ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII, 4 (1966)

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

LICZNOŚĆ PRÓBKI PRZY ZAGWARANTOWANEJ ROZDZIELNOŚCI HIPOTEZ

1. Wstęp.

Właściwe zaprojektowanie badań statystycznych wymaga wszechstronnych rozważań, w szczególności dotyczących liczby i sposobu dokonywania obserwacji, tak żeby odpowiednio zdefiniowane ryzyko wynikające z błędnych decyzji było dostatecznie małe.

W niniejszej pracy zajmuję się szczególnym przypadkiem badań statystycznych, a mianowicie testowaniem prostych alternatywnych hipotez parametrycznych, z ograniczeniem do testów niesekwencyjnych.

W klasycznej teorii testowania takich hipotez przyjmuje się zwykle za ryzyko prawdopodobieństwo błędu II rodzaju przy ustalonym prawdopodobieństwie błędu I rodzaju; następnie w różnych sposobach badania, opartych na różnych statystykach, wyznacza się liczbę obserwacji gwarantującą, że owo ryzyko nie przekroczy zadanej wielkości. W punkcie 2 pracy podaję (na podstawie [2]) opis klasycznego sposobu wyznaczania liczby obserwacji (czyli tzw. liczności próbki). Ta klasyczna metoda jest zapewne znana czytelnikowi, opis jej jest jednak potrzebny, gdyż z zawartych w nim definicji i oznaczeń korzystam przy przedstawianiu wyników tej pracy.

Po metodzie klasycznej opisuję metodę własną, w której liczność próbki ustala się w zależności od tego, ile informacji o testowanych hipotezach zawiera obrana statystyka. W punkcie 3 definiuję liczność próbki gwarantującą, że odpowiednio zdefiniowana ilość informacji o wyborze między testowanymi hipotezami, zwana rozdzielnością hipotez ([1], str. 6), odpowiadająca obranej statystyce, będzie dostatecznie duża. Następnie w punkcie 4 badam związki zachodzące między licznością próbki tak określoną a licznością próbki w klasycznej teorii, przy różnych założeniach o rozkładzie statystyki.

Związki te mają przeważnie postać twierdzeń granicznych i mówią o asymptotycznych konsekwencjach przyjęcia liczności próbki gwarantującej dostatecznie dużą rozdzielność hipotez zamiast liczności próbki gwarantującej odpowiednią moc testu (tj. ściślej, dostatecznie małe prawdopodobieństwa błędów I i II rodzaju). W twierdzeniach tych nie są podane oszacowania szybkości zbieżności i dlatego zastąpienie klasycznie wyznaczonej liczności próbki przez liczność próbki związaną z rozdzielnością hipotez wymaga obliczenia odchyleń wynikłych z takiego postępowania. (Odchyleniem występującym przy danej liczności próbki nazywam tutaj różnicę między zagwarantowanym ryzykiem a ryzykiem obliczonym przy tej liczności próbki.) Warto jednak dodać, że w bardziej skomplikowanych przypadkach wyznaczanie liczności próbki metodą klasyczną odbywa się zawsze uciążliwą drogą kolejnych prób i obliczania odchyleń. W związku z tym pożądane jest wskazanie rozsądnego pierwszego przybliżenia. Wspomniane wyżej własności graniczne oraz kilka przykładów podanych w 4.4 przemawiają za tym, że liczność próbki związana z rozdzielnością hipotez może służyć za owo rozsądne pierwsze przybliżenie. Metodę tę warto stosować w praktyce, ilekroć wyznaczanie liczności próbki klasyczną metodą jest trudne, a liczności próbki uzależnionej od rozdzielności hipotez — łatwe.

Te wnioski wydają się także uzasadnione w przypadku hipotez złożonych, jeśli przyjąć definicję liczności próbki przy zagwarantowanej rozdzielności hipotez złożonych wprowadzoną w punkcie 5.

Na zakończenie wspomnę tutaj o pracy [6], w której opisałem stwierdzoną przeze mnie numerycznie zgodność między klasyczną licznością próbki a licznością próbki uzależnioną od rozdzielności hipotez w przypadku alternatywnych planów pojedynczych. Próby teoretycznego uzasadnienia owej dość zaskakującej zgodności doprowadziły do powstania tej pracy.

2. Liczność próbki n^{Δ} przy zagwarantowanej mocy testu.

Niech X oznacza zmienną losową o rozkładzie zależnym od wartości parametru θ dla θ należących do zbioru Ω, zawartego w p-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Stawiamy alternatywne hipotezy H_i $(i = 1, 2)$, że parametr θ przyjmuje wartość θ_i.

Klasyczne postępowanie przy weryfikacji tych hipotez przebiega następująco: Niech $X_1, \ldots, X_n$ stanowi ciąg niezależnych zmiennych losowych mających rozkład zmiennej losowej X. Nazywamy *statystyką* mierzalną funkcję $Y^{(n)} = Y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Każdej wartości $y^{(n)}$ statystyki $Y^{(n)}$ przyporządkowujemy prawdopodobieństwo $\pi(y^{(n)})$ odrzucenia hipotezy H_1 (a więc przyjęcia hipotezy H_2). Jeśli zaobserwowanej w doświadczeniu wartości $y^{(n)}$ odpowiada $\pi(y^{(n)}) = 0$, przyjmujemy H_1; jeśli $\pi(y^{(n)}) = 1$, przyjmujemy H_2; w pozostałych przypadkach losujemy odrzucenie H_1 z prawdopodobieństwem $\pi(y^{(n)})$.

Postępowanie decyzyjne jest więc określone, jeśli znane są: liczba obserwacji n, statystyka $Y^{(n)}$ oraz prawdopodobieństwa $\pi(y^{(n)})$. Przyjmujemy, że dla każdego n statystyka $Y^{(n)}$ jest z góry ustalona. Wybieramy dwie liczby $0 < \alpha, \beta < 1$: chcemy tak dobrać $\pi(y^{(n)})$, żeby przy najmniejszej możliwej liczbie obserwacji n

1° prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_1, gdy jest prawdziwa było równe α,

2° prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_2, gdy jest prawdziwa, nie przekraczało β.

