a  $r = 14$  jest ilością uwzględnianych licznosci miotów.



ZM-495

Rys. 1

Z porównania obu tych estymatorów widzimy, że wariancje empiryczne są o wiele bardziej zbliżone do wartości wyliczonych ze wzoru (4') niż ze wzoru  $\sigma_n^2 = npq$ , co też przemawia bardziej za hipotezą  $H_4$ , a przeciw hipotezie  $H_1$ .

**§ 5. Letalność płci a podnormalność wariancji.** Uzyskane wyniki dające prawo przypuszczać, że rozkład płci w miotach trzody chlewnej odpowiada schematowi Coolidge'a, a w szczególności, że istnieje zmienność prawdopodobieństw płci wewnątrz miotów, wymagają teoretycznego uzasadnienia. Chodzi o skonstruowanie takiego modelu probabilistycznego, który opierając się na empirycznie stwierdzonych faktach, mógłby tłumaczyć zauważone prawidłowości statystyczne. Takim faktem stwierdzonym sekcynnie jest zjawisko umierania embrionów przed urodzeniem ([7]).

Oznaczam przez  $p$  prawdopodobieństwo tego, że jajo jest zapłodnione plemnikiem z chromosomem  $Y$ , a przez  $q = 1-p$ , prawdopodobieństwo zapłodnienia plemnikiem z chromosomem  $X$ . Przez  $n$  oznaczam liczbę wszystkich urodzonych prosiąt w miocie, a przez  $k$  liczbę knurków w mio-

cie. Przez  $u$  oznaczam liczbę embrionów męskich, a przez  $x$  liczbę embrionów żeńskich zmarłych przed urodzeniem. Przez  $m$  oznaczam prawdopodobieństwo śmierci embrionu męskiego, a przez  $f$  — embrionu żeńskiego. Prawdopodobieństwo, że wśród  $n+u+x$  zapłodnionych jaj  $k+u$  jest zapłodnionych plemnikiem  $Y$ , wyraża się wzorem Bernoulliego:

$$P_{(n+u+x)}^{(k+u)} = \binom{n+u+x}{k+u} p^{k+u} q^{n-k+x}.$$

Oznaczmy przez  $Q(n, k)$  prawdopodobieństwo zdarzenia  $(n, k)$  polegającego na tym, że miot ma  $n$  prosiąt, a wśród nich  $k$  knurków. Zdarzenie  $(n, k)$  może zrealizować się na wiele różnych sposobów. Możemy bowiem zaobserwować to zdarzenie w wyniku zapłodnienia dowolnej liczby  $N \geq n$  jaj, przy czym  $N-n = u+x$  płodów umrze przed urodzeniem. Oznaczmy przez  $h(N)$  prawdopodobieństwo zapłodnienia  $N = n+u+x$  jaj. Wyrażenie  $\binom{k+u}{u} m^u (1-m)^k$  jest warunkowym prawdopodobieństwem tego, że z zapłodnionych  $k+u$  męskich embrionów  $u$  umrze; podobnie  $\binom{n-k+x}{x} f^x (1-f)^{n-k}$  jest warunkowym prawdopodobieństwem śmierci  $x$  spośród  $n-k+x$  żeńskich embrionów. Iloczyn

$$P_{(n+u+x)}^{(k+u)} \binom{k+u}{u} m^u (1-m)^k \binom{n-k+x}{x} f^x (1-f)^{n-k} h(n+u+x)$$

jest więc prawdopodobieństwem zdarzenia  $(n, k)$  przy równoczesnej śmierci  $u$  embrionów męskich i  $x$  żeńskich. Suma takich iloczynów dla  $u = 0, 1, 2, \dots$  oraz  $x = 0, 1, 2, \dots$  daje prawdopodobieństwo zdarzenia  $(n, k)$ :

$$(5) \quad Q(n, k) = \sum_{u,x} P_{(n+u+x)}^{(k+u)} \binom{k+u}{u} m^u (1-m)^k \binom{n-k+x}{x} f^x (1-f)^{n-k} h(n+u+x).$$

Przekształcając prawą stronę wzoru (5) można go sprowadzić do postaci:

$$(6) \quad Q(n, k) = \binom{n}{k} [p(1-m)]^k [q(1-f)]^{n-k} \sum_{u,x} \frac{\prod_{i=1}^{u+x} (n+i)}{u!x!} p^u q^x m^u f^x h(n+u+x),$$

gdzie iloczyn  $\prod_{i=1}^{u+x} (n+i)$  dla  $u+x = 0$  należy zastąpić liczbą 1.

