

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

prof. dr. hab. Feliks Przytycki

# **Jakościowa teoria równań różniczkowych zwyczajnych**

Notatki do przedmiotu  
**Jakościowa teoria równań różniczkowych zwyczajnych 2001**

Współredakcja i skład:  
**Paweł Witkowski**

30 stycznia 2006

# Spis treści

<b>1. Wstęp. Zawieszenie i globalne cięcie transwersalne. Twierdzenie Poincaré’go-Bendixsona</b> . . . . .	1
1.1. Dodatek. Twierdzenie Hadamarda-Perrona, $\lambda$ -lemat Palisa. . . . .	11
<b>2. Rozmaitości różniczkowe. Indeks pola w punkcie.</b> . . . . .	15
2.1. Dodatek 1. Parazwartość . . . . .	21
2.2. Dodatek 2. Tw. Poincaré’go-Hopfa . . . . .	22
<b>3. Twierdzenie Siegela. Zbiory minimalne potoków na powierzchniach</b> . . . . .	27
<b>4. Tw. Grobmana-Hartmana, 1</b> . . . . .	37
<b>5. Twierdzenie Grobmana-Hartmana, dokończenie.</b> . . . . .	41
5.1. Uzupełnienie Wykładu 3: obmotka na torusie i rozbicie na prostokąty. . . . .	46
<b>6.</b> . . . . .	49
<b>7.</b> . . . . .	61
<b>8.</b> . . . . .	69
<b>9.</b> . . . . .	81
<b>10.</b> . . . . .	91
<b>11. Metoda uśredniania</b> . . . . .	101
<b>12.</b> . . . . .	113
<b>13. Atraktor Lorenza</b> . . . . .	127
<b>14.</b> . . . . .	141
14.1. Dodatek do wykładów o Tw. Poincaré’go-Bendixsona . . . . .	146

## **Streszczenie**

Tutaj krótkie streszczenie.



# Wykład 1

## Wstęp. Zawieszenie i globalne cięcie transwersalne. Twierdzenie Poincaré'go-Bendixsona

Będziemy zajmowali się potokami  $\phi^t : M \rightarrow M$  dyfeomorfizmów, na ogół zwartej rozmaitości różniczkowej  $M$  (precyzyjna definicja będzie podana na następnym wykładzie). Trajektorie  $\phi^t(x)$  spełniają równanie różniczkowe zwyczajne autonomiczne

$$\frac{d\phi^t(x)}{dt} = V(\phi^t(x)), \phi^0(x) = x,$$

gdzie zazwyczaj  $V$  jest polem wektorowym klasy co najmniej  $C^1$ .

**Potok**  $\phi^t$  można rozważać jako homomorfizm grupy  $\mathbb{R}$  w grupę dyfeomorfizmów  $\text{Diff}(M, M)$  rozmaitości  $M$  w siebie.

$$t \rightarrow \phi^t, \phi^{t_1+t_2} = \phi^{t_1} \circ \phi^{t_2}, \phi^0 = id$$

$\phi^t(x)$  spełniające powyższe warunki dla ustalonego warunku pocz/atkowego  $X$  nazywa się czasem rozwiązaniem problemu Cauchy'ego. Zeby to rozwiązanie istniało, wystarczy założenie ciągłości  $V$ , wtedy jednak rozwiązanie nie musi być jednoznaczne. Potok nie jest więc wtedy dobrze zdefiniowany.

Dla pojedynczego dyfeomorfizmu  $f : M \rightarrow M$  można rozpatrywać iteracje  $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ razy}}$

dla  $n > 0$ ,  $f^0 = id$ ,  $f^n = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{|n| \text{ razy}}$  dla  $n < 0$ .

Mamy homomorfizm grupy  $\mathbb{Z}$  w  $\text{Diff}(M, M)$

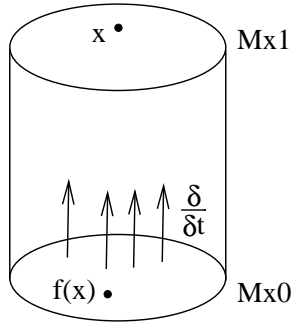
$$n \rightarrow f^n$$

Nazywamy go **kaskadą**.

**Definicja 1.1. Zawieszenie.** Jeśli  $f : M \rightarrow M$  jest dyfeomorfizmem to można rozważać iloczyn kartezjański  $M \times I$ , gdzie  $I$  to odcinek  $[0, 1]$  i skleić  $M \times 0$  z  $M \times 1$  utożsamiając

$$(x, 1) \sim (f(x), 0).$$

Powstaje nowa rozmaitość wymiaru  $\dim M + 1$ ,  $M \times I / \sim$ . (Precyzyjna definicja struktury różniczkowej na tej rozmaitości zostanie podana na następnym wykładzie.) Na niej mamy pole wektorowe  $\frac{\partial}{\partial t}$ , gdzie  $t$  to zmienna z  $I$ .



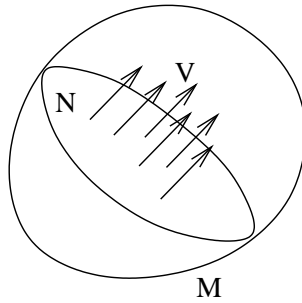
Rysunek 1.1: Zawieszenie

Zatem kaskada daje potok na rozmiarowości wymiaru o jeden wyższego.

Odwrotnie, czasem dla potoku  $\phi^t: M \rightarrow M$ ,  $\frac{d\phi^t(x)}{dt} = V(\phi^t(x))$  istnieje tak zwane

**Definicja 1.2. Globalne cięcie transwersalne**, to znaczy zanurzona podrozmiarowość  $N$ ,  $\dim N = \dim M - 1$  taka, że  $V(x) \notin T_x N$  (to znaczy  $V(x) \oplus T_x N = T_x M$ ), gdzie  $T_x N$ ,  $T_x M$  oznaczają przestrzenie styczne, odpowiednio do  $N$  i do  $M$ , i taką, że

$$\forall x \in M \exists t_1, t_2 > 0 \quad \phi^{t_1}(x), \phi^{-t_2}(x) \in N.$$



Rysunek 1.2: Globalne cięcie transwersalne

Dla  $x \in N$  oznaczmy przez  $t(x) > 0$  najmniejsze dodatnie  $t$  takie, że  $\phi^t(x) \in N$ .

*Ćwiczenie 1.3.* Udowodnić, że takie  $t$  istnieje, o ile rozmiarowość  $N$  jest zwarta.

**Definicja 1.4.** Przekształcenie

$$x \rightarrow \phi^{t(x)}(x)$$

nazywamy **przekształceniem pierwszego powrotu**.

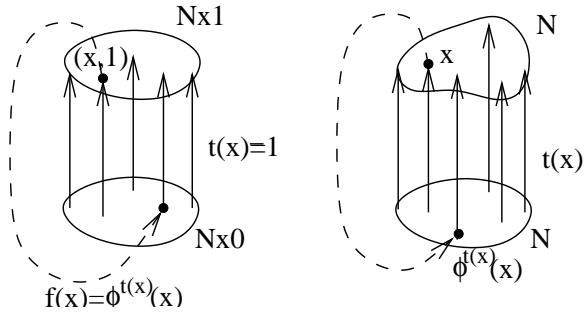
Jeśli  $\phi^t$  jest zawieszeniem  $f$  na  $M \times I / \sim$ , to  $M \times 0$  jest globalnym cięciem transwersalnym i  $f$  jest przekształceniem pierwszego powrotu.

Odwrotnie, zawieszenie  $N \times I / \sim$  z potokiem  $\frac{\partial}{\partial t}$ , dla globalnego cięcia transwersalnego  $N \subset M$  jest topologicznie równoważne wyjściowemu potokowi, to znaczy istnieje homeomorfizm (nawet dyfeomorfizm)

$$h: M \rightarrow N \times I / \sim$$

przeprowadzający trajektorie  $\phi^t$  na trajektorie  $\psi^t$  pola  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Czas nie może być na ogół zachowany, bo przekształcenie pierwszego powrotu do  $N \times \{0\}$  dla  $\psi^t$  ma  $t(x) \equiv 1$ .

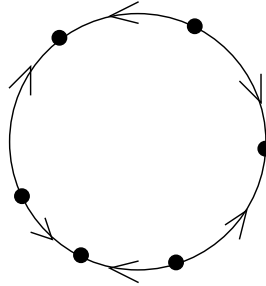


Rysunek 1.3: Czas powrotu  $t(x) \equiv 1$  i czas powrotu dowolny

Komplikacja kaskad i potoków rośnie wraz z wymiarem. Kaskady w wymiarze  $n$  odpowiadają potokom w wymiarze  $n + 1$ , chociaż te ostatnie mogą być bardziej skomplikowane w sytuacji, kiedy nie istnieje globalne cięcie transwersalne (na przykład kiedy pole  $V$  ma zera).

### Nisko wymiarowa dynamika

- Potoki w wymiarze 1. Zbiór punktów stałych może być dowolnym zbiorem zwartym.



Rysunek 1.4: Potok na okręgu

W lukach trajektorie mogą iść w dowolną stronę.

- Dyfeomorfizmy okręgu.
- Potoki w wymiarze 2 (bez punktów stałych: na torusie lub butelce Kleina)
- Dyfeomorfizmy powierzchni
- Potoki na 3-wymiarowych rozmaitościach

### Wysoki wymiar

W wymiarze 2, dla potoków, kluczową rolę odgrywa **twierdzenie Jordana**.

**Definicja 1.5.** Dla potoku  $\phi^t$  (lub dyfeomorfizmu, lub homeomorfizmu  $f$ ) na rozmaitości  $M$  zbiór zwarty  $A \subset M$  nazywa się **minimalny** jeśli jest niezmienniczy (to znaczy  $\forall t \phi^t(A) = A$ , lub  $f(A) = A$ ) i nie zawiera żadnego niepustego, właściwego, zwartego podzbioru niezmienniczego.

*Uwaga 1.6.* Ta definicja jest używana także dla potoku homeomorfizmów, kaskady lub iteracji  $f^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  przekształcenia ciągłego dowolnej przestrzeni metrycznej.

**Twierdzenie 1.7.** *Każdy zbiór niezmienniczy, niepusty, zwarty zawiera podzbiór minimalny.*

*Dowód.* Lemat Kuratowskiego-Zorna. □

**Definicja 1.8.** Dla potoku  $\phi^t$  (lub homeomorfizmu, lub dyfeomorfizmu  $f$ ) na rozmaitości  $M$ , dla każdego  $x \in M$  definiujemy zbiór

- $\omega$ -graniczny

$$\omega(x) = \{ y \in M \mid \exists t_n \rightarrow \infty \phi^{t_n}(x) \rightarrow y \}$$

lub  $f^{t_n}(x) \rightarrow y$ .

- $\alpha$ -graniczny

$$\alpha(x) = \{ y \in M \mid \exists t_n \rightarrow \infty \phi^{-t_n}(x) \rightarrow y \}$$

lub  $f^{-t_n}(x) \rightarrow y$ .

*Uwaga 1.9.* Jeśli  $z$  należy do trajektorii  $x$ , to znaczy  $\exists t \in \mathbb{R} \phi^t(x) = z$ , to  $\omega(x) = \omega(z)$  oraz  $\alpha(x) = \alpha(z)$ .

Faktycznie,  $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y$  implikuje

$$\phi^{t_n - t + t}(x) = \phi^{t_n - t}(\phi^t(x)) = \phi^{t_n - t}(z) \rightarrow y.$$

Zatem można mówić o zbiorach granicznych dla trajektorii  $\gamma = \phi^t(x)$ ,  $\omega(\gamma)$  i  $\alpha(\gamma)$ .

Z definicji widać, że  $\omega(x)$  i  $\alpha(x)$  są zbiorami zwartymi i niezmienniczymi (Jeśli  $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y$ , to  $\phi^{t_n+t}(x) \rightarrow \phi^t(y)$ ,  $t_n \rightarrow \pm\infty$ ).

*Ćwiczenie 1.10.* Jeśli  $y \in \omega(x)$ , to  $\omega(y) \subset \omega(x)$ .

*Ćwiczenie 1.11.* W zbiorze minimalnym każda trajektoria jest gęsta. Więcej,  $\forall x \in A \omega(x) = \alpha(x) = A$ .

## Wracamy do potoków na powierzchniach (wymiar 2).

*Uwaga 1.12.* Jeśli nie zakładać jednoznaczności rozwiązań równania różniczkowego  $\dot{x} = V(x)$ , w szczególności nie zakładać, że  $V$  jest klasy  $C^1$ , to definiując  $\omega$  należy ustalić krzywą całkową zaczynającą się w  $x = x_0$ . Definiujemy dla krzywej całkowej  $x(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ ,  $x(0) = x_0$ , oznaczonej dalej  $x^t$ , zbiór  $\omega(x^t)$  w ten sam sposób co poprzednio:

$$\omega(x^t) = \{ y \mid \exists t_n \rightarrow \infty, x(t_n) \rightarrow y \}.$$

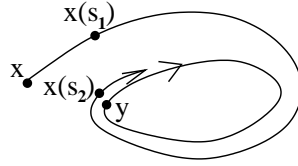
Wygodnie będzie jak wyżej używać oznaczenia  $\phi^t(x)$  pamiętając jednak, że możemy nie mieć potoku, a  $\phi^t(x)$  jest tylko pewną krzywą całkową  $x^t$ . Będziemy też tę krzywą całkową nazywać trajektorią.

Wracamy do pól wektorowych na powierzchniach (wymiar 2) i badania ich krzywych całkowych. W poniższym twierdzeniu nie zakładamy jednoznaczności rozwiązań.

## Twierdzenie 1.13. Poincaré'go-Bendixsona

*Jeśli  $U$  jest otwartym podzbiorem sfery  $S^2$ ,  $V$  ciągłym polem wektorowym na  $U$  i  $x^t = \phi^t(x)$  trajektorią,  $\phi^0(x) = x$ , której domknięcie zawarte jest w  $U$ , bez samoprzecięć i punktów zatrzymania (to znaczy  $\forall t_1 \neq t_2 \phi^{t_1}(x) \neq \phi^{t_2}(x)$ ), i taką, że  $\omega(x^t)$  nie zawiera zer pola  $V$ , to*





Rysunek 1.5: Trajektoria  $x^t$  i trajektoria okresowa  $\gamma$

1. Istnieje  $y \in U$  oraz trajektoria okresowa  $\gamma = \{y(t) \mid 0 \leq t \leq t_1\}$ ,  $y = y(0) = y(t_1)$ , minimalnego okresu  $t_1$  i bez samoprzecięć (to znaczy  $\forall 0 \leq t_2 < t_3 \leq t_1 \quad y(t_2) \neq y(t_3)$  z wyjątkiem pary  $t_2 = 0, t_3 = t_1$ ) taka, że  $\omega(x^t) = \gamma$
2. Istnieje ciąg  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots$  taki, że  $s_{n+1} - s_n \rightarrow t_1$ ,  $x(s + s_n) \rightrightarrows y(s)$  jednostajnie na każdym zwartym odcinku  $0 \leq s \leq s_0$

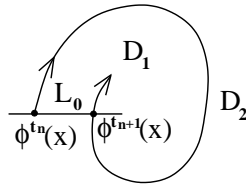
*Dowód. (części 1)*

1. Jeśli  $L$  to lokalne cięcie transwersalne, czyli łuk bez końców, transwersalny do pola  $V$  (tzn.  $(\forall x \in L)(V(x) \notin T_x L)$ ), to dla każdego  $z \in L$  istnieje otoczenie  $U' \subset U$  punktu  $z$  i  $\epsilon > 0$  takie, że jeśli  $y \in U'$  to dla każdego (wysyconego) rozwiązania  $y^t$  problemu Cauchy'ego z  $y^0 = y$  istnieje dokładnie jedno  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$  takie, że  $\phi^t(y) \in L$ ,

*Dowód.* Można wybrać otoczenie  $U'' \ni z$  zawarte w  $U$  i taki układ współrzędnych  $(x_1, x_2)$  (gładkości takiej jak  $L$ ) żeby  $L \subset \{x_2 = 0\} \cap U''$  i  $z = (0, 0)$ , oraz w tym układzie  $Y = \partial/\partial x_2$  ("flowbox", patrz wykłady z RRZ). Wtedy można wybrać  $\epsilon > 0$  takie, żeby  $B(z, 2\epsilon)$  (kula w tym układzie współrzędnych) była zawarta w  $U''$ . Wtedy  $U' = B(z, \epsilon)$  spełnia tezę tego punktu.

□

2. Załóżmy, że  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  to ciąg kolejnych czasów (skończony lub nieskończony), dla których  $\phi^{t_n}(x) \in L$ . Załóżmy jak wyżej, że  $L \subset \{x_2 = 0\}$ . Wtedy ciąg  $\phi^{t_n}(x)$  w  $L$  jest monotoniczny, to znaczy ciąg pierwszych współrzędnych jest monotoniczny.