Aby napisać te warunki, oznaczamy przez $\chi^{(n)}$ zbiór wartości zmiennej losowej $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$; niech $\varphi^{(n)}$ oznacza borelowskie ciało podzbiorów $\chi^{(n)}$; niech $\mu^{(n)}(E_n, \theta)$ dla $E_n \epsilon \varphi^{(n)}$ oznacza rodzinę rozkładów zmiennej losowej $X^{(n)}$, a $\lambda^{(n)}(E_n)$ pewną miarę taką, że $\mu^{(n)}$ i $\lambda^{(n)}$ są wzajemnie absolutnie ciągłe. Oznaczmy dalej przez $f^{(n)}(x^{(n)}, \theta)$ uogólnioną gęstość zmiennej losowej $X^{(n)}$, określoną związkiem

$$\mu^{(n)}(E_n, \theta) = \int_{E_n} f^{(n)}(x^{(n)}, \theta)\, d\lambda^{(n)}(x^{(n)}) \qquad \text{dla każdego } E_n \epsilon \varphi^{(n)}.$$

Dla statystyki $Y^{(n)}$ wprowadźmy analogiczne oznaczenia zbioru wartości $\mathscr{Y}^{(n)}$, ciała podzbiorów $\mathscr{T}^{(n)}$, rodziny rozkładów $\nu^{(n)}(G_n, \theta)$ i miary $\gamma^{(n)}(G_n)$ dla $G_n \epsilon \mathscr{T}^{(n)}$ oraz uogólnionych gęstości $g^{(n)}(y^{(n)}, \theta)$.

Postawione wyżej warunki możemy zatem napisać następująco:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned} &\int_{\mathscr{Y}^{(n)}} \pi(y^{(n)})\, d\nu^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1) = \alpha, \\ &1 - \int_{\mathscr{Y}^{(n)}} \pi(y^{(n)})\, d\nu^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2) \leqslant \beta. \end{aligned}$$

Oznaczamy przez n^{Δ} najmniejszą liczbę naturalną (jeśli taka istnieje), dla której warunki (2.1) są spełnione, gdy stosujemy tzw. *test ilorazowy*, tj. gdy $\pi(y^{(n)})$ jest określone wzorem

$$\text{(2.2)} \qquad \pi(y^{(n)}) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2) > c^{(n)} g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1), \\ k^{(n)}, & \text{jeśli} \quad g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2) = c^{(n)} g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1), \\ 0, & \text{jeśli} \quad g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2) < c^{(n)} g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1), \end{cases}$$

gdzie $c^{(n)}$ oraz $k^{(n)}$ są parametrami tego testu.

Jak wiadomo, n^{Δ} stanowi kres dolny najmniejszej liczby obserwacji spełniającej warunki (2.1) przy dowolnym określeniu prawdopodobieństw $\pi(y^{(n)})$ (wynika to ź podstawowego lematu Neumana-Pearsona, podanego np. w [2], str. 65). Jeśli n^{Δ} nie istnieje, to układ (2.1) nie jest spełniony dla żadnego n i dla żadnych prawdopodobieństw $\pi(y^{(n)})$. Wynika stąd, że wzór (2.2) określa poszukiwane przez nas $\pi(y^{(n)})$.

Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_1, gdy parametr przyjmuje wartość θ, nosi nazwę *mocy testu* przy danym θ, a zatem układ (2.1) jest układem warunków nałożonych na moc testu. Ze względu na to najmniejszą liczbę obserwacji n^{Δ}, przy której układ tych warunków jest spełniony, nazywamy *licznością próbki przy zagwarantowanej mocy testu.*

Przy ustalonym ciągu statystyk $\{Y^{(n)}\}$ liczność próbki n^{Δ} jest zatem funkcją argumentów θ_1, θ_2, α i β. Zamiast n^{Δ} będziemy niekiedy używać oznaczeń: $n^{\Delta}(\theta, \theta_2, \alpha, \beta)$ — dla podkreślenia zależności od θ_1, θ_2, α i β, oraz n^{Δ} [dla $Y^{(n)}$] — dla podkreślenia, że rozpatrywany jest ciąg statystyk $\{Y^{(n)}\}$.

3. Liczność próbki n^* przy zagwarantowanej rozdzielności hipotez.

Wyznaczanie n^{Δ} odbywa się zwykle metodą kolejnych prób i niejednokrotnie jest dosyć skomplikowane. Toteż powstaje zagadnienie przybliżania $n^{\Delta}(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta)$ za pomocą takiej funkcji argumentów θ_1, θ_2, α, β, łatwej do wyznaczania w praktyce, przy której moc testu ilorazowego uległaby tylko nieznacznej zmianie.

Podamy teraz jedną z możliwych metod otrzymania takiej przybliżonej liczności próbki; idea oparta jest na wykorzystaniu tzw. rozdzielności hipotez H_1 i H_2 względem statystyki $Y^{(n)}$, określonej wzorem (patrz [1], str. 6)

$$J_Y(\theta_1, \theta_2; n) = \int\limits_{\mathscr{Y}^{(n)}} \big(g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1) - g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2)\big) \log \frac{g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1)}{g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2)} \, dg^{(n)} y^{(n)}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli nazwać

$$\log \frac{g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_i)}{g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_j)} \qquad (i, j = 1, 2, i \neq j)$$

ilością informacji (zawartą w $y^{(n)}$) dotyczącej wyboru hipotezy H_i wobec hipotezy H_j, to rozdzielność hipotez jest sumą wartości oczekiwanych odpowiednich ilości informacji, gdy prawdziwa jest H_1 i gdy prawdziwa jest H_2. Rozdzielność hipotez jest więc miarą łatwości wyboru między hipotezami.

Gdy $Y^{(n)} = X^{(n)}$, rozdzielność hipotez względem $X^{(n)}$ oznaczamy przez $J_x(\theta_1, \theta_2; n)$, przy czym zamiast $J_x(\theta_1, \theta_2; 1)$ będziemy pisać $J_x(\theta_1, \theta_2)$. Zachodzi związek ([1], rozdziały 1 i 2)

$$(3.1) \qquad 0 \leqslant J_Y(\theta_1, \theta_2; n) \leqslant J_x(\theta_1, \theta_2; n) = nJ_x(\theta_1, \theta_2),$$

przy czym równość z lewej strony nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1) \equiv g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2)$ dla każdego $y^{(n)}$; równość w środkowej części nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $Y^{(n)}$ jest statystyką dostateczną.

Ze względu na przebieg funkcji $J_Y(\theta_1, \theta_2; n)$ w zależności od n, podzielimy ciąg statystyk $\{Y^{(n)}\}$ na celowo dobrane i niecelowo dobrane. $\{Y^{(n)}\}$ nazywamy ciągiem statystyk *celowo dobranym*, jeśli $J_Y(\theta_1, \theta_2; n)$ dla $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$ jest rosnącą do nieskończoności funkcją n; w przeciwnym razie $\{Y^{(n)}\}$ nazywamy ciągiem statystyk *niecelowo dobranym*. Przykładem niecelowo dobranego ciągu statystyk jest ciąg skrajnych statystyk pozycyjnych w n-elementowej próbce prostej zmiennych losowych o rozkładzie normalnym ze znanym odchyleniem średnim i z nie znaną średnią, co do wartości której wysuwamy dwie alternatywne hipotezy. Wtedy, jak łatwo sprawdzić, $J_Y(\theta_1, \theta_2; n)$ dąży do zera dla $n \to \infty$.