Oznaczmy przez  $Q_1(n) = \sum_{k=0}^n Q(n, k)$  prawdopodobieństwo tego, że miot ma  $n$  prosiąt. Sumując po  $k$  prawą stronę wzoru (6) otrzymujemy

$$(7) \quad Q_1(n) = [p(1-m) + q(1-f)]^n \sum_{u,x} \frac{\prod_{i=1}^{u+x} (n+i)}{u!x!} p^u q^x m^u f^x h(n+u+x).$$

Oznaczmy przez  $Q(k|n)$  prawdopodobieństwo warunkowe  $k$  knurków w miocie o liczności  $n$ :

$$(8) \quad Q(k|n) = \frac{Q(n, k)}{Q_1(n)}.$$

Podstawiając (6) i (7) do (8) i przyjmując, że przy  $N \geq 1$   $h(N) > 0$  otrzymujemy

$$(9) \quad Q(k|n) = \frac{\binom{n}{k} [p(1-m)]^k [q(1-f)]^{n-k}}{[p(1-m) + q(1-f)]^n}.$$

Wyrażenie (9) przedstawia warunkowy rozkład liczby knurków w miotach o liczności  $n$ . Średnia i wariancja tego rozkładu wyrażają się wzorami

$$E(k|n) = np \frac{1-m}{p(1-m) + q(1-f)},$$

$$D^2(k|n) = npq \frac{(1-m)(1-f)}{[p(1-m) + q(1-f)]^2}.$$

Skonstruowany tu model matematyczny nie prowadzi do rozkładu o wariancji podnormalnej. Rozkład (9) ilości knurków w miotach o liczności  $n$  jest bowiem rozkładem Bernoulliego o prawdopodobieństwie urodzenia knurka

$$(10) \quad \frac{p(1-m)}{p(1-m) + q(1-f)}$$

niezależnym od rozkładu liczby zapłodnionych jaj. Prawdopodobieństwo (10) można otrzymać ze wzoru Bayesa;  $p$  i  $q$  są prawdopodobieństwami *a priori* (prawdopodobieństwa powstania embrionu męskiego i żeńskiego) a  $1-m$  i  $1-f$  warunkowymi prawdopodobieństwami przeżycia ciąży.

Do założeń, na których oparty został skonstruowany model matematyczny, należy między innymi założenie, że śmiertelność embrionów jest stała dla wszystkich embrionów. Przyjmijmy obecnie, że prawdopodobieństwo śmierci embrionu przed urodzeniem zależy od jego położenia w macicy. Wówczas dla różnych embrionów prawdopodobieństwa przeżycia ciąży będą na ogół różne. Ponumerujemy embriony według nierosnących szans przeżycia ciąży. Prawdopodobieństwo warunkowe śmierci embrionu o numerze  $i$ , jeśli jest on embrionem męskim, oznaczam przez  $m_i$ , a jeśli jest on embrionem żeńskim przez  $f_i$ . Przez  $p$  oznaczam prawdopodobieństwo powstania embrionu męskiego, a przez  $q = 1-p$  prawdopodobieństwo embrionu żeńskiego. Iloczyny prawdopodobieństw  $p(1-m_i)$  i  $q(1-f_i)$  oznaczają prawdopodobieństwa, że z jaja o numerze  $i$  urodzi się odpowiednio knurek lub loszka. Przyjmuję oznaczenia:

$$p_i = p(1-m_i), \quad q_i = q(1-f_i), \quad r_i = pm_i + qf_i,$$



$r_i$  jest równe prawdopodobieństwu śmierci embrionu o numerze  $i$ , suma zaś  $p_i + q_i$  jest równa prawdopodobieństwu przeżycia ciąży przez ten embrion. Jest oczywiście

$$p_i + q_i + r_i = 1.$$

Niech  $u_i$  będzie zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeżeli embrion o numerze  $i$  przeżyje ciążę a wartość 0 jeśli umrze przed urodzeniem. Zmienna losowa

$$X = u_1 + u_2 + \dots + u_N$$

jest ilością urodzonych prosiąt (zmienna losowa  $N$  oznacza ilość zapłodnionych jaj).