Rysunek 1.6: Lokalne cięcie transwersalne i ciąg  $\phi^{t_n}$

*Dowód.* Krzywa zbudowana z odcinka  $L_0 \subset L$  między  $\phi^{t_n}(x)$  a  $\phi^{t_{n+1}}(x)$  oraz kawałką trajektorii  $\gamma_0 = \{\phi^t(x) \mid t_n \leq t \leq t_{n+1}\}$ , jest krzywą Jordana, to znaczy homeomorficznym obrazem okręgu. Twierdzenie Jordana mówi, że wtedy  $S^2 \setminus \gamma_0$  ma dwie składowe spójności  $D_1, D_2$ , obie homeomorficzne z dyskiem. Oznaczmy przez  $D_1$  składową nad  $L_0$ ,  $D_2$  składową pod  $L_0$ . Dla  $t > t_{n+1}$ ,  $\phi^t(x)$  wchodzi w  $D_1$  i nie może już z  $D_1$  wyjść. Nie może bowiem wyjść przez  $\gamma_0$ , bo  $\phi^t(x)$  nie ma samoprzecięć; nie może

wyjść przez  $L_0$ , bo musiałyby to zrobić “pod prąd” to znaczy w pierwszym punkcie  $z_0$ , w którym dotyka  $L_0$  musiałyby być  $V_2(z_0) \leq 0$ . Zatem  $\phi^{t_{n+2}}(x)$  musi być na prawo od  $\phi^{t_{n+1}}(x)$ .  $\square$

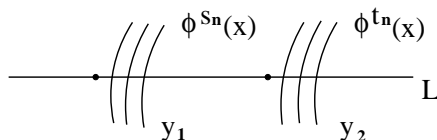
3.  $\omega(x^t)$  ma co najwyżej jeden punkt przecięcia z  $L$ .

*Dowód.* Gdyby były dwa takie punkty  $y_1, y_2 \in L$ , to istniałby ciąg  $s_n < t_n < s_{n+1} < t_{n+1} < \dots \rightarrow \infty$  taki, że

$$\phi^{s_n}(x), \phi^{t_n}(x) \in L \text{ oraz } \phi^{s_n}(x) \rightarrow y_1, \phi^{t_n}(x) \rightarrow y_2.$$

Dowód istnienia tego ciągu czasów korzysta z punktu 1. Jeśli  $\phi^{s'_n}(x) \rightarrow y_1 \in \omega(x^t)$  to można  $s'_n$  zastąpić bliskim  $s_n$  takim, że  $\phi^{s'_n}(x) \in L$ . Podobnie znajdujemy  $t_n$  blisko  $t'_n$ , gdzie  $\phi^{s'_n}(x) \rightarrow y_2$ . Dokładniej, znajdujemy otoczenia  $U' = U'(y_1)$  wokół  $y_1$  i  $U' = U(y_2)$  wokół  $y_2$  jak w pkt. 1 dowodu i rozpatrujemy  $\phi^{s'_n}(x) \in U'(y_1)$  i  $\phi^{t'_n}(x) \in U'(y_2)$ . (W dalszych częściach dowodu będziemy ten punkt rozumowania opuszczać.)

Ciąg  $\phi^{s_n}(x), \phi^{t_n}(x), \phi^{s_{n+1}}(x), \phi^{t_{n+1}}(x), \dots$  nie mógłby być monotoniczny w  $L$ .  $\square$

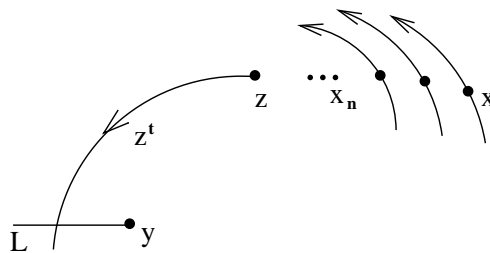


Rysunek 1.7: Ciągi  $\phi^{s_n}$  i  $\phi^{t_n}$

4.  $\omega(x^t)$  zawiera trajektorię okresową.

*Dowód.* Weźmy  $z \in \omega(x^t)$  i trajektorię  $z^t = \phi^t(z)$  będącą granicą trajektorii  $\phi^t(x_n)$ ,  $x_n \rightarrow z$ ,  $x_n = \phi^{t_n}(x)$ . Można w tym celu wybrać podciąg trajektorii jednostajnie zbieżny na zwartych rosnących do nieskończoności, odcinkach czasu, korzystając z jednakowej ciągłości rodziny funkcji  $\{\phi^t(x_n)\}$ <sup>1</sup>.

Niech  $y \in \omega(z^t)$ . Wtedy  $y \in \omega(x^t)$ , więc  $V(y) \neq 0$ . Istnieje więc lokalne cięcie tran-



Rysunek 1.8: Trajektoria  $z^t$

swersalne  $L$  przez  $y$ .  $z^t$  musi więc przecinać  $L$  dla nieskończenie wielu czasów  $s_n$ . Z (3) wszystkie  $\phi^{s_n}(z)$  przecinają  $L$  w  $y$ . Zatem  $\omega(x^t)$  zawiera okresową trajektorię zawartą w  $z^t$ , mianowicie  $z^t$  dla  $s_n \leq t \leq s_{n+1}$  dla dowolnego  $n$ .  $\square$

<sup>1</sup>patrz dowód tw. Peano.

5.  $\omega(x^t)$  jest trajekcją okresową.

*Dowód.* Załóżmy, że

$$\gamma = \{y(t) \mid 0 \leq t \leq t_1\}, \quad y = y(0) = y(t_1)$$

jest trajekcją okresową minimalnego okresu  $t_1$ , bez samoprzecięć (krzywą Jordana) zawartą w  $\omega(x^t)$ . Przypuśćmy, że  $\omega(x^t) \setminus \gamma \neq \emptyset$ . Wtedy ze spójności  $\omega(x^t)$  (ćwiczenie) wynika, że istnieje  $y \in \gamma$  (niekoniecznie to samo co wyżej, ale wygodnie jest użyć tego samego oznaczenia) będące punktem skupienia  $\omega(x^t) \setminus \gamma$ .

Jeśli  $L \ni y$  jest lokalnym cięciem transwersalnym, to istnieje  $y_1 \in \omega(x^t) \setminus \gamma$  takie, że dla pewnego  $t_0 \approx 0$ ,  $\phi^{t_0}(y_1) \in L$  dla pewnej trajektorii  $\phi^t(y_1) \subset \omega(x^t)$  (granicy pewnego ciągu trajektorii  $\phi^t(\phi^{t_n}(x))$ ,  $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y_1$ ,  $t_n \rightarrow \infty$ ). Zatem z punktu (3) (jednoznaczność przecięcia  $\omega(x^t)$  z  $L$ )

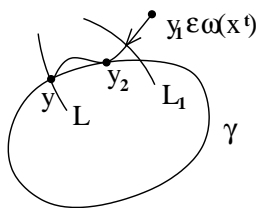
$$\phi^{t_0}(y_1) = y \in \gamma.$$

Założmy, że  $t_0 > 0$  (podobnie opisujemy przypadek  $t_0 < 0$ ).

Niech  $t_1$  będzie najmniejszą liczbą dodatnią taką, że

$$y_2 = \phi^{t_1}(y_1) \in \gamma.$$

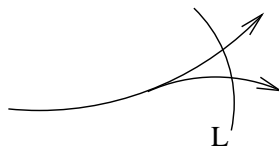
Wtedy dla  $t_2 < t_1$  odpowiednio bliskiego  $t_1$  cięcie transwersalne  $L_1 \ni \phi^{t_2}(y_1)$  przecina także  $\gamma$ , co daje sprzeczność z jednoznacznością w (3).  $\square$



Rysunek 1.9: Cięcia transwersalne  $L$  i  $L_1$

Punkt 5 kończy dowód części 1 Tw. Poincare'go-Bendixsona.  $\square$

*Uwaga 1.14.* W punkcie 5 dowodu zawarty jest dowód jednoznaczności rozwiązań problemu Cauchy'ego dla warunków początkowych i rozwiązań w  $\omega(x^t)$ .



Rysunek 1.10: Rozgałęzienie rozwiązań

Faktycznie, rozgałęzienie nie jest możliwe z punktu 3 dowodu. Wiemy już nawet więcej:  $\omega(x)$  jest trajekcją okresową  $\gamma$ .

Jeśli trajektorie  $\gamma_1(t)$  i  $\gamma_2(s)$  pokrywają się jako zbiory, to

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{d\gamma_2}{ds} = V(z) \text{ jeśli } \gamma_1(t) = \gamma_2(s).$$

Zatem

$$\frac{d\gamma_1^{-1}\gamma_2}{ds} = 1,$$

co przy założeniu, że  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  daje jednoznaczność.

Skorzystaliliśmy tu z założenia, że  $\forall z \in \gamma \quad V(z) \neq 0$ ; bez tego rozumowanie byłoby błędne, a teza fałszywa. Trajektoriami mogłyby na pewien czas zatrzymać się w zerze  $V$ , a potem iść dalej wzdłuż  $\gamma$ .

*Dowód. (części 2)*

Dla  $x \in L \cap x^t$ ,  $z \rightarrow y \in \gamma$ , zbieżność  $\phi^t(z)$  (trajektorii zawartych w  $x^t$ ) do  $\gamma$  wynika z jednoznaczności, podciągi zbieżne zbiegają bowiem do trajektorii zawartych w  $\omega(x^t)$ . Za  $s_n$  można przyjąć ciąg kolejnych przecięć  $x^t$  z  $L$ .  $\square$

### Wnioski

1. W przypadku  $V \in C^1$  (jednoznaczność rozwiązań) udowodniliśmy, że zwartymi podzbiórmi minimalnymi mogą być tylko punkty (zera  $V$ ) i trajektorie okresowe. Zbiór minimalny jest postaci

$$A = \omega(x), \quad x \in A,$$

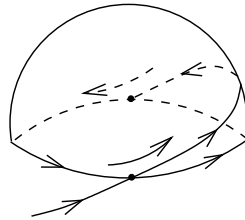
jeśli nie zawiera zer  $V$  jest trajektorią okresową z Tw. P-B.

2. Jeśli  $V \in C^1$  to Tw. P-B jest prawdziwe dla obszaru  $U$  pola  $V$  w płaszczyźnie rzutowej

$$\mathbb{P}^2 = S^2/x \sim -x.$$

*Dowód.* Podnieśmy trajektorię  $\phi^t(x)$  do  $S^2$ . Będzie to jedna lub dwie trajektorie. Ich zbiory graniczne  $\gamma_1$  lub  $\gamma_1, \gamma_2$  rzutują się na  $\mathbb{P}^2$  (przez utożsamienie  $x \sim -x$ ) do jednej trajektorii  $\gamma$  okresowej na  $\mathbb{P}^2$  (bo  $\gamma_1 = -\gamma_2$ , bo podniesienie potoku komutuje z  $x \sim -x$ ).  $\square$

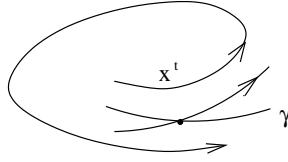
*Uwaga 1.15.* Jeśli nie zakładamy  $V \in C^1$ , przy braku jednoznaczności rozwiązań,  $\gamma$  może mieć samoprzecięcie,  $\omega(x^t)$  może być "ósemką".



Rysunek 1.11: Górna półsfera

Wróćmy teraz do  $x^t \subset S^2$

**Twierdzenie 1.16.** *Załóżmy, że  $V \in C^1$ . Od strony, z której  $\phi^t(x)$  nawija się na trajektorię okresową  $\gamma = \phi^t(y)$  mamy stabilność asymptotyczną.*



Rysunek 1.12:  $\mathbb{P}^2$

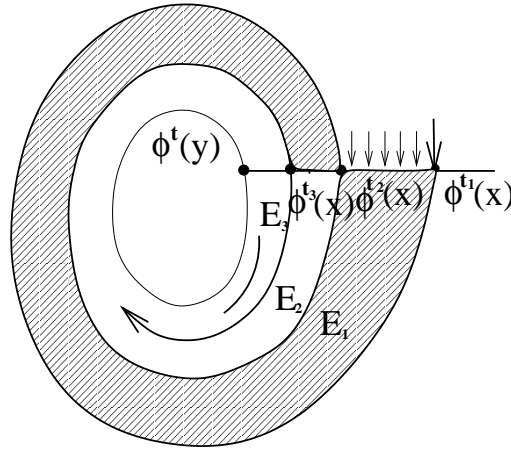
*Dowód.* Niech  $E_n$  będzie obszarem ograniczonym krzywą Jordana zbudowaną z

$$\phi^t(x), t_n \leq t \leq t_{n+2}$$

oraz łuków

$$(\phi^{t_n}(x), \phi^{t_{n+1}}(x)) \text{ i } (\phi^{t_{n+1}}(x), \phi^{t_{n+2}}(x)) \text{ w } L$$

Dokładniej: to nie jest krzywa Jordana bo jest sklejenie w  $\phi^{t_{n+1}}(x)$ , ale to nie psuje dowodu.



Rysunek 1.13: Obszar  $E_1$

$\bigcup E_n \cup \phi^t(x)$  wypełnia jedną stronę trajektorii okresowej.

Dla  $z \in E_n$ ,  $\phi^t(z)$  dla  $t \rightarrow \infty$  ucieka z  $E_n$  do  $E_{n+1}$  (i dalej do  $E_k$ ,  $k \rightarrow \infty$ ). W przeciwnym razie  $\omega(z) \subset \overline{E_n}$ . Ponieważ w  $\overline{E_n}$  nie ma punktów stałych dla dużych  $n$  (bo jesteśmy blisko  $\phi^t(y)$ )  $\omega(z)$  jest trajektorią okresową w  $E_n$  i jedna ze składowych, na które rozcina  $S^2$  leży w  $E_n$ . Wtedy  $\phi^t$  ma w niej punkt stały  $q_t \forall t > 0$ . Punkt skupienia  $q_t$  dla  $t \rightarrow 0$  musi być zerem pola  $V$ , bo

$$V(q_t) = V(q_t) - \frac{\phi^t(q_t) - q_t}{t} \rightarrow 0.$$

Sprzeczność. □

*Uwaga 1.17.* Można nie zakładać, że  $V \in C^1$ . Wtedy na przykład wystarczy założyć, że w  $x^t$  jest jednoznaczność rozwiązań, lub przynajmniej, że  $x^t$  nie ma samoprzebiegów, zastępując w tezie  $\phi^t(z) \rightarrow \gamma$  tezę, że istnieje trajektoria  $\phi^t(z)$ ,  $\phi^0(z) = z$  taka, że  $\phi^t(z) \rightarrow \gamma$ .

**Ćwiczenia:**

*Ćwiczenie 1.18.* Dla równania różniczkowego

$$\dot{x} = V(x), V \text{ ciągłe,}$$

ciągła zależność rozwiązań od warunku początkowego jest równoważna jednoznaczności rozwiązań przy danym warunku początkowym (to znaczy jednoznaczności rozwiązań problemu Cauchy'ego).

*Ćwiczenie 1.19.* (Tw. Knesera, patrz [Hartman], trudne dla  $m > 1$ ) Pokazać, że dla równania różniczkowego zwyczajnego

$$\dot{x} = V(x, t), x \in \mathbb{R}^m, V \text{ ciągłe i ograniczone na } \mathbb{R}^{m+1}$$

$$\forall t \quad \{x(t) \mid x(t_0) = x_0\} \text{ jest zwarty i spójny.}$$

(zbiór wszystkich punktów  $x$ , dla których istnieje rozwiązanie  $x(s)$  problemu Cauchy'ego  $x(t_0) = x_0$  przy ustalonych  $t_0, x_0$  takie, że  $x(t) = x$ .)

## 1.1. Dodatek. Twierdzenie Hadamarda-Perrona, $\lambda$ -lemat Palisa.

### Przypomnienie z równań różniczkowych zwyczajnych (z II roku)

#### Twierdzenie 1.20. Hadamarda-Perrona

Jeśli  $V$  pole wektorowe klasy  $C^r$  na  $\mathbb{R}^m$ ,  $r \geq 1$ ,  $0 \in \mathbb{R}^m$  i dla  $DV(0)$  wartości własne mają niezerowe części rzeczywiste, tzn.  $0$  jest zerem hiperbolicznym dla  $V$ , to

•

$$W_\epsilon^s = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall t > 0 \ |\phi^t(x)| < \epsilon\}$$

•

$$W_\epsilon^u = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall t < 0 \ |\phi^t(x)| < \epsilon\}$$

są zanurzonymi rozmaitościami różniczkowymi klasy  $C^r$  dla  $\epsilon > 0$  dostatecznie małego. ( $\phi^t$  to potok  $\frac{d\phi^t}{dt} = V$ ).

Jeśli w bazie postaci Jordana dla  $DV(0)$   $E^s$  to suma podprzestrzeni odpowiadających klatkom Jordana wartości własnych  $\{Re < 0\}$ , a  $E^u$  -  $\{Re > 0\}$ , to

•

$W_\epsilon^s$  jest styczne do  $E^s$

$$\forall x \in W_\epsilon^s, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(|\phi^t(x)|)}{t} \leq \lambda^s,$$

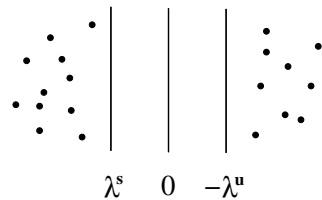
gdzie  $\lambda^s = \max \{ \lambda \mid \lambda \text{ wartość własna } DV, Re \lambda < 0 \}$

•

$W_\epsilon^u$  jest styczne do  $E^u$

$$\forall x \in W_\epsilon^u \limsup_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log(|\phi^t(x)|)}{|t|} \leq \lambda^u,$$

gdzie  $\lambda^u = -\min \{ \lambda \mid \lambda \text{ wartość własna } DV, Re \lambda < 0 \}$



Rysunek 1.14: Wartości własne  $DV(0)$

Analogiczne twierdzenie prawdziwe jest dla dyfeomorfizmu  $f$  klasy  $C^r$  w otoczeniu  $0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $f(0) = 0$ . Wtedy zakładamy, że dla  $Df(0)$  wartości własne mają moduły  $\neq 1$ .