Nakładamy warunek, żeby rozdzielność hipotez względem statystyki $Y^{(n)}$ była dostatecznie duża, nie mniejsza od dodatniej liczby rzeczywistej a:

$$J_Y(\theta_1, \theta_2; n) \geqslant a.$$

Niech $\hat{n}(\theta_1, \theta_2, a) = \inf\{n; J_Y(\theta_1, \theta_2; n) \geqslant a\}$. Chcemy zastąpić a taką funkcją $a(\alpha, \beta)$ o dodatnich wartościach rzeczywistych, przy której $\hat{n}(\theta_1, \theta_2, a(\alpha, \beta))$ stanowiłoby dobre przybliżenie n^Δ (w sensie podanym na początku tego punktu). W następnych punktach badane są konsekwencje przyjęcia $a(\alpha, \beta) = (t_\alpha + t_\beta)^2$, gdzie t_u dla $0 < u < 1$ jest zdefiniowane związkiem

$$\int_{t_u}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} u.$$

Niech $n^* = \hat{n}(\theta_1, \theta_2, (t_\alpha + t_\beta)^2)$. Jest to zatem najmniejsza liczba obserwacji, przy której spełniony jest warunek

$$J_Y(\theta_1, \theta_2; n) \geqslant (t_\alpha + t_\beta)^2. \tag{3.2}$$

Będziemy nazywać n^* *licznością próbki przy zagwarantowanej rozdzielności hipotez*. Zamiast n^* będziemy niekiedy używać oznaczeń: $n^*(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta)$ — dla podkreślenia zależności od $\theta_1, \theta_2, \alpha$ i β, oraz n^* [dla $Y^{(n)}$] — dla podkreślenia, że rozpatrywany jest ciąg statystyk $\{Y^{(n)}\}$.

4. Związki między n^Δ a n^*.

4.1 Następujące twierdzenie podaje warunki, przy których n^Δ i n^* są sobie równe, a więc gdy optymalny jest wybór $(t_\alpha + t_\beta)^2$ jako funkcji $a(\alpha, \beta)$.

TWIERDZENIE 1. *Niech $T^{(n)} = T(Y^{(n)})$ będzie wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $Y^{(n)}$, funkcyjnie niezależnym od θ. Niech $T^{(n)}$ ma rozkład normalny o średniej $m(\theta, n)$ i wariancji $\sigma^2(n)$. Wtedy dla dowolnych ustalonych θ_1, θ_2 α, β mamy n^Δ[dla $Y^{(n)}$] $= n^*$[dla $Y^{(n)}$], jeśli n^Δ[dla $Y^{(n)}$] istnieje.*

Dowód. Zgodnie z [1], str. 21, $J_Y(\theta_2, \theta_1; n) = J_T(\theta_1, \theta_2; n)$, a więc liczności próbki przy zagwarantowanej rozdzielności hipotez dla statystyk $Y^{(n)}$) i $T^{(n)}$ są sobie równe: n^*[dla $Y^{(n)}$] $= n^*$[dla $T^{(n)}$], jeśli tylko n^*[dla $Y^{(n)}$] istnieje.

Podobnie z równości prawdopodobieństw błędów I rodzaju i równości prawdopodobieństw błędów II rodzaju dla statystyk $Y^{(n)}$ i $T^{(n)}$ wynika, że n^{Δ}[dla $Y^{(n)}$] $= n^{\Delta}$[dla $T^{(n)}$], jeśli n^{Δ}[dla $Y^{(n)}$] istnieje.

Przy przyjętych założeniach o rozkładzie $T^{(n)}$ układ (2.1) dla statystyki $T^{(n)}$ przyjmuje po przekształceniu postać

$$\frac{[m(\theta_1, n) - m(\theta_2, n)]^2}{\sigma^2(n)} \geqslant (t_\alpha + t_\beta)^2.$$

Ponieważ lewa strona tej nierówności jest równa $J_T(\theta_1, \theta_2; n)$, więc n^{Δ}[dla $T^{(n)}$] $= n^*$[dla $T^{(n)}$], jeśli n^{Δ}[dla $T^{(n)}$] istnieje. Zatem n^{Δ}[dla $Y^{(n)}$] $=$ $= n^*$[dla $Y^{(n)}$], jeśli n^{Δ} [dla $Y^{(n)}$] istnieje, c.b.d.o.

4.2. Twierdzenie 1 mówi, że jeśli istnieje ciąg wzajemnie jednoznacznych przekształceń statystyk $Y^{(n)}$ o rozkładzie normalnym z wariancją niezależną funkcyjnie od θ, to $n^* = n^{\Delta}$. W praktyce założenia twierdzenia 1 na ogół nie są spełnione, często natomiast $Y^{(n)}$ jest asymptotycznie normalna lub istnieje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie asymptotycznie normalne.

Zajmiemy się więc przypadkiem, gdy ciąg rozkładów $Y^{(n)}$ jest w pewien sposób zbieżny do rozkładu normalnego dla $n \to \infty$, i zbadamy konsekwencje zastąpienia n^{Δ} przez n^*, gdy n^* jest dostatecznie duże.

Sformułujemy najpierw, co będziemy tutaj rozumieć przez dostatecznie duże $n^*(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta)$. Ograniczmy się do przypadku, gdy θ_2 należy do otoczenia θ_1. Przypuśćmy, że dla dowolnych ustalonych α, β, θ_1

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} n^{\Delta}(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{\theta_2 \to \theta_1} n^*(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta) = \infty$$

W tym i w następnym punkcie będziemy więc rozpatrywać asymptotyczne związki między n^{Δ} i n^*, gdy $\theta_2 \to \theta_1$ przy ustalonych α, β i θ_1, traktując je jako szczególny przypadek związków między n^{Δ} a n^*, gdy n^{Δ} i n^* są dostatecznie duże.

Oznaczmy przez β_n lewą stronę drugiej nierówności układu (2.1) (prawdopodobieństwo błędu II rodzaju) przy założeniu, że spełniona jest pierwsza równość tego układu (tj. prawdopodobieństwo błędu I rodzaju jest równe α). β_n przy danej statystyce $Y^{(n)}$ jest zatem funkcją α, θ_2 i θ_1. Z określenia n^{Δ} wiadomo, że $\beta_{n^{\Delta}} \leqslant \beta$, $\beta_n > \beta$ dla $n < n^{\Delta}$. Dopuszczamy odtąd tylko takie ciągi statystyk $\{Y^{(n)}\}$, że dla każdego α i θ_1

(4.2.1) $$\lim_{n \to \infty} |\beta_n - \beta_{n+1}| = 0$$

jednostajnie ze względu na θ_2.