$$(11) \quad Q'_1(n) = P(X = n) = \sum_{N \geq n} \sum_{l_1 \dots l_n} (p_{l_1} + q_{l_1}) \dots (p_{l_n} + q_{l_n}) r_{l_{n+1}} \dots r_{l_N} h(N).$$

Znak  $\sum_{l_1 \dots l_n}$  oznacza sumowanie po wszystkich  $\binom{N}{n}$  możliwych kombinacjach  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , które można otrzymać z liczb  $1, 2, \dots, N$ , a  $h(N)$  jest prawdopodobieństwem tego, że liczba zapłodnionych jaj jest równa  $N$ . Oznaczając przez  $Q'(n, k)$  prawdopodobieństwo opisanego już zdarzenia  $(n, k)$  otrzymujemy

$$(12) \quad Q'(n, k) = \sum_{N \geq n} \sum_{l_1 \dots l_N} p_{l_1} \dots p_{l_k} q_{l_{k+1}} \dots q_{l_n} r_{l_{n+1}} \dots r_{l_N} h(N).$$

Znak  $\sum_{l_1 \dots l_N}$  oznacza tu sumowanie po wszystkich  $N!/k!(n-k)!(N-n)!$  nierównoważnych permutacjach, które można otrzymać ze zbioru złożonego z trzech grup o licznosciach  $k, n-k, N-n$ . Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe (8) uwzględniając (11) i (12) otrzymujemy

$$(13) \quad Q'(k|n) = \frac{\sum_{N \geq n} \sum_{l_1 \dots l_N} p_{l_1} \dots p_{l_k} q_{l_{k+1}} \dots q_{l_n} r_{l_{n+1}} \dots r_{l_N} h(N)}{\sum_{N \geq n} \sum_{l_1 \dots l_n} (p_{l_1} + q_{l_1}) \dots (p_{l_n} + q_{l_n}) r_{l_{n+1}} \dots r_{l_N} h(N)}.$$

Rozkład wyrażony wzorem (13) jest uogólnieniem rozkładu (9).

Z założeń modelu wynika, że prawdopodobieństwo płci może się zmieniać wewnątrz miotu. Ze względu na eliminacje embrionów w różnych ciążach, można też spodziewać się zmienności prawdopodobieństw płci między miotami. Ażeby to uzasadnić wystarczy rozważyć równoliczne ciąży, z których powstają równoliczne mioty. Załóżmy, że uporządkowane według wielkości prawdopodobieństwa  $p_i + q_i$  przeżycia przez embriony okresu ciąży tworzą identyczne ciągi. Prawdopodobieństwa płci dla odpowiadającym tym ciążom miotów na ogół nie dadzą się uporządkować w takie identyczne ciągi. Wynika to z tego, że niezależnie od prawdopodobieństw przeżycia, mogą w jednej ciąży umrzeć embriony,

które odpowiadają innym wyrazom ciągu prawdopodobieństw niż te, które odpowiadają umarłym embrionom w drugiej ciąży. Skrajnym przykładem może być przypadek, gdy w jednej ciąży umierają embriony odpowiadające pierwszym  $N-n$  wyrazom ciągu prawdopodobieństw przeżycia, podczas gdy w drugiej umierają embriony odpowiadające  $N-n$  ostatnim wyrazom tego ciągu.

Oznacza to, że prawdopodobieństwa płci urodzonych prosiąt w miotach spełniają warunki schematu Coolidge'a. A zatem rozkład  $Q'(k|n)$  może mieć wariancję podnormalną i nadnormalną. Stąd wniosek dalszy, że stwierdzony na materiale empirycznym schemat Coolidge'a może być teoretycznie wyjaśniony.