Szkic dowodu był podany na wykładzie z Równań Różniczkowych Zwyczajnych wiosną 2000 r.

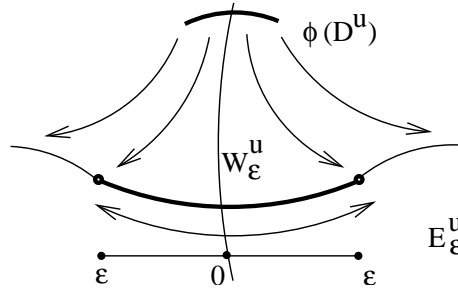
#### Twierdzenie 1.21. $\lambda$ -lemat Palisa

Jeśli

$$\Phi : D^u \rightarrow \mathbb{R}^m$$

jest  $u = \dim E^u$ -wymiarowym małym dyskiem zanurzonym w  $\mathbb{R}^m$  transwersalnie przecinającym  $W_\epsilon^s$ , to

$$\phi^t(\Phi(D^u)) \rightarrow W_\epsilon^u \text{ w } C^r \text{ przy } t \rightarrow \infty.$$



Rysunek 1.15: Obrazy dysku  $D^u$  pod działaniem  $\phi^t$

(Dla dużych  $t$  przez  $\phi^t(\Phi(D^u))$  rozumiemy obraz przy  $\phi^t$  dysku  $\Phi(D^u)$  obcięty tak, żeby mieć wykres z  $E_\epsilon^u$  do  $E^s$ ).

$\phi^t$  “rozpłaszcza”  $\Phi(D^u)$  na  $W_\epsilon^u$ .

*Uwaga 1.22.* W powyższych rozważaniach dotyczących Tw. Hadamarda-Perrona, należy rozpatrywać szczególną normę  $|\cdot|$  w  $\mathbb{R}^m$ , na przykład pochodzącą od iloczynu skalarnego takiego, że  $E^s$  i  $E^u$  są do siebie prostopadłe i

•

$$\|D\phi^t|_{E^s}\| < 1, t > 0$$

•

$$\|D\phi^t|_{E^u}\| < 1, t < 0$$

Wystarczy na przykład wziąć dla każdej klatki postaci Jordana  $DV$  bazę taką, że klatka jest postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & \epsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & \epsilon \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

i w niej euklidesowy iloczyn skalarny ( $\epsilon$  odpowiednio małe), a przestrzenie odpowiadające różnym klatkom prostopadłe do siebie<sup>2</sup>.

**Definicja 1.23.**  $V$  pole klasy  $C^1$  na rozmaitości  $M$ ,  $V(x) = 0$ .

• **Globalna rozmaitość stabilna**

$$W^s = \{y \mid \phi^t(y) \rightarrow x \text{ dla } t \rightarrow \infty\}$$

• **Globalna rozmaitość niestabilna**

$$W^u = \{y \mid \phi^t(y) \rightarrow x \text{ dla } t \rightarrow -\infty\}$$

**Twierdzenie 1.24.** Załóżmy, że  $x$  jest punktem stałym (zerem) hiperbolicznym, to znaczy dla  $DV(x)$  wartości własne mają niezerowe części rzeczywiste. Wtedy  $W^s(x)$ ,  $W^u(x)$  są immersyjnymi zanurzeniami przestrzeni euklidesowych.

<sup>2</sup>Porównaj konstrukcję funkcji Lyapunowa, Wykład 12, Równania Różniczkowe Zwyczajne wiosna 2000



Dowód.

$$W^s(x) = \bigcup_{t < 0} \phi^t(W_\epsilon^s(x))$$

$$W^u(x) = \bigcup_{t > 0} \phi^t(W_\epsilon^u(x))$$

gdzie  $W_\epsilon^s(x) : \phi^{-1}(W_\epsilon^s)$  dla  $\phi$  mapy przeprowadzającej  $x$  na  $0 \in \mathbb{R}$  (mapy będą omówione na następnym wykładzie).

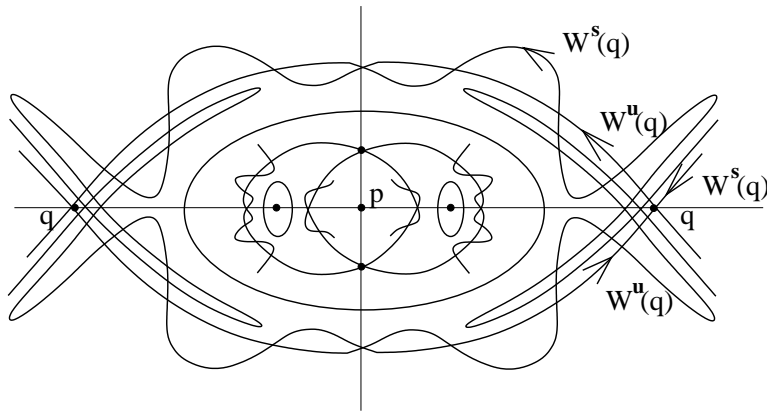
Więcej szczegółów będzie podanych w Wykładzie 5. □

Analogiczną definicję można podać dla dyfeomorfizmu  $f$  i punktu stałego  $f(x) = x$ .

*Przykład 1.25.* Zaburzamy z okresem 1 równanie wahadła

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$$

Przed zaburzeniem przestrzenią fazową jest  $S^1 \times \mathbb{R}$ ,  $x \in S^1$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Po zaburzeniu dochodzi czas  $t$ , z uwagi na okresowość zaburzenia  $t \in S^1$ , czyli przestrzenią fazową jest  $S^1 \times \mathbb{R} \times S^1$ .  $S^1 \times \mathbb{R}$  jest globalnym cięciem transwersalnym, powrót po czasie 1. Możemy otrzymać następujący obraz fazowy:



Rysunek 1.16: Obraz fazowy zaburzonego równania wahadła



## Wykład 2

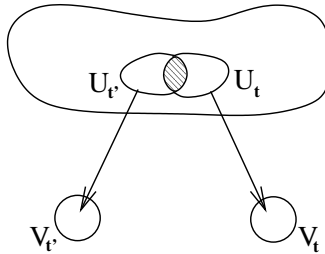
# Rozmaitości różniczkowe. Indeks pola w punkcie.

Opiszę dokładniej konstrukcję **zawieszenia** (suspension).  
Najpierw przypomnę

**Definicja 2.1. Rozmaitość różniczkowa** (bez brzegu). Niech  $M$  to przestrzeń topologiczna, Hausdorffa.  $M$  nazywamy rozmaitością różniczkową wymiaru  $m$ , klasy  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . jeśli istnieje rodzina homeomorfizmów  $\phi_t : U_t \rightarrow V_t$ , gdzie  $U_t$  to otwarte podzbiory  $M$ ,  $V_t$  to kule w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^m$  (może być to kula jednostkowa  $\|x\| < 1$ ) takie, że

$$\bigcup_t U_t = M, \forall t, t' \phi_{t'} \circ \phi_t^{-1} \in C^r,$$

gdzie  $\phi_{t'} \circ \phi_t^{-1}$  jest rozważane tam gdzie ma sens, to znaczy na  $\phi_t(U_t \cap U_{t'})$ .



Rysunek 2.1: Mapy  $\phi^t$  na zbiorach  $U_t$

Przekształcenia  $\phi_t : U_t \rightarrow V_t$  to tak zwane **mapy**. Rodzinę  $\{\phi_t\}$  nazywa się **atlasem**. Jeśli oznaczamy rozmaitość przez  $M^m$ , to oznacza to, że jej wymiar jest równy  $m$ .

*Uwaga 2.2.* Czasem zakłada się w definicji rozmaitości parazwartość (patrz Dodatek 1).

**Definicja 2.3. Wektor styczny** do  $M$  w punkcie  $x \in M$  to klasa równoważności krzywych  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  jeśli dla pewnej mapy  $\phi_t : U_t \rightarrow V_t$  takiej, że  $U_t \supset \gamma_1, \gamma_2$  mamy

$$\frac{d(\phi_t \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(\phi_t \circ \gamma_2)}{dt}(0).$$

Po obłożeniu różniczką  $D(\phi_t \circ \phi_t^{-1})$  widać, że ta równość zachodzi w każdej mapie, której dziedzina zawiera  $x$ . Można zatem zbiór wektorów stycznych w  $x \in M$  zdefiniować jako zbiór wektorów stycznych do  $V_t \subset \mathbb{R}^m$  w  $\phi_t(x)$ . To daje na tym zbiorze strukturę przestrzeni liniowej. Ponieważ  $D(\phi_{t'} \circ \phi_t^{-1})$  jest liniowe, ta struktura nie zależy od mapy.

**Definicja 2.4. Przestrzeń styczna**  $T_x M$  to zbiór wektorów stycznych do  $M$  w  $x$  z opisana wyżej strukturą przestrzeni liniowej.

**Definicja 2.5. Pole wektorowe**  $V(x)$  to przyporządkowanie każdemu  $x \in M$  wektora stycznego  $V(x) \in T_x M$ .

Mówimy, że pole jest klasy  $C^r$ , jeśli w każdej mapie przyporządkowanie jest klasy  $C^r$ . Mówimy, że krzywa  $\gamma(t)$  spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t))$$

jeśli  $\forall t_0 \gamma(t+t_0) \in V(\gamma(t_0))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Traktujemy tu  $V(\gamma(t_0))$  jako klasę równoważności krzywych. Można też było napisać  $d\phi_t \circ \gamma/dt = V(\phi_t \circ \gamma)$ . (Pechowo w tym wzorze  $t$  jest użyte w dwóch różnych znaczeniach.)

**Definicja 2.6. Dzielenie przez działanie grupy**

Założmy, że na  $C^r$ -rozmaitości działa grupa  $C^r$ -dyfeomorfizmów  $G$  w sposób całkowicie nieciągły, to znaczy

$$\forall x \in M \exists U_x \ni x, \text{ otwarte otoczenie, takie, że}$$

$$\forall g \in G \ g \neq id, \quad g(U_x) \cap U_x = \emptyset.$$

Można wtedy rozważać rozmaitość ilorazową  $M/G$ . Jeśli oznaczymy utożsamienie symbolem  $P : M \rightarrow M/G$ , to  $\forall z \in M/G$  możemy wziąć dowolne  $x \in P^{-1}(z)$  i mapę  $\psi_t : P(U_t) \rightarrow V_t$  gdzie  $\psi_t = \phi_t \circ P^{-1}$  dla dowolnej mapy  $\phi_t : U_t \rightarrow V_t$ ,  $U_t \ni x$ ; dokładniej zamiast  $U_t$  rozważamy  $U_t \cap U_x$ .  $P^{-1}$  oznacza gałąź  $P^{-1}$  taką, że  $P^{-1}(z) = x$ . Korzystamy z tego, że  $P$  na  $U_x$  jest  $1-1$ .

Jeśli  $\forall g \in G$  mamy też dla pewnego pola wektorowego  $V$  na  $M$

$$Dg(V(x)) = V(g(x)),$$

to można to pole przenieść na  $M/G$ .

**Definicja 2.7. Zawieszenie**  $f : M \rightarrow M$  definiujemy jako rozmaitość  $M \times \mathbb{R}/G$ , gdzie  $G$  to grupa automorfizmów iloczynu kartezjańskiego  $M \times \mathbb{R}$  w siebie, iteracji dyfeomorfizmu

$$(x, t) \mapsto_\phi (f(x), t - 1).$$

Ponieważ  $D\phi(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}$  otrzymujemy pole wektorowe, więc i potok na  $M \times \mathbb{R}/G$ .

**Przykład 1.**

Bierzemy ośmiokąt hiperboliczny w dysku

$$\{z \mid |z| < 1\} = \mathbb{D}$$

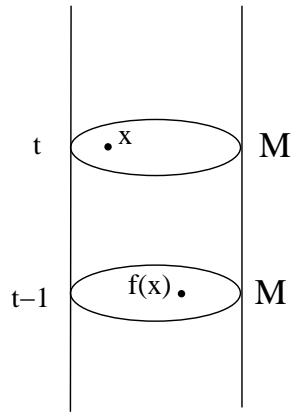
o kątach  $\frac{\pi}{4}$ . Dla grupy  $G$  generowanej przez 4 homografie zachowujące  $\mathbb{D}$  takie, że

$$g_a(a) = a', \quad g_b(b) = b', \quad g_c(c) = c', \quad g_d(d) = d'$$

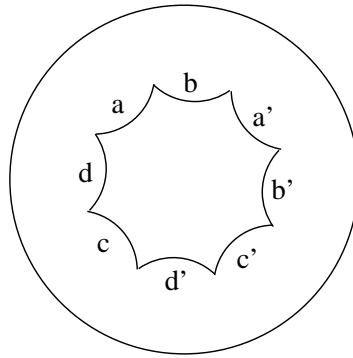
otrzymujemy

$$\mathbb{D}/G = \text{"precelek"}.$$

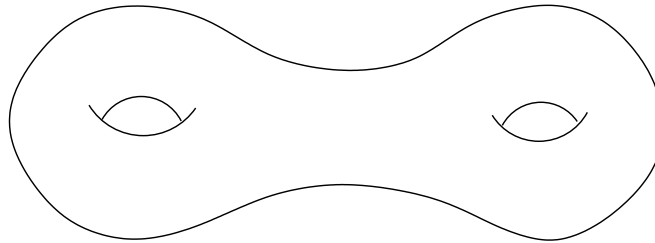
**Przykład zawieszeń:**



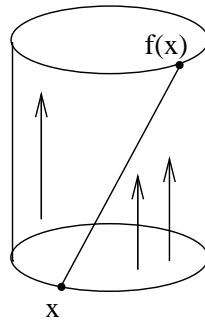
Rysunek 2.2: Rozmaitość  $M \times \mathbb{R}$



Rysunek 2.3: Ośmiokąt hiperboliczny



Rysunek 2.4: Precelek



Rysunek 2.5: Zawieszenie obrotu na okręgu

1. Zawieszenie obrotu okręgu o kąt niewymierny daje obmotkę na torusie

$$\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1.$$

2. Zawieszenie  $f : x \mapsto -x$  na  $S^1$  daje potok na butelce Kleina. Tak jak  $f$  mamy jedną orbitę okresu 1, a pozostałe mają okres 2.

**Twierdzenie 2.8.** *Jeśli  $M$  jest zwartą spójną rozmaitością i zwarta rozmaitość  $N \subset M$  jest cięciem transwersalnym dla pola  $V$  na  $M$  i*

$$\forall x \in N \exists t_1 \phi^{t_1}(x) \in N,$$

*to  $N$  jest globalnym cięciem transwersalnym, to znaczy*

$$\forall x \in M \exists t_1, t_2 > 0 \phi^{t_1}(x) \in N, \phi^{-t_2}(x) \in N.$$

*Dowód.* Czas pierwszego powrotu:  $t_1(x) > 0$  dla  $x \in N$  taki, że  $\phi^{t_1(x)}(x) \in N$  jest funkcją ciągłą, zatem ograniczoną. Funkcja

$$f(x) = \phi^{t_1(x)}(x)$$

jest ciągłym injektywnym przekształceniem (nawet  $C^r$  jeśli  $V \in C^r$ )  $N$  w  $N$ . Stąd wynika, że  $f$  jest "na".

(Faktycznie,  $f$  jest regularne, to znaczy  $Df(x)$  jest izomorfizmem  $\forall x \in N$  (ćwiczenie), zatem  $f(N)$  podrozmaitością zwartą w  $N$ , bez brzegu, wymiaru takiego jak  $N$ . Wtedy, jeśli założymy, że  $f$  nie jest "na" i  $N$  jest spójna to  $f(N)$  na niepusty brzeg topologiczny i wokół punktu takiego brzegu nie może być w  $f(N)$  otoczenia, na którym jest mapa. Jeśli  $N$  nie jest spójne, to  $f$  permutuje jego składowe, których ze zwartości  $N$ , jest skończenie wiele.)

Zatem na  $N$  określony jest ciągły i ograniczony czas pierwszego powrotu w tył

$$\phi^{-t_2}(x) \in N, t_2(x) > 0.$$

Mamy

$$Z = \{ y \in M \mid \exists t \in \mathbb{R}, \phi^t(y) \in N \} \text{ otwarty.}$$

Ten zbiór jest też jednak domknięty, bo jest postaci

$$\{ \phi^t(x) \mid x \in N, |t| \leq C \},$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą, taką, że

$$C \geq \sup_{x \in N} t_1(x), \sup_{x \in N} t_2(x).$$

Zatem  $Z$  jest otwarto-domknięty, jest więc równy  $M$ .

Wreszcie, jeśli  $\phi^{t_0}(y) = x \in N$  to

$$\phi^{t_0+t_n}(y) \in N, \text{ gdzie } t_n \text{ to } n - \text{ty czas powrotu } x \text{ do } N \text{ w przód lub w tył.}$$

Przy  $n$  dostatecznie dużym  $t_0 + t_n$  jest dodatnie lub ujemne. □

Będziemy dowodzili na następnym wykładzie

**Twierdzenie 2.9.** Dla pola klasy  $C^1$  bez zer (potoku bez punktów stałych) na torusie  $\mathbb{T}^2$ , przy dodatkowym założeniu, że nie ma orbit okresowych, istnieje globalne cięcie transwersalne.

*Uwaga 2.10.* Rozmaitość zwarta wymiaru 2, na której istnieje pole bez zer musi być torusem lub butelką Kleina.