Zdefiniujmy z kolei zmienną losową N o rozkładzie normalnym z gęstością $h^{(n)}(z, \theta)$ dla $-\infty < z < \infty$. Niech $J_N(\theta_1, \theta_2; n)$ oznacza rozdzielność hipotez głoszących, że w rozkładzie zmiennej losowej N parametr θ ma wartość θ_i $(i = 1, 2)$. Oznaczmy przez $\varkappa_n$ (analogicznie do β_n) prawdopodobieństwo błędu II rodzaju przy testowaniu tych hipotez testem ilorazowym, przy prawdopodobieństwie błędu I rodzaju równym α.

Udowodnimy teraz następujące

TWIERDZENIE 2. *Jeśli przy dowolnych ustalonych α, β i θ_1*

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} \left|J_Y\big(\theta_1, \theta_2; n^*(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta)\big) - J_N\big(\theta_1, \theta_2; n^*(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta)\big)\right| = 0$$

oraz

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} |\beta_{n^*(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta)} - \varkappa_{n^*(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta)}| = 0$$

i jeśli wariancja zmiennej losowej N nie zależy od θ, to

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} |\beta_{n^*} - \beta_{n^\Delta}| = 0.$$

Teza tego twierdzenia mówi więc, że dla dostatecznie „bliskich" hipotez, a stąd dla dużych n^* — przy jednakowym prawdopodobieństwie błędu I rodzaju — prawdopodobieństwa błędu II rodzaju dla próbek o liczności n^* i n^Δ różnią się dowolnie mało, a więc n^* asymptotycznie spełnia układ (2.1).

D o w ó d. Gdy wariancja N nie zależy od θ, z definicji $\varkappa_n$ mamy

$$J_N(\theta_1, \theta_2; n) = (t_\alpha + t_{\varkappa_n})^2. \tag{4.2.2}$$

Niech

$$\zeta_1(\theta_1, \theta_2; n) = J_Y(\theta_1, \theta_2; n) - J_N(\theta_1, \theta_2; n), \qquad \zeta_2(\theta_1, \theta_2, n) = \beta_n - \varkappa_n,$$

przy czym z założenia

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} \zeta_1(\theta_1, \theta_2; n^*) = 0 = \lim_{\theta_2 \to \theta_1} \zeta_2(\theta_1, \theta_2; n^*). \tag{4.2.3}$$

Równość (4.2.2) przepisujemy w postaci

$$J_Y(\theta_1, \theta_2; n) = (t_\alpha + t_{\beta_n - \zeta_2(\theta_1, \theta_2, n)})^2 + \zeta_1(\theta_1, \theta_2, n). \tag{4.2.4}$$

Zdefiniujmy teraz funkcje $\bar{J}_Y(\theta_1, \theta_2; x)$, $\bar{J}_N(\theta_1, \theta_2; x)$, $\bar{\beta}_x$, $\bar{\varkappa}_x$, określone dla $0 < x < \infty$, takie że

1° dla $x = 1, 2, \ldots$ są one równe odpowiednio $J_Y(\theta_1, \theta_2; x)$, $J_N(\theta_1, \theta_2; x)$, β_x, $\varkappa_x$;

2° są ciągłymi, monotonicznymi funkcjami x dla $i \leqslant x \leqslant i+1$, $i = 1, 2, \ldots$;

3° (analogicznie do (4.2.2)) $\bar{J}_N(\theta_1, \theta_2; x) = (t_\alpha + t_{\bar{\varkappa}_x})^2$;

4° dla x^* zdefiniowanego za pomocą równości $J_Y(\theta_1, \theta_2; x^*) = (t_a + t_\beta)^2$ mamy

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} \bar{\zeta}_1(\theta_1, \theta_2; x^*) = 0 = \lim_{\theta_2 \to \theta_1} \bar{\zeta}_2(\theta_1, \theta_2; x^*),$$

gdzie

$$\bar{\zeta}_1(\theta_2, \theta_2; x) = \bar{J}_Y(\theta_1, \theta_2; x) - \bar{J}_N(\theta_1, \theta_2; x), \qquad \bar{\zeta}_2(\theta_1, \theta_2; x) = \bar{\beta}_x - \bar{\varkappa}_x.$$

Zdefiniowana w 1°-4° funkcja $\bar{\beta}_x$ spełnia równość (analogiczną do (4.2.4))

$$\bar{J}_Y(\theta_1, \theta_2; x) = (t_a + t_{\bar{\beta}_x - \bar{\zeta}_2(\theta_1, \theta_2; x)})^2 + \bar{\zeta}_1(\theta_1, \theta_2; x),$$

a więc dla $x = x^*$ mamy

$$(4.2.5) \qquad (t_a + t_\beta)^2 = (t_a + t_{\bar{\beta}_{x^*} - \bar{\zeta}_2(\theta_1, \theta_2, x^*)})^2 + \bar{\zeta}_1(\theta_1, \theta_2; x^*).$$

Niech x^Δ będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\bar{\beta}_{x^\Delta} = \beta$. Wtedy z (4.2.5) i z warunku 4° otrzymujemy

$$(4.2.6) \qquad \lim_{\theta_2 \to \theta_1} |\bar{\beta}_{x^\Delta} - \bar{\beta}_{x^*}| = 0.$$

Na mocy (4.2.1) mamy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N_0} \bigwedge_{n > N_0} \bigwedge_{\theta_2} |\beta_n - \beta_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ponieważ $\bar{\beta}_x$ zmienia się monotonicznie dla $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$, więc

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N_0} \bigwedge_{n > N_0} \bigwedge_{\theta_2} \left[(|x - n| < 1) \to \left(|\beta_n - \bar{\beta}_x| < \frac{\varepsilon}{3} \right) \right].$$

Dla θ_2 dostatecznie bliskich θ_1 liczności n^* i n^Δ są z założenia dowolnie duże, przy czym $|x^* - n^*| < 1$, $x^\Delta - n^\Delta| < 1$, a zatem

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \left[(|\theta_2 - \theta_1| < \delta) \to \left(|\beta_{n^*} - \bar{\beta}_{x^*}| < \frac{\varepsilon}{3} \right) \right]$$

oraz

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \left[(|\theta_2 - \theta_1| < \delta) \to \left(|\beta_{n^\Delta} - \beta_{x^\Delta}| < \frac{\varepsilon}{3} \right) \right].$$