#### Prace cytowane

- [1] A. C. Aitken, *Statistical Mathematics*, Edinburg and London 1944.
- [2] I. Johanson, *The sex ratio and multiple births in cattle*, Zeitschrift für Züchtung Reihe 24 (1932), str. 183-286.
- [3] Z. Kamiński, O. Kordynowicz, Z. Staliński, *Niektóre zagadnienia dotyczące determinacji płci u zwierząt gospodarskich*, Zeszyty Problemowe Kosmosu 5 (1956), str. 53-56.
- [4] J. Łukaszewicz, T. K. Nowakowski, *Obliczanie prawdopodobieństwa jednojajowości czworaczków*, Zastosow. Matem. 5 (1960), str. 117-139.
- [5] J. Łukaszewicz, T. K. Nowakowski, *O prawdopodobieństwie jednojajowości czworaczków na podstawie badań serologicznych*, Polski Tygodnik Lekarski 13 (1958), str. 1481-1484.
- [6] J. Perkal, L. Szopa, *O sekwencji płci kurecząt*, Roczniki Nauk Rolniczych, 81-B-3 (1963), str. 499-523.
- [7] J. Schmitt, *Über das Vorkommen einiger Zwillinge beim Schwein*, Zucht-hygiene Fortpflanzungsstörungen und Besamung der Haustiere 4 (1960), str. 316-321.
- [8] H. Steinhaus, *Elementary inequalities between the expected values of current estimates of variance*, Coll. Math. 1 (1948), str. 312-321.
- [9] С. Б. Жегалов, *Закономерности наследования пола у животных*, Успехи Современной Биологии 30 (1950), str. 130-144.

Praca wpłynęła 19. 2. 1965

Ч. ПЛЯТ (Ольштынь)

#### О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛА В ПОМЁТАХ ПОРОСЯТ И СВЯЗАННЫХ С ЭТИМ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЯХ

#### РЕЗЮМЕ

На материале 2296 помётов автор исследовал распределение пола поросят одного помёта. Оказалось, что в помётах с численностью от 3 до 12 дисперсия количества хрячков в помёте меньше, а в помётах с численностью от 13-16 —

больше нормальной дисперсии  $\sigma_n^2 = npq$  в схеме Бернулли. Разницы не являются статистически существенными для любой численности помёта, но регулярность знака замеченных разностей несомненно свидетельствует о некоторой биологической правильности.

Дисперсия модели Кулиджа

$$\overline{\sigma_n^2} = npq - nV + n(n-1)W$$

(где  $p$  — средняя вероятность мужского пола,  $V$  — дисперсия этой вероятности внутри помётов,  $W$  — дисперсия между помётами) значительно лучше выравнивает экспериментальные данные (непрерывная кривая на рис. 1). Методом наименьших квадратов получено оценки  $p = 0,5096$ ;  $V = 0,0833$ ,  $W = 0,0071$ .

В последней части работы показывается теоретическая модель оплодотворения яиц и смертность плодов во время беременности (вероятность смерти плода зависит от пола и положения в матке), которая может привести к схеме Кулиджа распределения пола в помётах.

---

C. PLATT (Olsztyn)

*ON THE DISTRIBUTION OF SEX IN PIG LITTERS AND ON THE  
PROBABILISTIC MODELS CONNECTED WITH THAT DISTRIBUTION*

SUMMARY

On the basis of the material of 2296 litters, the author has examined the distribution of sex of suckling pigs in one litter. He has found that the variations of the quantity of males in litters of size 3-12 are less and in litters of size 13-16 are greater than the normal variation  $\sigma_n^2 = npq$  in the Bernoulli scheme. From the statistical point of view, those differences are not essential for any size of litter. On the other hand, the systematical character of the sign of the observed differences is an unbounded evidence of a certain biological regularity. The variation in the Coolidge model

$$\overline{\sigma_n^2} = npq - nV + n(n-1)W$$

(where  $p$  is a mean probability of male sex,  $V$  a variation of that probability inside the litters, and  $W$  a variation between litters) levels the experimental data much better (see the continuous curve in Fig. 1). By means of method of least squares the following estimates were obtained:  $p = 0,5096$ ,  $V = 0,0833$ ,  $W = 0,0071$ .

The final part of the paper contains theoretical model of fertilizing ova and of the mortality of fetuses during pregnancy (the probability of the death of a fetus depends on the probability of sex and on the position in the uterus). This model can lead up to Coolidge's scheme of the distribution of sex in litters.

---