Wynika to z następującego

**Twierdzenie 2.11. Poincaré’go-Hopfa**

Dla ciągłego pola  $V$  na zwartej orientowalnej rozmaitości  $M$ , które ma tylko izolowane zera (zatem skończenie wiele zer) zachodzi wzór

$$\sum_{x: V(x)=0} \text{ind}_x V = \chi(M)$$

**Definicje**

1.  $\chi(M)$  to charakterystyka Eulera

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^k \beta_k,$$

gdzie  $\beta_k$  to liczby Betti’ego.  $\beta_k$  to wymiar  $k$ -tej grupy homologii o współczynnikach w  $\mathbb{R}$ ,  $H_k(M, \mathbb{R})$ .

(Można też na przykład policzyć  $\chi(M)$  przedstawiając  $M$  jako wielościan. Wtedy

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k a_k,$$

gdzie  $a_k$  to liczba ścian wymiaru  $k$ .)

2.  $\text{ind}_x V$  to indeks pola  $V$  w punkcie  $x$ .

W dowolnej mapie, przyjmując, że  $x = 0 \in \mathbb{R}^m$  i  $V$  jest funkcją z otoczenia  $0$  w  $\mathbb{R}^m$ , bierzemy dowolnie małe  $r > 0$  i przekształcenie z sfery jednostkowej  $S^{m-1}$  w siebie

$$\Phi(z) = \Phi_{S^{m-1}}(z) = \frac{V(rz)}{\|V(rz)\|}.$$

(To przekształcenie ma sens, bo  $V(rz) \neq 0$  jeśli  $\|z\| = 1$  i  $r$  jest dostatecznie małe, bo  $x$  jest izolowanym zerem  $V$ .)

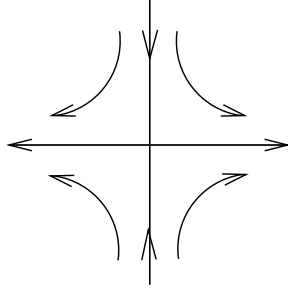
Definiujemy  $\text{ind}_x V$  jako stopień przekształcenia  $\Phi$ , tzn.  $\text{ind}_x V := \text{deg} \Phi$ .

*Ćwiczenie 2.12.*  $\text{ind}_x V$  nie zależy od mapy i nie zależy od  $r$ .

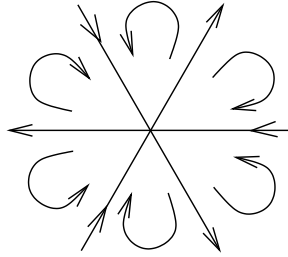
Ta definicja nie zależy od przyjętej na  $S^{m-1}$  orientacji. Definicje stopnia przekształcenia oraz dowód twierdzenia Poincaré’go-Hopfa są podane w Dodatku 2 do tego wykładu.

**Przykłady:**

- Dla siodła w  $0 \in \mathbb{R}^2$  mamy  $\text{ind}_0 V = -1$ .
- Dla centrum lub ogniska w  $0 \in \mathbb{R}^2$  mamy  $\text{ind}_0 V = 1$ .
- Jeśli  $V$  (nieliniowe) ma  $k$  sektorów eliptycznych, to  $\text{ind} V = \frac{k}{2} + 1$ . Np.  $V(z) = z^s$  dla  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ma indeks  $\text{ind}_0 V = s$ , bo stopień przekształcenia okręgu  $e^{i\tau} \mapsto e^{is\tau}$  jest równy  $s$ .  
Proszę sprawdzić, że dla  $V(z) = \bar{z}^s$  mamy  $\text{ind}_0 V = -s$ .



Rysunek 2.6: Siodło



Rysunek 2.7: Sektory eliptyczne

Twierdzenie Poincaré'go-Hopfa wynika z następującego **wzoru Lefschetza**

**Twierdzenie 2.13.** *Jeśli  $f: M \rightarrow M$  jest homeomorfizmem orientowalnej zwartej rozmaitości w siebie i ma tylko izolowane punkty stałe (oznaczymy zbiór punktów stałych przez  $Fix(f)$ ), to*

$$\sum_{x \in Fix(f)} ind_x(f) = \sum (-1)^k tr(f_{*k}: H_k(M, \mathbb{R})).$$

( $tr(f_{*k}: H_k(M, \mathbb{R}))$  oznacza ślad operatora liniowego  $f_{*k}$ , generowanego przez  $f$  w grupie homologii wymiaru  $k$  o współczynnikach w  $\mathbb{R}$ .)

W mapie, gdzie można przyjąć  $x = 0$  definiujemy

$$ind_x V = deg \Phi, \text{ gdzie } \Phi(z) = \frac{f(rz) - rz}{\|f(rz) - rz\|} \text{ przekształcenie } S^{m-1} \text{ w } S^{m-1}.$$

**Wynikanie twierdzenia Poincaré'go-Hopfa z wzoru Lefschetza**

*Dowód.* (przy założeniu, że blisko  $x$  nie ma orbit zamkniętych o dowolnie krótkim okresie.)

Mamy dla  $x$  takiego, że  $V(x) = 0$

$$ind_x V = ind_x \phi^t, \text{ gdzie } \dot{\phi}^t = V \tag{2.1}$$

dla  $t$  dostatecznie małych, żeby nie było blisko 0 orbit zamkniętych okresu  $\leq t$ .

Faktycznie, dla dowolnie ustalonego małego  $r > 0$  i  $|y| = 1$

$$\frac{\phi^t(ry) - ry}{\|\phi^t(ry) - ry\|} \text{ jest homotopijne } \frac{V(ry)}{\|V(ry)\|}$$

skąd wynika (2.1). Przekształcenie  $\phi^t$  jest homotopijne identyczności na  $M$ , więc  $\phi_{*k}^t$  jest operatorem identycznościowym,

$$tr(\phi_{*k}^t) = \dim H_k(M, \mathbb{R}) = \beta_k.$$



Zatem wzór Lefschetza dla  $\phi^t$  daje dla  $V$  wzór Poincaré'go-Hopfa

$$\sum_{x: V(x)=0} \text{ind}_x V = \sum_k (-1)^k \beta_k = \chi(M).$$

□

## 2.1. Dodatek 1. Parazwartość

W definicji rozmaitości różniczkowej  $M^n$  oprócz własności Hausdorffa i istnienia atlasu  $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  takiego, że  $\phi_{\alpha_1}^{-1} \phi_{\alpha_2}$  są gładkie zakłada się czasem **parazwartość**  $M^n$  jako przestrzeni topologicznej. (W tym cyklu wykładów nie będziemy tej własności wykorzystywać).

### Bibliografia:

R. Engelking, K. Sieklucki “Wstęp do topologii”.

**Definicja 2.14.** Rodzinę  $\{A_t\}$  podzbiorów przestrzeni topologicznej  $X$  nazywamy **lokalnie skończoną**, jeśli

$(\forall x \in X) (\exists U)$  otoczenie otwarte  $x$  takie, że zbiór  $\{t \mid U \cap A_t \neq \emptyset\}$  jest skończony.

**Definicja 2.15.** Przestrzeń topologiczną  $X$  nazywamy **parazwartą** jeśli jest przestrzenią Hausdorffa i w każde pokrycie zbiorami otwartymi  $\{U_t\}$  można wpisać pokrycie zbiorami otwartymi  $\{V_s\}$  lokalnie skończone.

(Wpisać to znaczy  $\forall s \exists t V_s \subset U_t$ .)

Jako ćwiczenie proponuję udowodnić:

**Twierdzenie 2.16.** *Przestrzeń topologiczna z przeliczalną bazą (otoczeń) lokalnie zwarta (to znaczy  $\forall x \exists U$  otoczenie  $x$  takie, że domknięcie  $\bar{U}$  jest zwarte) jest parazwarta.*

**Twierdzenie 2.17.** *Każda przestrzeń parazwarta jest normalna, to znaczy*

$(\forall A, B \text{ domkniętych } A \cap B = \emptyset) (\exists U, V \text{ otwarte}) \text{ takie, że } U \cap V = \emptyset \text{ i } A \subset U, B \subset V.$

Trochę trudniej udowodnić

**Twierdzenie 2.18.** *Przestrzeń metryzowalna jest parazwarta.*

Parazwartość jest potrzebna do istnienia tak zwanych rozbić jedności o dowolnie małych nośnikach.

**Definicja 2.19.** Rodzinę  $\{f_t\}$  funkcji ciągłych przestrzeni topologicznej  $X$  w odcinek  $[0, 1]$  nazywamy **rozbiem (rozkładem) jedności**, jeśli  $\sum f_t \equiv 1$ .

Rozbicie jedności nazywamy **drobniejszym** od pokrycia  $\{U_s\}$  jeśli  $\forall t$  nośnik

$$\text{supp } f_t = \overline{\{x \in X \mid f_t(x) > 0\}}$$

jest zawarty w pewnym  $U_s$ .

**Twierdzenie 2.20.** *Jeśli  $X$  parazwarta to dla każdego pokrycia  $\{U_t\}$  zbiorami otwartymi istnieje drobniejsze od niego rozbicie jedności z rodziną nośników lokalnie skończoną.*

W przypadku parazwartej rozmaitości różniczkowej można skonstruować rozbicie jedności z funkcjami  $f_t$  klasy  $C^r$  (o ile rozmaitość jest  $C^r$ ,  $r = 1, \dots, \infty$ ).

Rozbicie jedności służy do przeprowadzania różnych konstrukcji globalnych, lokalnie (“po kawałku”). Przykładem jest dowód następującego ważnego twierdzenia:

### Twierdzenie 2.21. Whitneya

*Każdą różniczkową rozmaitość  $M^n$  można zanurzyć w  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

## 2.2. Dodatek 2. Tw. Poincare'go-Hopfa

**Definicja 2.22.** Rozmaitość różniczkowa  $M^n$  nazywa się **orientowalna**, jeśli istnieje atlas  $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  taki, że wszystkie przekształcenia  $\phi_{\alpha_1}^{-1}\phi_{\alpha_2}$  zachowują orientację w  $\mathbb{R}^n$ , to znaczy

$$\det(D(\phi_{\alpha_1}^{-1}\phi_{\alpha_2})) > 0.$$

Dla uporządkowanego układu  $n$  wektorów liniowo niezależnych w  $T_xM$  używa się nazwy  **$n$ -reper** (dla  $k \leq n$  wektorów liniowo niezależnych  **$k$ -reper**). Dwa takie układy nazywa się równoważnymi, jeśli wyznacznik macierzy przejścia od jednego do drugiego jest dodatni. Klasę równoważności nazywamy orientacją w  $T_xM$ . Można też orientację utożsamiać z iloczynem zewnętrznym  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  bazy w  $T_xM$  z dokładnością do dodatniej stałej.

**Definicja 2.23. Orientacja** w wiązce stycznej  $TM$  (i na rozmaitości  $M$ ) to ciągła klasa równoważności pól  $n$ -reperów, gdzie dwa pola  $n$ -reperów nazywamy równoważnymi jeśli są równoważne w każdym  $x \in M$ .

Te pojęcia uogólniają się do dowolnej wiązki wektorowej  $E$  nad  $M$ . Ciągłość klasy równoważności może być zdefiniowana np. jako możliwość ciągłego wyboru  $v_1(x) \wedge \dots \wedge v_n(x)$ . (To jest własność słabsza niż możliwość ciągłego wyboru repera, co oznaczałoby tzw. paralelizowalność wiązki !)

*Ćwiczenie 2.24.* Pokazać, że orientowalność  $M^n$  jest równoważna istnieniu  $n$ -formy różniczkowej na  $M^n$ , nie znikającej w żadnym punkcie.

**Definicja 2.25. Stopień przekształcenia**  $f: M^n \rightarrow N^n$  klasy  $C^1$ , dla rozmaitości zwartych  $M^n, N^n$ , obu wymiaru  $n$ , z ustaloną orientacją (**zorientowanych**), to

$$\deg f = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \operatorname{sgn} Df(y),$$

gdzie  $x$  jest dowolną wartością regularną, to znaczy  $\forall y \in f^{-1}(x)$

$Df(y)$  jest izomorfizmem  $T_yM^n$  w  $T_xN^n$ .

$$\operatorname{sgn} Df(y) = 1 \text{ lub } -1$$

zależnie od tego, czy  $Df(y)$  przekształca  $n$ -reper zgodny z orientacją w  $T_yM^n$  na  $n$ -reper zgodny z orientacją  $T_xN^n$  lub niezgodny.

*Uwaga 2.26.* 1. Tw. Sarda mówi, że prawie każdy (w sensie miary Lebesgue'a w mapach) punkt  $x \in N^n$  jest wartością regularną.

2. Stopień  $\deg f$  może być zdefiniowany dla dowolnej funkcji ciągłej  $f: M^n \rightarrow N^n$  jako stopień gładkiej funkcji  $g, C^0$  blisko  $f$ . Niezależność od wyboru  $g$  wynika z tego, że stopień jest taki sam dla funkcji homotopijnych (funkcje  $C^0$  bliskie są homotopijne). Wyjaśnimy to dalej.

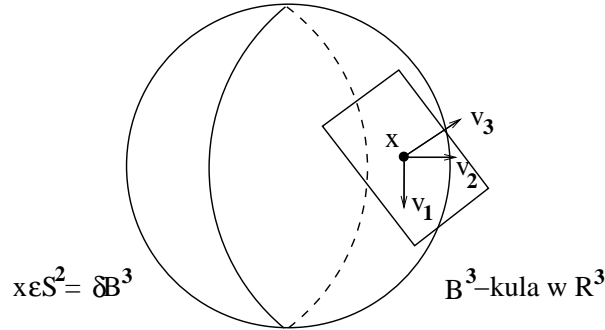
3. Sprawdźmy dalej, że ta definicja nie zależy od  $x$ .

**Definicja 2.27.**  $M^n$  nazywamy **rozmaitością różniczkową z brzegiem**  $\partial M^n$ , jeśli oprócz map  $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  istnieją mapy

$$\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} = \mathbb{R}_+^n.$$

**Brzeg**  $\partial M^n$  to zbiór punktów, które przez  $\phi_\alpha$  są przekształcane w brzeg  $\mathbb{R}_+^n = \{x_n = 0\}$ .

Jeśli na  $TM^n$  jest ustalona orientacja, to dla każdego  $x \in \partial M^n$  na  $T_x \partial M^n$  ustalamy orientację daną przez  $(n-1)$ -reper  $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_x \partial M^n$ , który uzupełniony wektorem  $v_n \in T_x M^n$  skierowanym “na zewnątrz”  $M^n$  daje reper  $(v_1, \dots, v_n)$  zgodny z orientacją  $T_x M^n$ . Tę orientację nazywamy **orientacją indukowaną** na  $\partial M^n$  przez wybraną orientację na  $M^n$ .



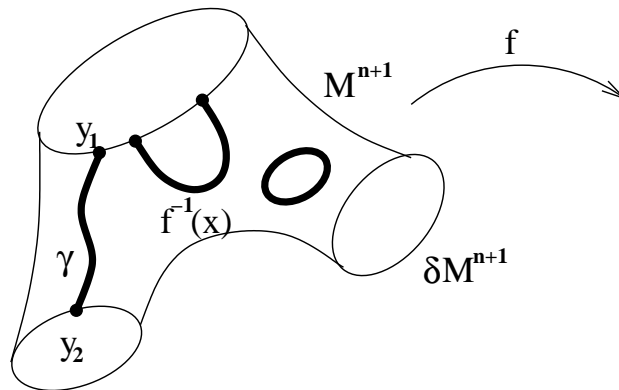
Rysunek 2.8: Kula w  $\mathbb{R}^3$

**Lemat 2.28.** *Jeśli  $f: M = M^{n+1} \rightarrow N^n$  jest klasy  $C^2$ ,  $M^{n+1}$ ,  $N^n$  to zorientowane rozmaitości,  $M^{n+1}$  ma brzeg  $\partial M^{n+1}$  z orientacją indukowaną przez orientację na  $M^n$ , a  $N^n$  to rozmaitość bez brzegu, to*

$$\deg f|_{\partial M^{n+1}} = 0.$$

*Dowód.* Silny wariant **Tw. Sarda** mówi, że jeśli  $f: M^{n_1} \rightarrow M^{n_2}$  jest przekształceniem klasy  $C^k$  rozmaitości  $n_1$ -wymiarowej w  $n_2$ -wymiarową (może być  $n_2 < n_1$ ), to jeśli  $k-1 \geq \max(0, n_1 - n_2)$ , to prawie każdy punkt w  $M^{n_2}$  jest wartością regularną (to znaczy  $\forall y \in f^{-1}(x)$  rząd  $Df(y)$  jest równy  $\min(n_1, n_2)$ ). W lemacie  $n_1 = n+1$ ,  $n_2 = n$ , więc  $k=2$  spełnia założenia Tw. Sarda. Weźmy  $x$  wartość regularną dla  $f$  i  $f|_{\partial M^{n+1}}$ . Z tw. o funkcjach uwikłanych wynika, że  $f^{-1}(x)$  jest rodziną krzywych klasy  $C^2$ , Jordana lub z końcami w  $\partial M^{n+1}$ .