Jeśli (4.2.6) napisać w postaci

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \left[(|\theta_2 - \theta_1| < \delta) \to \left(|\bar{\beta}_{x^*} - \bar{\beta}_{x^\Delta}| < \frac{\varepsilon}{3} \right) \right],$$

to z powyższych trzech wyrażeń wynika

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} [(|\theta_2 - \theta_1| < \delta) \to (|\beta_{n^*} - \beta_{n^\Delta}| < \varepsilon)], \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Teza tego twierdzenia jest również prawdziwa, jeśli istnieje ciąg wzajemnie jednoznacznych przekształceń $\{T^{(n)}\}$, $T^{(n)} = T(Y^{(n)})$, spełniający założenia twierdzenia 2 o ciągu $\{Y^{(n)}\}$. (Dowód tego jest oczywisty, przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 1.) Istnienie takich przekształceń rozpatruje się np. w [5]. Dla praktyki istotne jest to, że ani postać funkcyjna, ani parametry rozkładu $T(Y^{(n)})$ nie muszą być znane, wystarcza istnienie takiego przekształcenia.

4.3. Niech funkcja $f^{(n)}(x^{(n)}, \theta)$ (będąca uogólnioną gęstością zmiennej losowej $X^{(n)}$) spełnia następujące założenia:

A. Niech $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Omega$. Oznaczmy przez $\Omega_\theta \in \Omega$ wypukłe otoczenie θ. Niech $\theta' \in \Omega_\theta$. Dla wszystkich $x^{(n)}[\lambda^{(n)}]$ i dla wszystkich θ, θ', θ'', $\theta \leqslant \theta'' \leqslant \theta'$, istnieją pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial \log f^{(n)}(x^{(n)}; \theta'')}{\partial \theta_\lambda}, \quad \frac{\partial^2 \log f^{(n)}(x^{(n)}; \theta'')}{\partial \theta_\lambda \partial \theta_\mu}, \quad \frac{\partial^3 \log f^{(n)}(x^{(n)}; \theta'')}{\partial \theta_\lambda \partial \theta_\mu \partial \theta_\nu}$$

dla $\lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, p$.

B.
$$\left|\frac{\partial f^{(n)}(x^{(n)}; \theta'')}{\partial \theta_\lambda}\right| < F(x), \quad \left|\frac{\partial^2 f^{(n)}(x^{(n)}; \theta'')}{\partial \theta_\lambda \partial \theta_\mu}\right| < G(x),$$

$$\left|\frac{\partial^3 \log f^{(n)}(x^{(n)}; \theta'')}{\partial \theta_\lambda \partial \theta_\mu \partial \theta_\nu}\right| < H(x) \quad \text{dla} \quad \lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, p,$$

gdzie $F(x)$ i $G(x)$ są całkowalne $[\lambda^{(n)}]$ po całej przestrzeni $\chi^{(n)}$ i

$$\int_{\chi^{(n)}} f^{(n)}(x^{(n)}; \theta) H(x) d\lambda^{(n)}(x^{(n)}) < M < \infty,$$

gdzie M jest niezależne od θ.

C.
$$\int_{\chi^{(n)}} \frac{\partial f^{(n)}(x^{(n)}; \theta)}{\partial \theta_\lambda} d\lambda^{(n)}(x^{(n)}) = 0, \quad \int_{\chi^{(n)}} \frac{\partial^2 f^{(n)}(x^{(n)}; \theta)}{\partial \theta_\lambda \partial \theta_\mu} d\lambda^{(n)}(x^{(n)}) = 0$$

dla $\lambda, \mu = 1, \ldots, p$.

Dla sformułowania założenia D przyjmijmy następujące oznaczenia (dla dowolnego $\bar{\theta} \in \Omega$):

$$a_{\bar{\theta}}(\theta, \theta') = \int_{\chi^{(n)}} f^{(n)}(x^{(n)}; \bar{\theta}) \log \frac{f^{(n)}(x^{(n)}; \theta)}{f^{(n)}(x^{(n)}; \theta')} d\lambda^{(n)}(x^{(n)}),$$

$$\sigma^2_{\bar{\theta}}(\theta, \theta') = \int_{\chi^{(n)}} f^{(n)}(x^{(n)}; \bar{\theta}) \left[\log \frac{f^{(n)}(x^{(n)}; \theta)}{f^{(n)}(x^{(n)}; \theta')}\right]^2 d\lambda^{(n)}(x^{(n)}) - a^2_{\bar{\theta}}(\theta, \theta'),$$

$$c_{\bar{\theta}}(\theta, \theta') = \int_{\chi^{(n)}} f^{(n)}(x^{(n)}; \bar{\theta}) \left|\log \frac{f^{(n)}(x^{(n)}; \theta)}{f^{(n)}(x^{(n)}; \theta')} - a_{\bar{\theta}}(\theta, \theta')\right|^3 d\lambda^{(n)}(x^{(n)}).$$

Przy tych oznaczeniach

$$\text{D.}\quad \frac{c_\theta(\theta,\theta')}{\sigma_\theta(\theta,\theta')} \quad \text{i} \quad \frac{c_{\theta'}(\theta,\theta')}{\sigma_{\theta'}(\theta,\theta')} \quad \text{ograniczone dla } \theta, \theta' \in \Omega.$$

Dla ciągu statystyk dostatecznych udowodnimy następujące asymptotyczne

TWIERDZENIE 3. *Dla dowolnego ciągu statystyk dostatecznych* $\{Y^{(n)}\}$ *i dla dowolnych ustalonych* α, β, θ_1 *zachodzi*

$$\lim_{\theta_2\to\theta_1} \frac{n^\Delta}{n^*} = 1,$$

jeśli tylko Ω *jest otwartym zbiorem p-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej, a funkcja* $f^{(n)}(x^{(n)},\theta)$ *spełnia założenia* A-D.

Dowód będzie przebiegać następująco: Wykorzystując założenia A, B, C i założenia o obszarze Ω oraz twierdzenie podane przez Kullbacka ([1], str. 28), udowodnimy lemat, na mocy którego po dołączeniu założenia D i uwzględnieniu twierdzenia podanego przez Pietrowa ([3], str. 254) otrzymamy

$$\lim_{\theta_2\to\theta_1} \frac{n^\Delta[\text{dla } X^{(n)}]}{n^*[\text{dla } X^{(n)}]} = 1; \tag{4.3.1}$$

następnie uogólnimy ten wynik na n^Δ i n^* dla dowolnego ciągu statystyk dostatecznych.