Każda składowa  $\gamma$  zbioru  $f^{-1}(x)$  jeśli ma końce w  $\partial M^{n+1}$ , to dwa. Pokażemy, że w nich



Rysunek 2.9: Rozmaitość z brzegiem

$\text{sgn } Df$  ma przeciwne znaki. Wybierzmy w jednym końcu  $y_1$  reper  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  zgodny z orientacją  $M^{n+1}$ , taki, że  $v_{n+1}$  jest skierowany na zewnątrz i styczny do  $\gamma$ . ( $\gamma$  nie może być

styczne do  $\partial M^{n+1}$ , bo jeśli jest, to  $\ker Df|_{\partial M^{n+1}}(y_1) \neq \{0\}$ , więc  $x$  nie jest wartością regularną  $f|_{\partial M^{n+1}}$ . Zatem  $v_1, \dots, v_n$  ma orientację zgodną z orientacją  $\partial M^{n+1}$ . Możemy założyć, że  $Df(v_1), \dots, Df(v_n)$  ma orientację zgodną z orientacją  $N^n$ . (Np. zmieniając orientację na  $N^n$  jeśli trzeba.) Wybieramy wzdłuż  $\gamma$  reper  $v_1(y), \dots, v_n(y), v_{n+1}(y)$  taki, że zależność od  $\gamma$  jest ciągła oraz  $v_{n+1}(y)$  jest styczny do  $\gamma$ . Wtedy w drugim końcu  $\gamma$ , punkcie  $y_2$ , reper  $v_1(y_2), \dots, v_n(y_2), v_{n+1}(y_2)$  jest zgodny z orientacją  $M^{n+1}$ , ale  $v_{n+1}(y_2)$  jest skierowany do wewnątrz  $M^{n+1}$ , zatem  $v_1(y_2), \dots, v_n(y_2)$  ma orientację niezgodną z  $\partial M^{n+1}$ . Jednocześnie  $Df(v_1(y)), \dots, Df(v_n(y))$  ma orientację zgodną z  $N$ , z ciągłości  $Df$  i ciągłości orientacji wzdłuż krzywej. Zatem skoro, jak wyżej,  $\text{sgn } Df(y_1) = 1$ , to  $\text{sgn } Df(y_2) = -1$ .  $\square$

**Wniosek 2.29.** Jeśli  $f_0$  i  $f_1: M^n \rightarrow N^n$  są homotopijne i  $x$  jest wartością regularną dla  $f_0$  i  $f_1$ , to

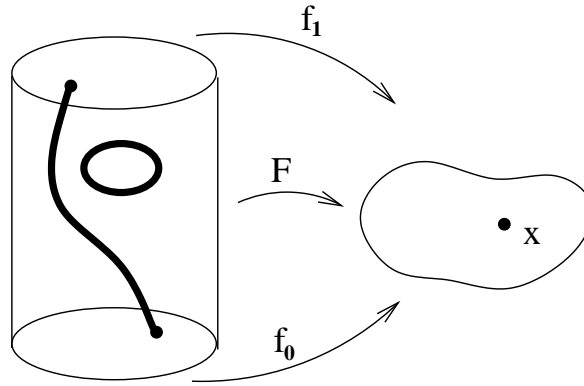
$$\sum_{y \in f_0^{-1}(x)} \text{sgn } Df_0(y) = \sum_{y \in f_1^{-1}(x)} \text{sgn } Df_1(y)$$

*Dowód.* Przybliżamy homotopię między  $f_0$  i  $f_1$  homotopią klasy  $C^2$ ,  $F: M^n \times [0, 1] \rightarrow N^n$ , taką, że

$$F_0 = F|_{M^n \times \{0\}} \approx_{C^1} f_0, \quad F_1 = F|_{M^n \times \{1\}} \approx_{C^1} f_1.$$

Blisko  $x$  istnieje wartość regularna dla  $F$ . Korzystamy z lematu (2.28). Należy zauważyć, że orientacje na  $M^n = M^n \times \{0\}$  i  $M^n = M^n \times \{1\}$  indukowane przez orientację na  $M^n \times [0, 1]$  są przeciwne (niezgodne).

Należy jeszcze zauważyć, że przy małej zmianie  $x$ , sumy  $\sum_{y \in f_0^{-1}(x)} \text{sgn } Df(y)$  nie zmieniają



Rysunek 2.10: Homotopia  $f_t$

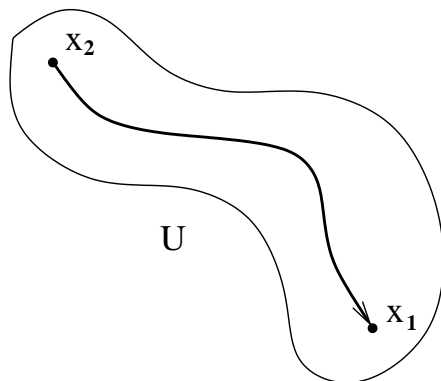
się. Również  $C^1$ -mała zmiana  $f_i$  na  $F|_{M^n \times \{i\}}$ , dla  $i = 0, 1$  nie wpływa na te sumy.  $\square$

**Wniosek 2.30.**  $\sum_{y \in f_0^{-1}(x)} \text{sgn } Df(y)$  nie zależy od wartości regularnej  $x$ .

*Dowód.* Jeśli  $x_1, x_2$  to wartości regularne  $f$ , to łączymy  $x_1$  i  $x_2$  krzywą bez samoprzebieć, bierzemy jej otoczenie  $U$ , topologiczny dysk i homotopię  $\phi_t: N^n \rightarrow N^n$  taką, że  $\phi_0 = id$ ,  $\phi_1(x_2) = x_1$ ,  $\phi_t = id$  poza  $U$  i  $\phi_1$  dyfeomorfizm. Wtedy  $x_1$  jest wartością regularną dla  $f$  i  $\phi_1 \circ f$ , i  $f$  jest homotopijne  $\phi_1 \circ f$ . Z Wniosku (2.29) i z tego, że

$$\sum_{y \in f^{-1}(x_2)} \text{sgn } Df(y) = \sum_{y \in f^{-1} \circ \phi_1^{-1}(x_1)} \text{sgn } D(\phi_1 \circ f)(y),$$

bo  $\phi_1$  zachowuje orientację na  $N^n$ , otrzymujemy tezę.  $\square$



Rysunek 2.11: Otoczenie  $U$

Stąd wynika poprawność definicji stopnia i indeksu pola w zerze. Możemy teraz udowodnić Tw. Poincaré'go-Hopfa.

**Lemat 2.31. (Poincaré.)** Załóżmy, że  $M^n$  jest podzmacnością z brzegiem, zwartą, w  $\mathbb{R}^n$ . Niech  $V$  będzie polem ciągłym na  $M^n$ , bez zer na  $\partial M^n$  i którego wszystkie zera w  $M^n$  są izolowane. Wtedy

$$\sum_{x \in M^n, V(x)=0} \text{ind}_x V = \text{deg } G_V(M^n), \quad (*)$$

gdzie dla  $x \in \partial M^n$  definiujemy

$$G_V(x) = \frac{V(x)}{\|V(x)\|},$$

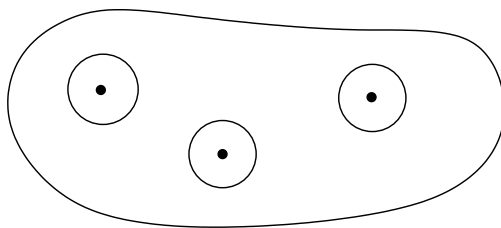
Założmy dodatkowo, że  $V$  na  $\partial M^n$  jest skierowane "na zewnątrz". Wtedy

$$\sum_{x \in M^n, V(x)=0} \text{ind}_x V = \text{deg } G(M^n), \quad (**)$$

gdzie  $G = G(M^n)$  to przekształcenie Gaussa

$$x \mapsto n(x), \quad x \in M^n, \quad G: \partial M^n \rightarrow S^{n-1}$$

oraz  $n(x)$  to wektor normalny do  $\partial M^n$  skierowany "na zewnątrz".



Rysunek 2.12: Kule o środkach w zerach pola

*Dowód.* (\*) wynika z lematu (2.28), zastosowanego do

$$M = M^n \setminus \bigcup_{V(x)=0} B(x, r),$$

gdzie  $r$  tak małe, żeby jedynym zerem w  $B(x, r)$  był punkt  $x$ , oraz z definicji indeksu pola w punkcie. Dla uzyskania (\*\*) można zastąpić  $G_V$  przez  $G$  bo są homotopijne (Wniosek (2.29)).  $\square$

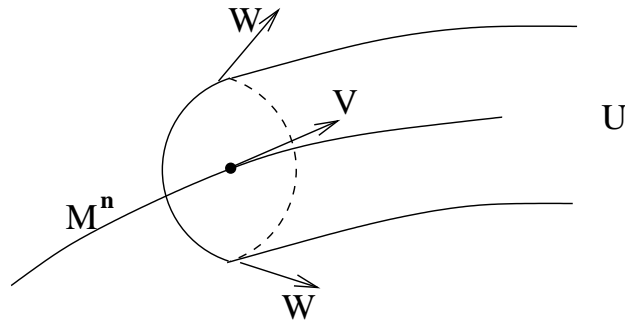
Kontynuujemy dowód Tw. Poincarego-Hopfa.

*Dowód.* Zanurzamy gładko  $M^n$  w  $\mathbb{R}^{2n+1}$  (jest to możliwe z Tw. Whitneya). Niech  $h(x) = \text{dist}(x, M^n)$ , gdzie  $\text{dist}$  oznacza odległość w metryce euklidesowej w  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Wtedy  $h^2$  jest gładką funkcją w odpowiednio małym otoczeniu  $M^n$ . Oznaczmy  $\pi(x)$  najbliższy do  $x$  punkt w  $M^n$ , znowu mamy jednoznaczność i gładkość  $\pi$  w małym otoczeniu  $M^n$ . Przy danym polu  $V$ , stycznym do  $M^n$ , pole

$$W(x) = \text{grad}(h^2) + \tilde{V}(x),$$

gdzie  $\tilde{V}(x)$  jest zdefiniowany jako wektor prostopadły do  $\ker(D\pi(x))$ , taki, że  $D\pi(x)\tilde{V}(x) = V(\pi(x))$ .

Niech  $U = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \text{dist}(x, M^n) < \epsilon\}$ . Dla odpowiednio małej liczby  $\epsilon$ ,  $U$  jest



Rysunek 2.13: Otoczenie  $U$  rozmaitości  $M^n$

rozmaitością gładką, z brzegiem, wymiaru  $2n + 1$ . Stosujemy do  $U$  i pola  $W$  na  $U$  Lemat (2.31). Pole  $W$  jest skierowane “na zewnątrz”  $U$  w punktach  $\partial U$ , bo  $\text{grad}(h^2)$  jest skierowany na zewnątrz, a  $V$  jest styczne do  $\partial U$  (ćwiczenie). Zatem

$$\sum_{W(x)=0} \text{ind}_x W = \text{deg } G(U),$$

nie zależy od  $V$ .

Zauważmy w końcu, że wszystkie zera  $W$  leżą w  $M^n$ , gdzie  $V = W$  oraz  $\text{ind}_x V = \text{ind}_x W$ . Faktycznie, jeśli  $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_{x'} M^n$ , gdzie  $x' \in S^{n-1}(x)$  (mała sfera wokół  $x$  w  $M^n$ ) daje reper zgodny z orientacją  $S^{n-1}(x)$  indukowaną orientacją  $M^n$  (dokładniej orientacją kuli o środku  $x$ , której brzegiem jest  $S^{n-1}$ ), oraz  $v_n, \dots, v_{2n} \in T_{x'} \mathbb{R}^{2n+1}$  są prostopadłe do  $T_{x'} M^n$ , to  $D\Phi_{S^{2n}}(v_j) = v_j a$  dla  $a > 0$  oraz dla  $j = n, \dots, 2n$  ( $\Phi$  zdefiniowane w definicji indeksu). Zatem dodanie reperu  $v_n, \dots, v_{2n}$  do  $v_1, \dots, v_{n-1}$  i obrazu  $D\Phi(v_n), \dots, D\Phi(v_{2n})$  do  $D\Phi(v_1), \dots, D\Phi(v_{n-1})$  nie zmienia znaku Jakobianu.

Zatem  $\sum_{V(x)=0} \text{ind}_x V$  nie zależy od pola  $V$ . Dla dokończenia dowodu wystarczy, więc podać przykład pola  $V$  takiego, że

$$\sum_{V(x)=0} \text{ind}_x V = \chi(M^n).$$

Takie pole można łatwo znaleźć jako pole gradientowe, patrz np. Milnor “Teoria Morse’a”.  $\square$

## Wykład 3

# Twierdzenie Siegela. Zbiory minimalne potoków na powierzchniach

Tak jak obiecałem na poprzednim wykładzie udowodnię

**Twierdzenie 3.1. Siegel, 1945** Dla pola  $V$  klasy  $C^1$  na torusie  $\mathbb{T}^2$ , bez zer i bez trajektorii zamkniętych, istnieje globalne cięcie transwersalne (to znaczy istnieje gładka krzywa Jordana  $\gamma$  taka, że

$$\forall x \in \mathbb{T}^2 \exists t_1, t_2 > 0 \quad \phi^{t_1}(x), \phi^{-t_2}(x) \in \gamma \text{ oraz } \forall x \in \gamma \text{ wektor } V(x) \notin T_x\gamma).$$

Podobne twierdzenie prawdziwe jest dla pola  $V$  na butelce Kleina. Ponieważ z jego tezy wynika, że potok jest po ewentualnej zmianie czasu, zawieszeniem dyfeomorfizmu okręgu zmieniającego orientację, zatem mającego punkt stały, uzyskamy wbrew założeniu, że istnieje trajektorią zamkniętą. Możemy zatem to twierdzenie sformułować następująco:

**Twierdzenie 3.2.** Dla potoku pola wektorowego  $V$  klasy  $C^1$  bez zer, na butelce Kleina  $\mathbb{K}$ , istnieje trajektoria okresowa.

**Potoki na torusie:** sklejamy linie  $\{y = 0\}$  i  $\{y = 1\}$  utożsamiając na płaszczyźnie  $(x, y)$  z  $(x, y + n)$ , oraz linie  $\{x = 0\}$  i  $\{x = 1\}$  utożsamiając  $(x, y)$  z  $(x + n, y)$ ,  $n$  liczba całkowita. Przerwane linie dają krzywą Jordana  $\gamma$  transwersalną do pola. Jednak żaden punkt  $x \in \gamma$  nie wraca do  $\gamma$ , ani dla  $t < 0$ , ani  $t > 0$ .

*Przykład 3.3.* (rysunek 3.1)

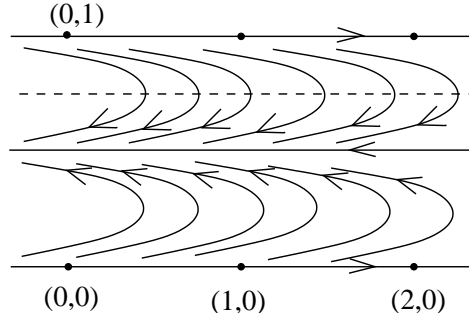
$$V(x, y) = (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$$

*Przykład 3.4.* (rysunek 3.2)

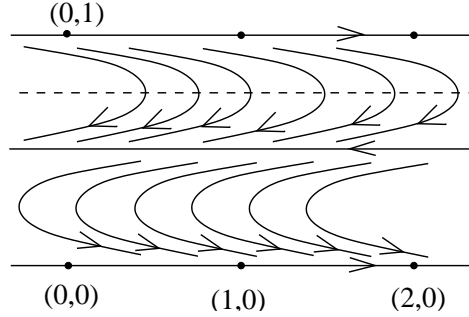
$$V(x, y) = (\cos(2\pi y), -\sin^2(\pi y))$$

*Przykład 3.5. Potok na butelce Kleina:* sklejamy  $\{y = 0\}$  i  $\{y = 1\}$  ze zmienioną orientacją  $(x, 0) \sim (-x, 1)$ .

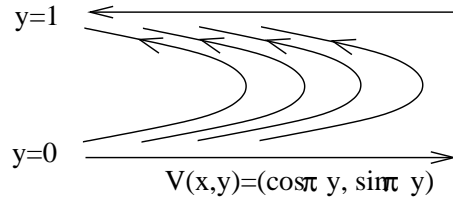
$$V(x, y) = (\cos(\pi y), \sin^2(\pi y))$$



Rysunek 3.1:



Rysunek 3.2:



Rysunek 3.3:

**Lemat 3.6.** *Jeśli  $M$  jest 2-wymiarową gładką rozmaitością (powierzchnią) riemannowską i  $V$  jest polem wektorowym klasy  $C^1$  na  $M$  z nieokresowym punktem rekurencyjnym wprzód (to znaczy  $x \in \omega(x)$ ), to istnieje na  $M$  gładka krzywa Jordana  $\gamma$  transwersalna do  $V$  taka, że zbiór punktów należących do  $\gamma$ , które wracają do  $\gamma$  w czasie dodatnim jest niepusty, wreszcie taka, że*

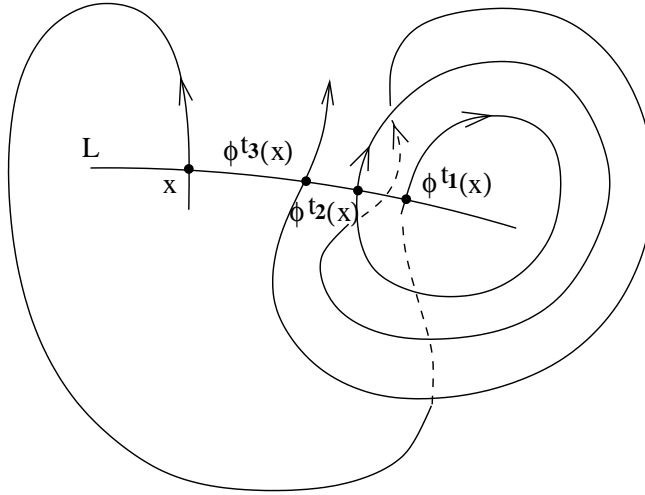
$$\forall x \in \gamma \angle(V(x), T_x \gamma) < \epsilon$$

dla dowolnego ustalonego wcześniej  $\epsilon$ .

*Dowód.* Niech  $t_1, t_2, \dots \rightarrow \infty$  będzie ciągiem najbliższych powrotów z jednej strony  $x$  do cięcia transwersalnego  $L \ni x$ , to znaczy na  $L$   $\phi^{t_n}(x)$  leży między  $x$  a  $\phi^{t_{n-1}}(x)$ , a żadne  $\phi^t(x)$ ,  $0 < t < t_n$  nie leży na  $L$  między  $x$  a  $\phi^{t_{n-1}}(x)$ . Załóżmy, że z tej strony  $\phi^{t_n}(x) \rightarrow x$  (to znaczy ciąg  $t_n$  jest nieskonńczony). Parametryzując  $L$  przez  $L(s)$ ,  $L(s_0) = x$  rozważmy wektory  $D\phi^t(\frac{\partial L}{\partial s}(s_0))$ . Jeśli istnieje ciąg  $t_{n_j}$  taki, że przy  $s_n$  takich, że  $L(s_n) = \phi^{t_n}(x)$ , orientacja pary

$$P_{n_j} = \left( D\phi^{t_{n_j}} \left( \frac{\partial L}{\partial s}(s_0) \right), V(\phi^{t_{n_j}}(x)) \right)$$



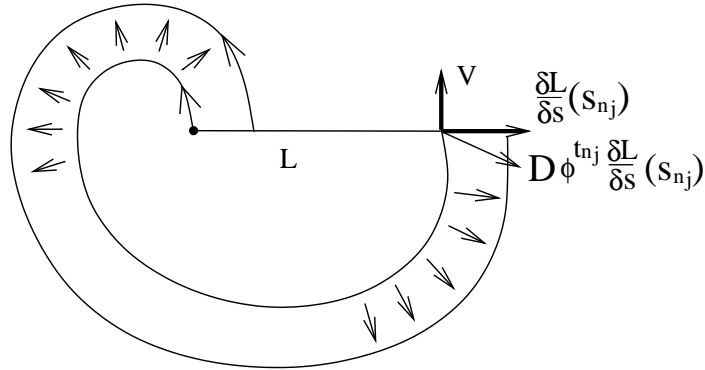


Rysunek 3.4:

jest taka sama jak orientacja pary

$$Q_{n_j} = \left( \frac{\partial L}{\partial s}(s_{n_j}), V(\phi^{t_{n_j}}(x)) \right)$$

patrz rys. 3.5, to bierzemy  $\gamma$  jak na rysunku 3.6 poniżej. Bierzemy  $j$  dostatecznie duże, żeby



Rysunek 3.5:

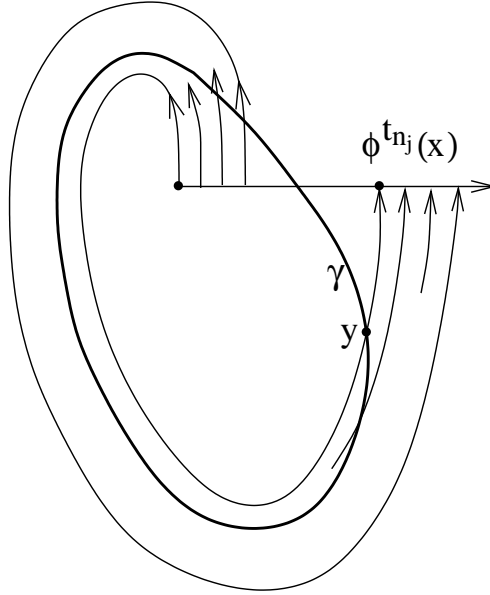
$$\angle(V, T\gamma) < \epsilon.$$

Jeśli dla wszystkich dużych  $n$  orientacje  $P_n$  są inne niż  $Q_n$ , to dla kolejnych  $n, n+1$  orientacje  $P_n$  i  $P_{n+1}$  są takie same,  $\phi^{t_n}(x)$  jest dowolnie blisko  $\phi^{t_{n+1}}(x)$  i konstrukcja  $\gamma$  jest taka sama ( $(\phi^{t_n}(x), \phi^{t_{n+1}}(x))$  zamiast  $(x, \phi^{t_n}(x))$ ).

Ponieważ  $x$  jest rekurencyjny w przód,  $\phi^t(x)$  też jest rekurencyjny w przód. Zatem punkt  $y \in \gamma, y = \phi^{t_n+\epsilon}(x)$  wraca do  $\gamma$ .  $\square$

**Wniosek 3.7.** Jeśli  $V$  jest polem wektorowym klasy  $C^1$  bez zer na  $\mathbb{T}^2$  lub  $\mathbb{K}$  to istnieje gładka krzywa Jordana  $\gamma$  transwersalna do  $V$ .

*Uwaga 3.8.* Możemy stracić własność istnienia punktu  $x \in \gamma$ , który wraca do  $\gamma$ . Patrz przykłady 1,2,3.



Rysunek 3.6:

*Dowód. wniosku.* Jeśli istnieje nieokresowy punkt rekurencyjny to za  $\gamma$  bierzemy krzywą z Lematu (3.6). Jeśli nie istnieje, to w przypadku  $\mathbb{T}^2$  bierzemy pole  $V^\perp$  (prostopadłe do  $V$ , na przykład takie, że  $(V, V^\perp)$  jest zgodne z orientacją torusa  $\mathbb{T}^2$ ). Jeżeli istnieje trajektoria okresowa  $\gamma$  dla  $V^\perp$  to bierzemy ją jako szukaną krzywą Jordana. Jeżeli nie to dowolny punkt zbioru minimalnego dla  $V^\perp$  jest rekurencyjny w przód dla  $V^\perp$ . Znajdujemy więc  $\gamma$  dla  $V^\perp$  z lematu powyżej. Jeśli założymy w nim, że  $\epsilon < \pi/2$ , to  $\gamma$  będzie transwersalne do  $V$ .

W rzeczywistości/si nie korzystaliśmy z własności krzywej  $\gamma$ , uzyskanej w Lemacie 3.6, że  $\gamma$  jest transwersalna do  $V^\perp$ . W takiej wersji Lemat 3.6 jest łatwiejszy; nie trzeba zajmować się zgodnością orientacji  $P_{n_j}$  i  $Q_{n_j}$  bo można dopuścić konstrukcji krzywej  $\gamma$  jej styczność do pola (tu pola  $V^\perp$ )

W przypadku nieorientowalnym  $\mathbb{K}$  postępujemy inaczej (nie możemy zdefiniować  $V^\perp$ ). Jeśli  $\gamma_0$  oznacza trajektorię okresową dla  $V$ , to dla małego cięcia transwersalnego  $L \ni x_0, x_0 \in \gamma_0$ , rozważamy  $f$  przekształcenie pierwszego powrotu  $L \ni x \mapsto \phi^{t(x)}(x) \in L$  (inna nazwa przekształcenie Poincaré'go). Jeśli  $f$  (jeśli  $U$  po pogrubieniu  $\gamma_0$  jest zwykłą wstążką) lub  $f^2$  (w przypadku wstęgi Möbiusa) jest różne od identyczności, to tak jak w lemacie (3.6), biorąc trajektorię  $\phi^t(x)$ , której zbiór  $\omega$ - lub  $\alpha$ -graniczny jest trajektorią okresową w  $U$ , konstruujemy żadaną krzywą  $\gamma$ . Jeśli  $f^2 = id$  dla każdej trajektorii okresowej, to  $\mathbb{K}$  jest sumą trajektorii okresowych. Teraz należy pokazać, że potok jest zawieszeniem symetrii  $S^1$  (w odpowiednich współrzędnych i po ewentualnej zmianie czasu). Pozostawiam to czytelnikowi.  $\square$

Udowodnimy teraz jeszcze jeden ogólny lemat, pożyteczny nie tylko w dowodzie Tw. 3.1 i Tw. (3.2).

**Lemat 3.9.** Niech  $V$  będzie polem klasy  $C^1$  na powierzchni zwartej riemannowskiej. Niech  $L$  będzie cięciem transwersalnym (otwartym łukiem lub krzywą Jordana). Niech  $L_0$  będzie zbiorem punktów w  $L$ , które wracają do  $L$ , to znaczy

$$L_0 = \{ x \in L \mid \exists t > 0 \phi^t(x) \in L \}$$

Niech  $L'_0$  będzie  $L_0$  bez co najmniej dwóch punktów, których trajektorie przed powrotem do  $L$  przecinają końce  $L_0$ . Wtedy  $L'_0$  jest sumą łuków, których każdy koniec  $p$  albo ma  $\omega(p)$  składający się tylko z punktów stałych, albo  $p$  jest jednym z końców  $L$ , albo wraca do końców  $L$  dla  $t > 0$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $y \in \omega(p)$  i  $V(y) \neq 0$ . Niech  $L_1$  będzie składową  $L'_0$ , której jednym końcem jest  $p$ . Wybierzmy dwa różne punkty  $z_1, z_2 \in L_1$  (kolejność w  $L_1$ :  $z_1 < z_2 < p$ ). Zbiór trajektorii  $\phi^t(z)$ ,  $0 \leq t \leq t(z)$ , dla  $z \in L_1$  między  $z_1$  a  $z_2$ , gdzie  $t(z)$  to czas pierwszego powrotu do  $L$  jest topologicznym dyskiem. Możemy go nazwać "prostokątem"  $K$  w następującym sensie:

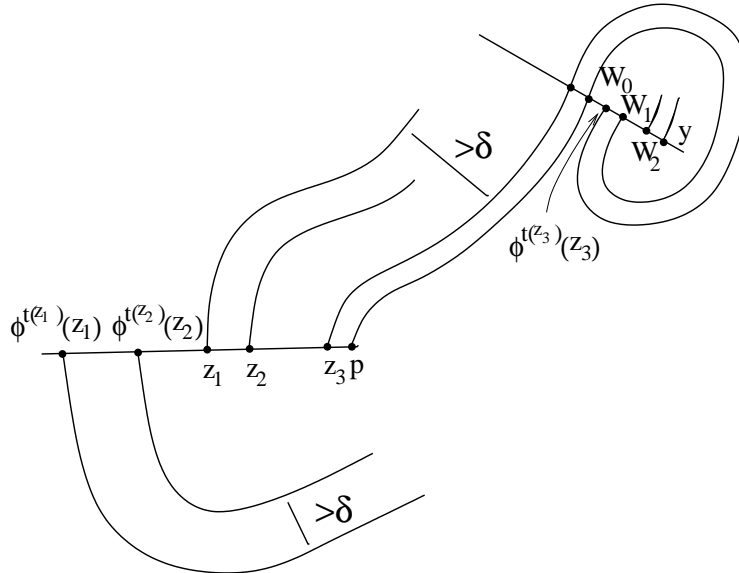
**Definicja 3.10. Prostokąt** to topologiczny dysk, którego brzeg składa się z kawałków dwóch trajektorii  $\gamma_1, \gamma_2$  i dwóch cięć transwersalnych. Szerokość prostokąta to infimum długości krzywych łączących  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  wewnątrz prostokąta (to wymaga ustalenia metryki Riemanna). Korzystamy z tego, że  $t(z)$  jest funkcją ciągłą na  $L_1$ .

Kontynuujemy dowód. Oznaczmy szerokość  $K$  przez  $\delta$ . Niech  $L_3$  będzie cięciem transwersalnym zawierającym  $y_3$  i  $w_0, w_1, w_2 \in L_3 \cap \phi^t(p)$  po jednej stronie  $y$ , bliżej  $y$  niż  $\delta$ . Weźmy  $z_3 \in L_3$  między  $z_2$  i  $p$  tak blisko  $p$ , żeby  $\phi^t(z_3) \in L_3$  było blisko  $w_1$ , zatem między  $w_0$  i  $w_2$  i żeby czas pierwszego powrotu do  $L$ ,  $t(z_3)$ , był większy niż  $t_1$  (korzystamy z tego, że  $\phi^t(p)$ ,  $t > 0$  nie przechodzi przez końce  $L$ ).

Mamy szerokość prostokąta o bokach

$$\{ \phi^t(z_1) \mid 0 \leq t \leq t(z_1) \} , \{ \phi^t(z_3) \mid 0 \leq t \leq t(z_3) \} ,$$

łuk w  $L$  między  $z_1$  a  $z_3$ , łuk w  $L$  między  $\phi^{t(z_1)}(z_1)$  a  $\phi^{t(z_3)}(z_3)$ , większą od szerokości  $K$ , czyli  $> \delta$ . Punkt  $\phi^t(z_3)$  leży na jednej z dwóch trajektorii brzegu  $K_1$  i przechodzi przez ten punkt cięcia transwersalne  $L_2$ , które z obu stron ma punkty  $w_0$  i  $w_2$  nie należące do  $K_1$ , bo należące do trajektorii  $\phi^t(p)$ , która nie wraca do  $L$ , w odległości  $\leq \delta$ . Sprzeczność, bo  $w_0$  lub  $w_2 \in K_1$ , bo jego szerokość jest  $> \delta$ .  $\square$



Rysunek 3.7:

Możemy teraz zakończyć dowód tw. (3.1) i tw. (3.2)

*Dowód.* Weźmy  $\gamma$ , krzywą Jordana z lematu (3.6). Z lematu (3.9) wynika, ponieważ  $\gamma$  nie ma końców, że

$$\left\{ z \in \gamma \mid \exists t(z) > 0 \phi^{t(z)}(z) \in \gamma \right\} = \gamma$$

Ten zbiór nie może być pusty, bo z lematu (3.6) istnieje punkt powrotu do  $\gamma$ . Stąd wynika (Wykład 2), że

$$\forall x \in M = \mathbb{T}^2 \text{ lub } \mathbb{K} \exists t > 0 \phi^t(x) \in \gamma$$

czyli  $\gamma$  jest globalnym cięciem transwersalnym.  $\square$

*Uwaga 3.11.* Badanie potoków dla  $C^1$  pól bez zer i trajektorii okresowych na  $\mathbb{T}^2$  udało się więc sprowadzić do badania dyfeomorfizmów okręgu. Jeśli pole jest klasy  $C^2$  na  $\mathbb{T}^2$ , to dyfeomorfizm  $f$  okręgu (przekształcenie pierwszego powrotu do globalnego cięcia transwersalnego, zwane czasem **przekształceniem Poincare'go**) jest, w przypadku niewymiernej liczby obrotu  $\rho(f)$ , topologicznie sprzężone z obrotem (tw. Denjoy). W przypadku wymiernej liczby obrotu ma orbitę okresową, co najmniej jedną (patrz ćwiczenia do poprzedniego wykładu). Zatem wyjściowy potok, przy braku trajektorii okresowych jest topologicznie równoważny **obmotce** na  $\mathbb{T}^2$  jako zawieszenie  $f$ .

*Uwaga 3.12.* Dla twierdzenia (3.1) zamiast nieistnienia trajektorii okresowych wystarczy założenie istnienia nieokresowego punktu rekurencyjnego. A posteriori implikuje to jednak nieistnienie trajektorii okresowych. Gdyby bowiem była trajektoria okresowa, to przekształcenie Poincare'go miałyby wymierną liczbę obrotu i poza punktami okresowymi nie byłoby punktów rekurencyjnych (ćwiczenie).

*Uwaga 3.13.* Można podać dowód tw. (3.1) bez używania lematu (3.9) (taki dowód podał Siegel). Opieramy się na wniosku (3.7). Zauważmy, że krzywa  $\gamma$  nie jest brzegiem topologicznego dysku w  $\mathbb{T}^2$ . W przeciwnym razie w tym dysku byłoby zero pola  $V$ . Należy teraz zauważyć, że  $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$  jest dyfeomorficzne z walcem  $S^1 \times (a, b) = A$  (to zostawiam jako niezbyt łatwe ćwiczenie).  $A$  można zanurzyć w sferze, a pole można gładko rozszerzyć do otoczenia  $\bar{A}$ . Zatem z twierdzenia Poincare'go-Bendixsona jeśli  $x \in \gamma$  nie wraca do  $\gamma$ , to  $\omega(x) \subset \bar{A}$  jest orbitą okresową, wbrew założeniu, że taka orbita nie istnieje. Zatem wszystkie punkty  $z \in \gamma$  wracają do  $\gamma$  i możemy dokończyć dowód tw. (3.1) jak poprzednio.

*Uwaga 3.14.* Uzyskaliśmy “po drodze” pełną klasyfikację potoków na  $\mathbb{T}^2$  dla pól  $C^1$  bez zer. Albo są to zawieszenia dyfeomorfizmów okręgu zachowujące orientację, albo, w przypadku nieistnienia globalnego cięcia transwersalnego  $\mathbb{T}^2$  jest wypełniony trajektoriami okresowymi, a walce między nimi mają obrazy fazowe jak w przykładach (3.3)-(3.4).

Ta teoria w wymiarze 3 prowadzi do słynnego

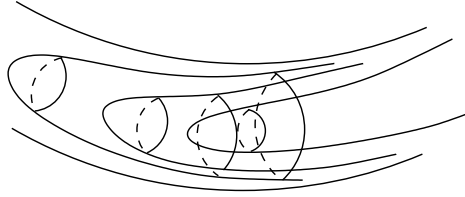
### **Twierdzenie 3.15. Nowikowa.**

*Foliacja klasy  $C^2$  na sferze  $S^3$ , kowymiaru 1, ma liść zwarty.*

**Definicja 3.16.** Rozbicie rozmaitości  $M^m$  na immersyjne podrozmaitości  $l$  wymiaru  $m - k$  nazywa się  $C^r$ -foliacją kowymiaru  $k$  jeśli  $\forall x \in M^m$  istnieje mapa klasy  $C^r$   $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in U$  taka, że każda składowa  $l \cap U$  jest przeprowadzona na pewną podprzestrzeń  $\{x_{m-k+1} = \text{const}, \dots, x_m = \text{const}\}$ .