Dowód ten w znacznej części wzorowany jest na analogicznym dowodzie przeprowadzonym przez Ajwazjana ([4], str. 87). Ajwazjan, ograniczając się do zmiennych losowych $X^{(n)}$ o rozkładzie ciągłym i przyjmując założenia równoważne przy tym ograniczeniu założeniom A, B i C oraz założeniu o Ω, udowodnił analogiczny lemat, po czym dołączył założenie D, wykorzystał twierdzenie Pietrowa i otrzymał wzór (4.3.1). Podane w tym paragrafie twierdzenie można więc traktować jako uogólnienie twierdzenia Ajwazjana dla zmiennych losowych nieciągłych i dla statystyk dostatecznych. Podkreślamy tutaj, że Ajwazjan nie definiował, ani nie interpretował wielkości n^* w sposób przedstawiony w niniejszej pracy.

Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia 3.

I. LEMAT. *Przy sformułowanym wyżej założeniu o* Ω *i założeniach* A, B *i* C

$$\lim_{\theta'\to\theta} \frac{\sigma^2_{\theta'}(\theta,\theta')}{J_x(\theta,\theta')} = \lim_{\theta'\to\theta} \frac{\sigma^2_{\theta}(\theta,\theta')}{J_x(\theta,\theta')} = 1. \tag{4.3.2}$$

Dowód. Niech

$$g_{\lambda,\mu}(\theta) = \int\limits_{\mathfrak{X}^{(n)}} f^{(n)}(x^{(n)};\theta)\cdot\left(\frac{1}{f^{(n)}(x^{(n)};\theta)}\,\frac{\partial f^{(n)}(x^{(n)};\theta)}{d\theta_\lambda}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{f^{(n)}(x^{(n)};\theta)}\,\frac{\partial f^{(n)}(x^{(n)};\theta)}{\partial\theta_\mu}\right).\,d\lambda^{(n)}(x^{(n)}),$$

$$\Delta_\lambda(\theta,\theta') = \theta'_\lambda-\theta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\Delta^2(\theta,\theta') = \sum_{\lambda=1}^{p}\Delta_\lambda^2(\theta,\theta'),$$

$$Q(\theta,\theta') = \sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p} g_{\lambda,\mu}(\theta)\Delta_\lambda(\theta,\theta')\Delta_\mu(\theta,\theta').$$

W [1] str. 27 pokazano, że przy założeniach tego lematu dla $\theta\in\Omega$, $\theta'\in\Omega_\theta$

$$J_x(\theta,\theta') = Q(\theta,\theta')+o\big(\Delta^2(\theta,\theta')\big).$$

Tą samą metodą można też od razu otrzymać, że

$$\sigma_\theta^2(\theta,\theta') = Q(\theta,\theta')+o\big(\Delta^2(\theta,\theta')\big), \qquad \sigma_{\theta'}^2(\theta,\theta') = Q(\theta,\theta')+o\big(\Delta^2(\theta,\theta')\big),$$

a stąd już wynika teza lematu.

II. Pietrow udowodnił ([3], str. 254), że przy założeniu D i dla θ_2 z otoczenia θ_1, jeśli

$$s^* = \frac{\big(t_\alpha\sigma_{\theta_1}(\theta_1,\theta_2)+t_\beta\sigma_{\theta_2}(\theta_1,\theta_2)\big)^2}{[J_X(\theta_1,\theta_2)]^2} \underset{\theta_2\to\theta_1}{\longrightarrow} \infty,$$

to

$$\lim_{\theta_2\to\theta_1}\frac{n^\Delta[\text{dla } X^{(n)}]}{s^*} = 1.$$

Na podstawie lematu, podstawiając w (4.3.2) $\theta=\theta_1$, $\theta'=\theta_2$, mamy więc przy założeniach lematu i założeniu D

$$\lim_{\theta_2\to\theta_1}\frac{n^\Delta[\text{dla } X^{(n)}]}{\dfrac{(t_\alpha+t_\beta)^2}{J_X(\theta_1,\theta_2)}} = 1. \tag{4.3.3}$$

Zauważmy teraz, że

$$n^*[\text{dla } X^{(n)}] = \left[\frac{(t_\alpha+t_\beta)^2}{J_X(\theta_1,\theta_2)}\right]+1,$$

gdyż $J_X(\theta_1, \theta_2; n) = nJ_X(\theta_1, \theta_2)$. Mianownik we wzorze (4.3.3) różni się więc mniej niż o 1 od n^*[dla $X^{(n)}$] i dąży do nieskończoności, gdy $\theta_2 \to \theta_1$, a wobec tego

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} \frac{n^\Delta[\text{dla } X^{(n)}]}{n^*[\text{dla } X^{(n)}]} = 1.$$

III. Niech $\{Y^{(n)}\}$ będzie dowolnym ciągiem statystyk dostatecznych. Wtedy na mocy (3.1)

$$n^*[\text{dla } Y^{(n)}] = n^*[\text{dla } X^{(n)}].$$

Zachodzi wtedy również ([1], str. 20)

$$\frac{g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_1)}{g^{(n)}(y^{(n)}, \theta_2)} = \frac{f^{(n)}(x^{(n)}, \theta_1)}{f^{(n)}(x^{(n)}, \theta_2)} [\lambda^{(n)}],$$

a zatem prawdopodobieństwa błędów I i II rodzaju w teście ilorazowym są identyczne i stąd

$$n^\Delta[\text{dla } X^{(n)}] = n^\Delta[\text{dla } Y^{(n)}].$$

Zatem dla dowolnych ustalonych α, β, θ_1

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} \frac{n^\Delta[\text{dla } Y^{(n)}]}{n^*[\text{dla } Y^{(n)}]} = 1, \quad \text{c.b.d.o.}$$

4.4. Dla ilustracji podamy kilka przykładów wyznaczania n^* i przeprowadzimy w tych przykładach porównanie n^* i n^Δ.

Przykład a. Weryfikujemy hipotezy o wartości średniej w populacji o rozkładzie normalnym ze stałą wariancją. Za statystykę przyjmujemy średnią arytmetyczną z n-elementowej próbki prostej. Wtedy na podstawie twierdzenia 1 mamy $n^\Delta = n^*$.