Powstają tak zwane **foliacje Reeba** w pełnych torusach.  $S^3$  może być przedstawiona jako sklejka tak sfoliowanych torusów.

$$\left\{ z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_1|^2 \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ i } \left\{ z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_2|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$



Rysunek 3.8:

**Twierdzenie 3.17. Arthur Schwartz, 1963**

Jeśli  $M$  jest gładką, spójną powierzchnią (niekoniecznie zwartą),  $V$  polem klasy  $C^1$  na  $M$  i  $A$  zwartym zbiorem minimalnym, to  $A$  jest albo punktem stałym potoku  $\phi^t$  ( $\dot{\phi}^t = V$ ) albo orbitą okresową, albo  $A = M$ .

*Uwaga 3.18.* Jeśli  $A = M$ , to  $M$  jest zwarta i, ponieważ  $A$  jest minimalne, nie ma punktów stałych,  $V$  nie ma zer, zatem  $M = \mathbb{T}^2$ . Nie może być  $M = \mathbb{K}$ , bo byłaby orbita zamknięta, co znowu przeczy minimalności  $A$ . Potok jest więc “obmotką” na  $M = \mathbb{T}^2$  z tw. (3.1) i tw. Denjoy.

*Dowód.* (twierdzenia (3.17))

Pokażemy, że założenie, że  $A \neq M$ , nie jest trajektorią okresową, ani punktem stałym prowadzi do sprzeczności.

Zauważmy, że  $A$  jest brzegowy. Jeśli bowiem zawierałby zbiór otwarty  $U$ , to

$$\forall x \in A \exists t \phi^t(x) \in U \text{ bo } \phi^t(x) \text{ jest gęsty w } A$$

Zatem otwarty zbiór  $\phi^{-t}(U) \subset A$  zawierałby  $x$  i  $A$  byłby otwarty. Ponieważ jest też domknięty, ze spójności  $M$  byłoby  $A = M$ , sprzeczność.

Ponieważ  $A$  jest brzegowy, istnieje gładkie cięcie transwersalne  $L$  o końcach poza  $A$ . Oznaczmy  $K = L \cap A$ .  $K$  jest zwarty i niezmienniczy dla przekształcenia pierwszego powrotu  $f$  (to znaczy  $f(K) = K = f^{-1}(K)$ ), które jest określone na otoczeniu  $K$ .  $f$  jest klasy  $C^2$ . Ponieważ  $f$  nie ma punktów okresowych w  $K$  z minimalności  $A$ ,  $K$  jest w sobie gęsty ( $K$  jako zbiór zwarty jest więc homeomorficzne ze zbiorem Cantora). W dziedzinie określoności  $f$  można wziąć  $U$ , otoczenie  $K$  w  $L$ , będące skończoną sumą otwartych łuków. Na każdym z nich  $f$  jest ściśle monotoniczne, dokładniej: jest dyfeomorfizmem klasy  $C^2$  na obraz. Możemy przyjąć, że  $L$  to odcinek, np.  $L = (0, 1)$ . Możemy ustalić  $\epsilon > 0$  i zdefiniować

$$U = \{x \in L \mid \text{dist}(x, K) < \epsilon\}$$

( $\epsilon$  tak małe, żeby  $U$  było w dziedzinie  $f$ ).  $L \setminus K$  jest sumą ciągu odcinków  $(a_i, b_i)$ , gdzie  $a_i, b_i \in K \cup \{0, 1\}$ . Nazwijmy  $a_i$  lub  $b_i$  “dobrym” jeśli  $|a_i - b_i| < \epsilon$ . Oznaczmy zbiór dobrych  $a_i, b_i$  przez  $D$ , a zbiór wszystkich  $a_i, b_i$ , oprócz  $\{0, 1\}$  przez  $D'$ . Mamy  $f(D') = D'$ . Zbiór  $D' \setminus D$  jest skończony. Weźmy dowolne  $a_i = a_{i_0}$ . Wtedy istnieje  $N$  takie, że  $\forall n \geq N f^n(a_{i_0}) = a_{i_n} \in D$ . Zatem  $|a_{i_n} - b_{i_n}| < \epsilon$ , więc  $f$  jest zdefiniowane na wszystkich odcinkach  $[a_{i_n}, b_{i_n}]$ ; zawarte są one w  $U$ ,  $f([a_{i_n}, b_{i_n}]) = [a_{i_{n+1}}, b_{i_{n+1}}]$  i nie przybliżają się do brzegu,  $U$  bo ich końce są zawarte w  $K$ . Odcinki te są parami rozłączne, w przeciwnym razie  $\exists k, n f^k([a_{i_n}, b_{i_n}]) = [a_{i_{n+k}}, b_{i_{n+k}}]$ ,  $a_{i_n}$  byłby okresowy (okresu  $k$  lub  $2k$ ).

Łuk (odcinek) o powyższych własnościach (rozłączność obrazów i zawieranie się w dziedzinie  $f$ ) nazywamy **bladzącym**. Formalnie można wprowadzić następującą definicję

**Definicja 3.19.** Jeśli  $f: U \rightarrow X$  jest przekształceniem podzbioru  $U \subset X$  w  $X$ , to zbiór  $B \subset U$  nazywamy bladzącym, jeśli  $\forall n \geq 0 f^n(B) \subset U$  i  $\forall n_1, n_2, n_1 \neq n_2 f^{n_1}(B) \cap f^{n_2}(B) = \emptyset$ .

(W tej definicji nie trzeba nawet zakładać ciągłości  $f$ .)  
Dalej dowód twierdzenia (3.17) wynika z następującego

**Twierdzenie 3.20. A. Schwartz**

Jeśli  $f: U \rightarrow [0, 1]$  jest klasy  $C^1$  i  $\log(|f'|)$  jest funkcją Lipschitzowską, na otwartym podzbiore  $U$  odcinka  $[0, 1]$  będącym sumą rozłącznej rodziny odcinków otwartych (to znaczy bez końców), lub  $U \subset S^1$  i  $f: U \rightarrow S^1$ , gdzie  $U = S^1$ , lub jest sumą rozłącznej rodziny łuków (bez końców) (w szczególności  $f$  jest dyfeomorfizmem na obraz na każdej składowej  $U$ ), jeśli  $J$  jest otwartym odcinkiem błędzącym w  $U$ , jeśli ponadto suma  $\bigcup_{k \geq 0} f^k(J)$  jest zawarta w pewnym zbiorze zwartym  $W$ , zawartym w  $U$ , to  $J$  można rozszerzyć do odcinka otwartego  $J'$  zawierającego domknięcie  $J$ , takiego, że  $\forall k f^k(J') \subset U$  oraz długości  $f^k(J')$  zbiegają do 0 (co więcej szereg tych długości jest zbieżny).

*Dowód.* Oznaczmy przez  $\mathcal{L}$  stałą Lipschitza  $\log(|f'|)$  na  $U$ , przez  $\epsilon_0 = \text{dist}(W, \partial U) > 0$ . Pokażemy, że  $\exists \epsilon_1 > 0$  takie, że

$$\forall n \geq 0 f^n(J^{\epsilon_1}) \subset (f^n(J))^{\epsilon_0},$$

gdzie dla dowolnego odcinka  $(a, b) = P$  i  $\epsilon > 0$

$$P^\epsilon := \{x \in [0, 1] \mid a - (b - a)\epsilon < x < b + (b - a)\epsilon\}.$$

W szczególności wszystkie  $f^n(J^{\epsilon_1})$  są zawarte w dziedzinie  $f$ .

Faktycznie, przypuśćmy, że  $N$  jest pierwszą liczbą naturalną, taką, że  $f^N(J^{\epsilon_1}) \not\subset (f^N(J))^{\epsilon_0}$ . Pokażemy, że jeśli  $\epsilon_1$  było ustalone dostatecznie małe, otrzymamy sprzeczność.

Możemy, oznaczając przez  $|P|$  długość odcinka  $P$ , dla lewej i prawej składowej  $J^{\epsilon_1} \setminus J$ , oznaczonych odpowiednio  $J_L, J_P$

$$\frac{f^N(J_L)}{|J_L|} = (f^N)'(x_L) \quad \frac{f^N(J_P)}{|J_P|} = (f^N)'(x_P) \text{ i}$$

$$\frac{f^N(J)}{|J|} = (f^N)'(z) \text{ dla pewnych } x_L \in J_L, x_P \in J_P, z \in J$$

Korzystając z tego, że  $f^j(J^{\epsilon_1}) \subset (f^j(J))^{\epsilon_0} \subset U$  dla wszystkich  $0 \leq j < N$ , możemy oszacować

$$\log \left( \frac{|(f^N)'(x_L)|}{|(f^N)'(z)|} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \log(|f'(f^j(x_L))| - |f'(f^j(z))|) \leq$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{L} |f^j(x_L) - f^j(z)| \leq \mathcal{L} \sum_{j=0}^{N-1} (1 + 2\epsilon_0) |f^j(J)| \leq \mathcal{L}(1 + 2\epsilon_0) \quad (3.1)$$

bo odcinki  $f^j(J)$  są z założenia rozłączne, suma ich długości nie przekracza więc liczby 1.

Z drugiej strony, jeśli na przykład  $f^N(J_L) \not\subset (f^N(J))^{\epsilon_0}$ , to

$$\frac{f^N(J_L)}{f^N(J)} \geq \epsilon_0, \text{ a } \frac{|J_L|}{|J|} = \epsilon_1,$$

zatem

$$\frac{f^N(J_L)}{f^N(J)} / \frac{|J_L|}{|J|} = \frac{(f^N)'(x_L)}{(f^N)'(z)} \geq \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}$$

co przy  $\epsilon_1$  dostatecznie małym daje sprzeczność z (3.1).

Wreszcie  $\sum_{n=0}^{\infty} \leq 1$ , z rozłączności, zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f^n(J^{\epsilon_1})| < (1 + 2\epsilon_0), \text{ więc}$$

$$|f^n(J^{\epsilon_1})| \rightarrow 0.$$

□

*Uwaga 3.21.* Po drodze udowodniliśmy, nie tylko, że wszystkie odcinki  $f^n(J^{\epsilon_1})$  są zawarte w  $U$ , ale także, że

$$\forall x, y \in J^{\epsilon_1} \forall n \geq 0 \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \leq e^{\mathcal{L}(1+2\epsilon_0)}$$

inaczej, dla każdych odcinków  $P_1, P_2 \subset J^{\epsilon_1}$

$$\frac{f^n(P_1)}{|P_1|} / \frac{f^n(P_2)}{|P_2|} \leq e^{\mathcal{L}(1+2\epsilon_0)}.$$

Supremum wyrażeń z lewej strony nazywa się **dystorsją**  $f^n$ . Okazało się więc, że  $\forall n$  dystorsja  $f^n$  jest ograniczona przez stałą niezależną od  $n$ .

Możemy teraz dokończyć dowód twierdzenia (3.17).

Zmniejszając, jeśli trzeba,  $U$  możemy założyć, że  $|f'|$  jest na  $U$  oddzielone od 0, zatem  $\log(|f'|)$  jest funkcją Lipschitzowską. Dla  $J = (a_{i_N}, b_{i_N})$  spełnione są założenia twierdzenia (3.20). Rozważmy odcinek  $J'$ , o którym mowa w tezie tw.(3.20). Mamy  $J' \cap K \neq \emptyset$ . Ponieważ  $K$  jest minimalny dla  $f$ , istnieje  $z \in J' \cap K$  i  $n > 0$  takie, że  $f^n(z) \in J'$ , zatem  $f^n(J') \cap J' \neq \emptyset$ . Wtedy ciąg  $f^{kn}$  jest monotoniczny, bo wszystkie te punkty należą do składowej  $U$  zawierającej spójny zbiór  $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{kn}(J')$ . Zatem  $f^{kn}(z) \rightarrow z_0$ , gdzie  $z_0 \in K$  jest punktem okresu  $n$ . Mamy sprzeczność, bo  $f$  nie ma w  $K$  punktów okresowych. □

*Uwaga 3.22.* Z twierdzenia (3.17) wynika twierdzenie Denjoy (patrz zadania do wykładu 2), mówiące, że dla dyfeomorfizmu okręgu, stopnia 1,  $f: S^1 \rightarrow S^1$ , z niewymierną liczbą obrotu, nie ma łuków błędzących. W twierdzeniu Denjoy zakłada się, że wariancja funkcji  $\log(|f'|)$  jest ograniczona.

Żeby skorzystać z twierdzenia (3.17) trzeba założyć więcej: Lipschitzowskość  $\log(|f'|)$ . To jest cena za to, że nie korzystaliśmy z kombinatoryki, mianowicie kolejności punktów trajektorii w okręgu.

*Ćwiczenie 3.23.* Korzystając z twierdzenia Schwartz'a (3.20), pokazać, że dla dowolnego przekształcenia  $f$  klasy  $C^2$  odcinka  $[0, 1]$  w siebie jeśli  $J$  jest otwartym odcinkiem błędzącym, nie przyciąganym do trajektorii okresowej, to  $\omega(J)$  zawiera punkt  $x$ , gdzie  $f'(x) = 0$ .

*Uwaga 3.24.* Prawdziwe jest następujące

*Twierdzenie 3.25.* Jeśli  $f$  jest klasy  $C^2$  odcinka  $[0, 1]$  lub okręgu  $S^1$  w siebie i punkty krytyczne  $f$  (to znaczy takie, że  $f'(c) = 0$ ) nie są płaskie (to znaczy  $\exists a > 0 \exists \alpha \geq 2 |f(x) - f(c)| \geq a|x - c|^\alpha$ ), to nie istnieją odcinki (łuki) błędzące, oprócz być może przyciąganych do trajektorii okresowych.

Patrz: de Melo, van Strien "One-Dimensional Dynamics".





# Wykład 4

## Tw. Grobmana-Hartmana, 1

Zajmiemy się badaniem potoku pola wektorowego w pobliżu zera  $V(x) = 0$  lub kaskady w pobliżu punktu stałego  $f(x) = x$ .

**Definicja 4.1.** 1. Dla  $V$  stycznego pola wektorowego klasy  $C^1$  na skończonej-wymiarowej rozmaitości  $M^m$ , (w szczególności  $\mathbb{R}^m$ ) punkt  $x \in M^m$ , w którym  $V(x) = 0$  nazywa się punktem stałym (potoku) **hiperbolicznym** jeśli wartości własne operatora różniczki  $DV(x)$  mają niezerowe części rzeczywiste.

2. Dla dyfeomorfizmu  $f(x) = x$  zdefiniowanego na otoczeniu punktu  $x$ , który jest punktem stałym,  $x$  nazywa się punktem stałym **hiperbolicznym** jeśli wartości własne operatora  $Df(x)$  mają moduły  $\neq 1$ .

W przypadku  $x \in B$  dla przestrzeni Banacha  $B$  hiperboliczność oznacza

$$\text{spec}(Df(x)) \cap S^1 = \emptyset,$$

gdzie  $\text{spec}$  oznacza widmo, to znaczy  $\lambda \in \text{spec}(Df(x))$  jeśli  $\lambda I - Df(x)$  nie jest operatorem odwracalnym. Dla pola  $V$  też należy wtedy mówić o widmie  $DV(x)$  zamiast o wartościach własnych.

(Oczywiście wartości własne należą do widma, ale mogą być elementy widma nie będąca wartościami własnymi).

Ogólnie, operator liniowy  $L : B \rightarrow B$  nazywa się **hiperboliczny**, jeśli  $\text{spec}(L) \cap S^1 = \emptyset$

*Ćwiczenie 4.2.* Zero pola klasy  $C^1$  jest punktem hiperbolicznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest punktem hiperbolicznym dla dyfeomorfizmu  $\phi^t, \forall t \neq 0$ .

Wskazówka:  $D\phi^t$  jest opisane przez równanie różniczkowe w wariacjach. W  $x$ , zerze pola,  $D\phi^t(x) = e^{tDV(x)}$ . Patrz wykłady z Równań Różniczkowych Zwyczajnych.