Przykład b. Zakładamy, że w próbce $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ zmienne losowej X_j mają jednakowe rozkłady prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x) = ax + 1 - \frac{a}{2} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ -2 \leqslant a \leqslant 2.$$

Weryfikujemy hipotezę $H_1: a = 0$ wobec $H_2: a = 2$. (Hipotezy takie można wysunąć przy testowaniu tablic liczb losowych.) Za statystykę $Y^{(n)}$ z $n = 2k+1$-elementowej próbki obieramy medianę $M^{(n)}$, która ma rozkład o gęstości

$$g_1^{(n)}(y) = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} y^k (1-y)^k \quad \text{gdy} \quad a = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$g_2^{(n)}(y) = 2\frac{(2k+1)!}{(k!)^2} y^{2k+1} (1-y^2)^k \quad \text{gdy} \quad a = 2, \ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Obliczamy rozdzielność hipotez H_i przy stytystyce $M^{(n)}$; opierając się na definicji podanej w punkcie 3, otrzymujemy po przekształceniach

$$J_M(0{,}2;\ 2k+1) =$$

$$= \frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\left\{-k\log 2\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{1}{2k-i+1}\left(1-(-1)^{i+1}\right)+\right.$$

$$+\frac{2k+1}{2}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\frac{1}{(2k-i+1)^2}+k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\frac{1}{2k-i+1}\times$$

$$\left.\times\left(\sum_{j=0}^{2k-i-1}\frac{(-1)^{j+1}}{2k-i-j}+\sum_{j=0}^{4k-2i}\frac{(-1)^j}{4k-2i+1-j}\right)\right\}.$$

Niech $\alpha=\beta=0{,}18$. Wtedy $(t_\alpha+t_\beta)^2=3{,}34$. Obliczając $J_M(0{,}2;\ 2k+1)$ dla $k=1,2,\ldots,7$, stwierdzamy, że $J_M(0{,}2;\ 2k+1)<3{,}34$ dla $k<7$, a $J_M(0{,}2;\ 15)=3{,}72>3{,}34$ dla $k=7$. Zatem $n^*=15$. Będziemy oznaczać tu $n^*=2k^*+1$, a więc $k^*=7$. Podstawiamy teraz n^* do układu (2.1). Ponieważ w tym przykładzie dla statystyki $M^{(n)}$ iloraz wiarygodności, równy $2y^{k+1}(1+y)^k$, jest ciągłą funkcją y, monotoniczną względem y w przedziale $(0,1)$, więc odrzucenie hipotezy H_1 w teście ilorazowym następuje wtedy, gdy $M^{(n)}$ przyjmuje wartość z przedziału $(0,t)$ dla $0<t<1$. Układ (2.1) ma więc postać

$$1-\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{t^{2k-i+1}}{2k-i+1}=\alpha,$$

$$\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{t^{4k-2i+2}}{2k-i+1}\leqslant\beta.$$

Dla $k=k^*=7$, tj. dla $n=15$, pierwsze równanie tego układu jest spełnione, gdy $t=0{,}6151$, a wtedy $\beta_{15}=0{,}165<0{,}18$. Natomiast dla $k=6$ pierwsze równanie jest spełnione, gdy $t=0{,}6225$, a wtedy $\beta_{13}=0{,}201>0{,}18$. Zatem $n^{\Delta}=15=n^*$.

Przykład c. Zakładamy, że w próbce $X^{(n)}$ zmienne losowe X_j $(j=1,\ldots,n)$ mają dwuwymiarowy rozkład normalny o współczynniku korelacji ϱ. Weryfikujemy hipotezy $H_i\colon \varrho=\varrho_i$ $(i=1,2)$. Za statystykę $Y^{(n)}$ przyjmujemy współczynnik korelacji liniowej z próbki $R^{(n)}$, którego rozkład jest znany. Na podstawie rozdzielności hipotez $J_R(\varrho_1,\varrho_2;n)$ obliczamy n^*.

Wiadomo, że wzajemnie jednoznaczne przekształcenie

$$T(R^{(n)})=\frac{1}{2}\log\frac{1+R^{(n)}}{1-R^{(n)}}$$

ma rozkład asymptotycznie normalny z wariancją niezależną od ϱ, przy czym rozkład $T(R^{(n)})$ praktycznie niewiele różni się od normalnego nawet dla małych n. Na podstawie twierdzenia 1 możemy więc przybliżać n^{Δ} przez n^*. Ponieważ rozkład przekształcenia $T(R^{(n)})$ jest znany, wniosek ten nie ma praktycznego znaczenia, gdyż n^{Δ} wyznaczamy łatwo z układu (2.1) dla statystyki $T(R^{(n)})$. Gdyby jednak rozkład ów nie był znany, wyznaczanie n^{Δ} z układu (2.1) dla statystyki $R^{(n)}$ byłoby bardzo uciążliwe, natomiast wyznaczenie n^* nie sprawiałoby większych trudności. W takim przypadku metoda polegająca na znajdowaniu n^* i traktowaniu go jako przybliżenia n^{Δ} byłaby w praktyce użyteczna.

Przykład d. Zakładamy, że w próbce $X^{(n)}$ zmienne losowe X_j mają jednakowy rozkład zero-jedynkowy:

$$P(X_j = 1) = p = 1-P(X_j = 0), \quad j = 1, \ldots, n, \ 0 < p < 1.$$

Stawiamy hipotezy $H_i: p = p_i$ $(i = 1, 2)$ i testujemy je za pomocą statystyki dostatecznej $Y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Obliczamy

$$J_Y(p_1, p_2; n) = n(p_1-p_2)\log\frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)},$$

a stąd

$$n^* = \left[\frac{(t_\alpha+t_\beta)^2}{(p_1-p_2)\log\dfrac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}}\right]+1.$$

Test ilorazowy w tym przykładzie nosi w statystycznej kontroli jakości nazwę *alternatywnego planu pojedynczego*. Jak już wspomniano we wstępie, w [6] na str. 347 zestawiono 10 par n^{Δ} i n^* dla różnych wartości α, β, p_1 i p_2. W wielu przypadkach otrzymano $n^{\Delta} = n^*$, w pozostałych przypadkach różnice między $\beta_{n^{\Delta}}$ i β_{n^*} okazały się znikome. Tak np. zgodnie z tą tablicą dla $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}07$, $p_1 = 26^0/_0$, $p_2 = 0{,}52^0/_0$ mamy $n^* = n^{\Delta} = 10$.

5. Uogólnienie definicji n^* przy hipotezach złożonych.

Definicja liczności próbki przy zagwarantowanej mocy testu dla hipotez złożonych, podana w [1], str. 327, jest następująca (przy zachowaniu założeń i oznaczeń wprowadzonych w punkcie 2). Niech H_i $(i = 1,2)$ głosi, że $\theta \in \Omega_i$, gdzie $\Omega_i \subset \Omega$, przy czym iloczyn domknięć Ω_1 i Ω_2 jest zbiorem pustym. Nakładamy warunki

$$\sup_{\theta\in\Omega_1} \int_{\mathscr{Y}^{(n)}} \pi(y^{(n)})\,d\nu^{(n)}(y^{(n)}, \theta) \leqslant \alpha,$$

$$1-\inf_{\theta\in\Omega_2} \int_{\mathscr{Y}^{(n)}} \pi(y^{(n)})\,d\nu^{(n)}(y^{(n)}, \theta) \leqslant \beta.$$

Przy ustalonej funkcji π możemy wyznaczyć najmniejszą liczność próbki, przy której te warunki są spełnione. Kres dolny tych liczności próbki przy wszelkich możliwych funkcjach π nazywamy licznością próbki przy zagwarantowanej mocy testu dla hipotez H_1 i H_2 i oznaczamy przez $n^{\Delta}[H_1, H_2, \alpha, \beta]$. Jest to uogólnienie definicji n^{Δ} (wprowadzonej w punkcie 2) dla hipotez złożonych. Oczywiście $n^{\Delta}[H_1, H_2, \alpha, \beta]$ nie zawsze istnieje. Z twierdzenia 1 i wniosku 1, podanych w [1], str. 327 i 328, wynika, że ten kres dolny jest osiągany (ilekroć istnieje), gdy π jest testem ilorazowym dla testowania pewnych prostych hipotez H_1' i H_2', którymi zastępuje się odpowiednio hipotezy H_1 i H_2.

Uogólnimy teraz analogicznie definicję n^*. Niech

$$\hat{n}[H_1, H_2, a] = \inf\{n; \inf_{\substack{\theta_1\in\Omega_1\\ \theta_2\in\Omega_2}} J_Y(\theta_1, \theta_2; n) \geqslant a\}.$$

Tak jak przy hipotezach prostych można i tu obrać sobie odpowiednią funkcję $a(\alpha, \beta)$ i poszukiwać związków między $\hat{n}[H_1, H_2, a(\alpha, \beta)]$ a $n^{\Delta}[H_1, H_2, \alpha, \beta]$. W przypadkach, w których $\inf_{\substack{\theta_1\in\Omega_1\\ \theta_2\in\Omega_2}} J_Y(\theta_1, \theta_2; n)$ jest dla każdego n równe rozdzielności hipotez H_1' i H_2', całe zagadnienie sprowadza się do hipotez prostych, a więc w szczególności dla $a(\alpha, \beta) = (t_\alpha + t_\beta)^2$ słuszne są twierdzenia 1-3. Sądzimy, że taka sytuacja ma miejsce przy niektórych hipotezach H_1 i H_2 (np. w trywialnym przypadku, gdy parametr θ jest jednowymiarowy, $H_1: \theta \leqslant \theta_1$, $H_2: \theta \geqslant \theta_2$, $\theta_1 < \theta_2$).

Niech $n^*[H_1, H_2, \alpha, \beta] = \hat{n}[H_1, H_2, (t_\alpha + t_\beta)^2]$. Będziemy nazywać $n^*[H_1, H_2, \alpha, \beta]$ licznością próbki przy zagwarantowanej rozdzielności hipotez złożonych. Jest to uogólnienie definicji n^* (wprowadzonej w punkcie 3) dla hipotez złożonych. Ogólnie przy hipotezach złożonych nie potrafimy powiedzieć, czy $n^*[H_1, H_2, \alpha, \beta]$ stanowi w jakimś sensie rozsądne przybliżenie $n^{\Delta}[H_1, H_2, \alpha, \beta]$. Ponieważ jednak, podobnie jak dla hipotez prostych $n^{\Delta}[H_1, H_2, \alpha, \beta]$ otrzymuje się na drodze uciążliwych kolejnych prób, a wyznaczanie $n^*[H_1, H_2, \alpha, \beta]$ jest mniej skomplikowane, wydaje się słuszne traktować $n^*[H_1, H_2, \alpha, \beta]$ jako pierwsze przybliżenie $n^{\Delta}[H_1, H_2, \alpha, \beta]$.

Prace cytowane

[1] S. Kullback, *Information theory and statistics*, New York 1959.

[2] E. L. Lehmann, *Testing statistical hypotheses*, New York 1959.

[3] А. А. Петров, *Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам*, Теория вероятностей и ее прим. 4 (1956), str. 248-269.

[4] С. А. Айвазан, *Сравнение оптимальных свойств критериев Неймана-Пирсона и Вальда*, Теория вероятностей и ее прим. 4 (1959), str. 86-93.

[5] J. H. Curtiss, *On transformations used in the analysis of variance*, Annals of Mathematical Statistics 14 (1943), str. 107-117.

[6] E. Pleszczyńska, *O zastosowaniu teorii informacji do porównywania dwóch metod statystycznej kontroli jakości*, Zastosow. Mat. 5 (1961), str. 341-349.

Praca wpłynęła 9. 11. 1965

Э. ПЛЕЩИНЬСКА (Варшава)

ЧИСЛО ПРОБ НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАДАННОЙ РАЗДЕЛИМОСТИ ГИПОТЕЗ

РЕЗЮМЕ

Необходимое число наблюдений, при котором удовлетворены условия требуемые от мощности теста при проверке двух альтернативных статистических гипотез, называется *числом наблюдений, необходимых для получения заданной мощности теста*. Определение этого числа наблюдений — даже в случае простых гипотез — вообще говоря, трудно.

В этой работе дается определение числа проб, необходимых для получения заданной разделимости гипотез, как необходимого числа наблюдений, при котором удовлетворены условия, касающиеся разделимости проверяемых гипотез. Для простых гипотез доказано три теоремы (в том числе две асимптотических), рассматривающие последствия принятия числа проб, необходимых для получения заданной разделимости гипотез вместо числа наблюдений, необходимых для получения заданной мощности теста, а также дано несколько примеров. Рассмотрено, кроме того, трудности, возникающие при решении вопроса для сложеных гипотез.

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

SAMPLE SIZE WARRANTING THE DIVERGENCE OF HYPOTHESES

SUMMARY

The number of observations necessary for satisfying the conditions imposed on the power of a test while verifying two alternative statistical hypotheses is called the *sample size warranting the power of the test*. A calculation of this number is usually not easy, even for simple hypotheses.

In this paper the sample size warranting the divergence of hypotheses is defined. This is the number of observations necessary for satisfying the conditions imposed for obtaining the desired divergence of hypotheses. For simple hypotheses three theorems (two of them asymptotic ones) are proved which show the consequences of adopting the sample size warranting the divergence of hypotheses instead of the sample size warranting the power of the test. Some examples are given. Also the difficulties arising in the case of complex hypotheses are discussed.