**Twierdzenie 4.3.** 1. Dla pola wektorowego  $V$

*Załóżmy, że  $0 \in \mathbb{R}^m$  jest punktem stałym hiperbolicznym. Wtedy potoki  $\phi^t(y)$  dla  $V(y)$  i  $\psi^t(y) = e^{tDV(0)}y$  dla liniowego pola  $DV(0)y$  są topologicznie sprzężone w otoczeniach  $x$  i  $0 \in T_x B$ , to znaczy istnieją otoczenia  $U \ni x$  i  $V \ni 0$  i homeomorfizm  $H : U \rightarrow V$  taki, że  $\forall t, y$  jeśli  $y, \phi^t(y) \in U$  to*

$$H \circ \phi^t(y) = \psi^t \circ H(y)$$

## 2. Dla dyfeomorfizmu $f$

Załóżmy, że  $x$  jest punktem stałym hiperbolicznym. Wtedy  $f$  i przekształcenie liniowe  $Df(x)$  są topologicznie sprzężone w otoczeniach  $x$  i  $0 \in T_x B$ , to znaczy istnieją  $H: U \rightarrow V$  jak wyżej takie, że

$$H \circ f(y) = Df(x) \circ H(y),$$

jeśli  $y, f(y) \in U$

**Lemat 4.4.** Jeśli  $L$  jest operatorem liniowym, ciągłym hiperbolicznym na przestrzeni Banacha  $B$  to istnieje rozkład  $B$  na sumę prostą dwóch domkniętych podprzestrzeni

$$B = E^s \oplus E^u, \quad E^s \cap E^u = \emptyset$$

niezmienniczych dla  $L$ , takich, że jeśli

$$\text{spec}(L) = \text{spec}_s(L) \cup \text{spec}_u(L),$$

gdzie

$$\text{spec}_s(L) = \{ \lambda \in \text{spec}(L) \mid |\lambda| < 1 \}$$

$$\text{spec}_u(L) = \{ \lambda \in \text{spec}(L) \mid |\lambda| > 1 \}$$

to

$$\text{spec}(L|_{E^s}) = \text{spec}_s(L), \quad \text{spec}(L|_{E^u}) = \text{spec}_u(L)$$

*Dowód.* Omijam. W przypadku  $B$  skończenie wymiarowej można zdefiniować  $E^s$  i  $E^u$  za pomocą bazy związanej z postacią Jordana operatora  $L$ .  $\square$

**Definicja 4.5.** Promień spektralny operatora  $L$  definiuje się jako

$$\|L\|_{\text{spec}} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|L^n\|}$$

**Lemat 4.6.**

$$\sup_{\lambda \in \text{spec}(L)} |\lambda| = \|L\|_{\text{spec}}$$

*Dowód.* Patrz np. A. Alexiewicz “Analiza funkcjonalna” str. 366.  $\square$

**Lemat 4.7.** Dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje norma  $\|\cdot\|_\epsilon$  równoważna wyjściowej normie na przestrzeni Banacha  $B$ , taka, że dla związanej z nią normy operatora  $L$ , ( $\|L\|_\epsilon = \sup_{\|v\|_\epsilon=1} \|Lv\|_\epsilon$ ) mamy

$$\|L\|_\epsilon \leq \|L\|_{\text{spec}} + \epsilon$$

*Dowód.* Dla dowolnego  $\|L\| < \eta < 1$  zdefiniujmy dla  $\epsilon = \eta - \|L\|_\epsilon$

$$\forall v \in B \setminus \{0\} \quad \|v\|_\epsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n} \|L^n(v)\|$$

Mamy

$$\|Lv\|_\epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n} \|L^{n+1}(v)\| \leq \eta \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-(n+1)} \|L^{n+1}(v)\| \leq \eta \|v\|_\epsilon$$

$\square$

Udowodnię teraz twierdzenie, z którego tw. G-H łatwo wyniknie

**Twierdzenie 4.8.** Załóżmy, że  $L: B \rightarrow B$  jest operatorem ciągłym, liniowym hiperbolicznym. Wtedy istnieje  $\epsilon_0 > 0$  takie, że jeśli  $f, g: B \rightarrow B$  to funkcje ciągłe, ograniczone i Lipschitzowskie, ze stałą Lipschitza  $Lip(f), Lip(g) < \epsilon_0$ ,  $f(0) = g(0) = 0$ , to istnieje dokładnie jedna ciągła funkcja ograniczona  $h: B \rightarrow B$ ,  $h(0) = 0$  taka, że

$$(I + h) \circ (L + f) = (L + g) \circ (I + h), \quad I = \text{identyczność} \quad (4.1)$$

$I + h$  jest homeomorfizmem.

*Dowód.* Rozłóżmy  $B$  na  $E^1 \oplus E^2$  (lemat (4.4)) i w nich  $L = L_1 + L_2$ ,  $f = f_1 + f_2$ ,  $g = g_1 + g_2$ . (To znaczy  $L_i = P_i \circ L$ , gdzie  $P_i$  to rzutowanie na  $E^i$ , to znaczy dla  $v = v_1 + v_2$ ,  $v_1 \in E^1$ ,  $v_2 \in E^2$ ,  $P_1 v = v_1$ ,  $P_2 v = v_2$ . Ciągłość  $P_i$  wynika z domkniętości  $E^i$ ). Jeżeli  $h$  zapiszemy jako  $h_1 + h_2$ ,  $h_i: B \rightarrow E^i$  to równanie (4.1) zapisuje się jako para równań

$$L_i + f_i + h_i \circ (L + f) = L_i + L_i \circ h_i + g_i \circ (I + h), \quad i = 1, 2$$

lub

$$\begin{aligned} h_1 &= \hat{L}_1(h_1 + \hat{L}_1^{-1} \circ g_1 \circ (I + h) - \hat{L}_1^{-1} \circ f_1)(L + f)^{-1} \\ h_2 &= \hat{L}_2^{-1}(f_2 + h_2 \circ (L + f) - g_2 \circ (I + h)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie  $\hat{L}_i = L_i|_{E^i} = L|_{E^i}$ . (W pierwszym równaniu wyliczyliśmy  $h_1$  z lewej strony, w drugim  $h_2$  z prawej.)

*Ćwiczenie 4.9.* Pokazać, że  $(L + f)^{-1}$  istnieje jeśli  $Lip(f) < \|L^{-1}\|^{-1}$

Okazuje się, że przekształcenie

$$\mathcal{L}(h) = \bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2),$$

zadane wzorem związanym z (4.2):

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= \hat{L}_1(h_1 + \hat{L}_1^{-1} \circ g_1 \circ (I + h) - \hat{L}_1^{-1} \circ f_1)(L + f)^{-1} \\ \bar{h}_2 &= \hat{L}_2^{-1}(f_2 + h_2 \circ (L + f) - g_2 \circ (I + h)), \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$  przekształca przestrzeń  $\mathcal{C}$  funkcji ograniczonych, z normą  $\sup \|\cdot\|$ ,  $h: B \rightarrow B$ ,  $h(0) = 0$  w siebie i jest kontrakcją. Należy tu rozpatrywać normę  $\|v\|'$  na  $B$  będącą maksimum norm  $\|P_1(v)\|_\epsilon$  i  $\|P_2(v)\|_\epsilon$  odpowiednio na  $E^1$  i  $E^2$  dla operatorów  $\hat{L}_1, \hat{L}_2^{-1}$  (lemat (4.7)).

Faktycznie, dla  $h, k \in \mathcal{C}$  mamy

$$\sup_{v \in B} \|\bar{h}_1(v) - \bar{k}_1(v)\|' \leq$$

$$\|\hat{L}_1\|' \cdot (\sup_{v \in B} \|h_1(v) - k_1(v)\|' + \|\hat{L}_1^{-1}\|' \cdot Lip(g_1) \cdot \sup_{v \in B} \|h(v) - k(v)\|),$$

co daje Lipschitzowskość  $P_1\mathcal{L}$  ze stałą  $\|\hat{L}_1\|' + Lip(g_1)$ , zatem kontrakcję, o ile  $Lip(g_1) < 1 - \|\hat{L}_1\|'$ .

Rachunek dla  $\bar{h}_2 - \bar{k}_2$  przeprowadza się podobnie, uzyskując Lipschitzowskość  $P_2\mathcal{L}$  za stałą  $\|\hat{L}_2^{-1}\|'(1 + Lip(g_2))$ , co daje kontrakcję, o ile  $\|\hat{L}_2^{-1}\|'(1 + Lip(g_2)) < 1$ , czyli  $Lip(g_2) < (\|\hat{L}_2^{-1}\|')^{-1} - 1$ .

$\mathcal{L} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2)$  to funkcja ograniczona, bo  $h_1, g_1, f_1$  z prawej strony wzoru na  $\bar{h}_1$  są ograniczone i  $h_2, g_2, f_2$ , z prawej strony wzoru na  $\bar{h}_2$  są ograniczone.

Zatem z twierdzenia Banacha o punkcie stałym, dla  $\mathcal{L}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  istnieje dokładnie jeden punkt

stały, tzn.  $h$  spełniające równanie (4.2), zatem (4.1).

Oznaczmy skonstruowane dla  $f$  i  $g$  przekształcenie  $h$  przez  $h_{f,g}$ . Podobnie znajdziemy  $h_{g,f}$ . Mamy więc

$$(I + h_{g,f}) \circ (I + h_{f,g}) = I + \hat{h}$$

$I + \hat{h}$  spełnia równanie (4.1) dla  $L + f$  i jeszcze raz  $L + f$ . Ale wtedy (4.1) jest spełnione też przez  $h_{f,f} = 0$ . Zatem z jednoznaczności  $\hat{h} = h_{f,f} = 0$  więc

$$(I + h_{g,f}) \circ (I + h_{f,g}) = I$$

$$(I + h_{f,g}) \circ (I + h_{g,f}) = I,$$

zatem  $I + h_{f,g}$  to homeomorfizm  $B$  na  $B$ . □

## Wykład 5

# Twierdzenie Grobmana-Hartmana, dokończenie.

*Dowód.* (Tw. Grobmana-Hartmana dla dyfeomorfizmu)

Można założyć (przez wzięcie odpowiedniej mapy), że  $f$  przekształca otoczenie  $0$  w otoczenie  $0 \in \mathbb{R}^m$ .

Niech  $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  taka gładka funkcja, że

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dla } t \geq 1 \end{cases}$$
$$\left| \frac{d\rho}{dt} \right| < 3$$

Zdefiniujemy  $\tilde{f}: B \rightarrow B$  wzorem

$$\tilde{f}(z) = Df(0)z + \rho\left(\frac{\|z\|}{r}\right) \phi(z),$$

gdzie  $\phi := f - Df(0)$ .

Oznaczmy  $\tilde{\phi}(z) = \rho\left(\frac{\|z\|}{r}\right) \phi(z)$ .

Dla  $\|z\| \geq r$  mamy  $\tilde{\phi}(z) = 0$ . Jeśli norma  $\|\cdot\|: x \rightarrow \|x\|$  jest funkcją różniczkowalną, to można napisać, zakładając, że  $\|z\| \leq r$  i zauważając, że dla  $\chi(z) := \|z\|$  zachodzi  $\|D\chi\| \leq 1$ ,

$$\|D\tilde{\phi}(z)\| = \left\| D\left(\rho\left(\frac{\|z\|}{r}\right) \cdot \phi(z)\right) \right\| \leq$$
$$\left\| 3\frac{1}{r}\phi(z) \right\| + \left| \rho\left(\frac{\|z\|}{r}\right) \right| \cdot \|D\phi(z)\|.$$

Ponieważ  $D\phi(0) = 0$  mamy  $\|\phi(z)\| = o(\|z\|)$ .

Szacujemy więc dalej

$$\leq \frac{o(r)}{r} + O(r) \rightarrow 0, \text{ gdy } r \rightarrow 0, \text{ jednostajnie } \forall z.$$

Przyjmując w definicji  $r$  odpowiednio małe uzyskujemy  $\|D\tilde{\phi}\| \leq \epsilon$  dla  $\epsilon$  z twierdzenia (4.8) z wykładu (4). Zatem  $\tilde{\phi}$  jest Lipschitzowskie,  $Lip(\tilde{\phi}) < \epsilon$ .

Może się zdarzyć, że norma  $\|z\|$  nie jest funkcją różniczkowalną, np.  $\|z\| = |x| + |y|$  dla  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wtedy w powyższym rachunku zastępujemy  $\|D(\cdot)\|$  przez  $Lip$ , korzystając z faktu, że

$$Lip(h_1 \cdot h_2) \leq (Lip(h_1)) \sup \|h_2\| + (Lip(h_2)) \sup \|h_1\|$$

Dowód. (faktu)

$$\begin{aligned} & \frac{\|(h_1 \cdot h_2)(z) - (h_1 \cdot h_2)(w)\|}{\|z - w\|} \leq \\ & \frac{\|h_1(z)\| \cdot \|h_2(z) - h_2(w)\|}{\|z - w\|} + \frac{\|h_2(z)\| \cdot \|h_1(z) - h_1(w)\|}{\|z - w\|} \leq \\ & (Lip(h_2))(\sup \|h_1\|) + (Lip(h_1))(\sup \|h_2\|) \end{aligned}$$

□

Z tw. (4.8) z wykładu (4) wynika więc istnienie homeomorfizmu  $H: B \rightarrow B$

$$H \circ \tilde{f} = D\tilde{f}(0) \circ H, \quad H(0) = 0.$$

Ale blisko 0  $f = \tilde{f}$ , więc

$$H \circ f = Df(0) \circ H$$

□

Dowód. (Tw. Grobmana-Hartmana dla potoku  $\phi^t$ )

Najpierw trzeba udowodnić wersję twierdzenia (4.8) dla potoku

**Lemat 5.1.** *Jeśli  $\phi^t$  jest potokiem rozwiązującym równanie różniczkowe*

$$\frac{d\phi^t}{dt} = V(\phi^t(x))$$

w przestrzeni Banacha  $B$  i  $V(x) = Ax + F(x)$ , gdzie  $A$  to operator liniowy, ciągły z widmem rozłącznym z osią urojoną. Wtedy istnieje  $\epsilon > 0$  takie, że jeśli  $\sup \|DF\| < \epsilon$  i  $F$  jest tożsamościowo równe 0 poza pewnym otoczeniem  $0 \in B$  to istnieje homeomorfizm  $h$  taki, że dla potoku  $\psi^t(x) = e^{tA}x$  mamy dla każdego  $t$

$$H \circ \phi^t = \psi^t \circ H.$$

Dowód. Ustalmy dowolnie  $t = t_0 > 0$ . Zauważmy, że  $\phi^{t_0}(x) - \psi^{t_0}(x)$  jest funkcją ograniczoną. Wynika to stąd, że jeśli  $\|x\|$  jest odpowiednio duża, to  $\psi^t(x) = e^{At}x$  dla  $0 \leq t \leq t_0$  ma też dużą normę (większą lub równą  $\|e^{-tA}\|^{-1} \cdot \|x\|$ ) zatem dla wszystkich punktów  $y = e^{At}x$ ,  $0 \leq t \leq t_0$  mamy pola  $Ay$  i  $Ay + F(y)$  takie same, więc  $\phi^t(x) = \psi^t(x)$ .

Sprawdźmy teraz warunek Lipschitza i oszacujmy  $Lip(\phi^{t_0} - \psi^{t_0})$ , żeby móc zastosować tw. (4.8). Mamy

$$\begin{aligned} \chi_{t_0}(x, y) &:= \|(\phi^{t_0}(x) - \psi^{t_0}(x)) - (\phi^{t_0}(y) - \psi^{t_0}(y))\| \leq \\ & \left\| \int_0^{t_0} (V(\phi^t(x)) - A\psi^t(x)) - (V(\phi^t(y)) - A\psi^t(y)) dt \right\| = \\ & \left\| \int_0^{t_0} \left( (V(\phi^t(x)) - A\phi^t(x)) + (A\phi^t(x) - A\psi^t(x)) \right) - \left( (V(\phi^t(y)) - A\phi^t(y)) + (A\phi^t(y) - A\psi^t(y)) \right) dt \right\| \leq \\ & \int_0^{t_0} \|F(\phi^t(x)) - F(\phi^t(y))\| dt + \int_0^{t_0} \|A\| \cdot \|(\phi^t(x) - \psi^t(x)) - (\phi^t(y) - \psi^t(y))\| dt \leq \\ & t_0 \cdot Lip(F) \cdot \sup_{0 < t \leq t_0} \|\phi^t(x) - \phi^t(y)\| + \int_0^{t_0} \|A\| \chi_t(x, y) dt \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\|\phi^t(x) - \phi^t(y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t \text{Lip}(V) \cdot \|\phi^s(x) - \phi^s(y)\| ds$$

więc z nierówności Gronwalla (wykłady z Równań Różniczkowych Zwyczajnych)

$$\|\phi^t(x) - \phi^t(y)\| \leq \|x - y\| e^{t \cdot \text{Lip}(V)}.$$

Zatem

$$\chi_{t_0}(x, y) \leq (t_0 \cdot \text{Lip}(F) \cdot e^{t_0 \cdot \text{Lip}(V)} \cdot \|x - y\|) + \int_0^{t_0} \|A\| \chi_t(x, y) dt$$

Znowu z nierówności Gronwalla

$$\chi_{t_0}(x, y) \leq t_0 \cdot \text{Lip}(F) \cdot e^{t_0 \cdot \text{Lip}(V)} \cdot \|x - y\| \cdot e^{t_0 \|A\|}.$$

Zatem  $\phi^{t_0} - \psi^{t_0}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą:

$$t_0 \cdot \text{Lip}(F) \cdot e^{t_0 \cdot \text{Lip}(V)} \cdot e^{t_0 \|A\|}, \quad (5.1)$$

co jest dowolnie małe jeśli  $\text{Lip}(F) \leq \|DF\|$  jest dostatecznie małe.

Mamy teraz dwie drogi dokończenia dowodu:

*Dowód.* (droga 1)

Przypomnijmy z dowodu Twierdzenia (4.8), że warunkiem dostatecznym dla istnienia homeomorfizmu  $h = h_t$ , żeby  $(I + h_t)\phi^t = \psi^t(I + h_t)$  jest ograniczoność  $\phi^t - \psi^t$ , gdzie  $\psi^t(x) = e^{At}x$  jest częścią liniową  $\phi^t(x)$  w 0) oraz

$$\text{Lip}(\phi^t - \psi^t) \leq \epsilon_0(t) < \min \left( \|e^{-tA}\|^{-1}, 1 - \|e^{A_1 t}\|, 1 - \|e^{-A_2 t}\|^{-1} \right),$$

gdzie  $A_1, A_2$  to obcięcia  $A$  do  $E^1, E^2$ . To ostatnie wynika z oszacowania przez wyrażenie w (5.1), o ile  $\text{Lip}(F) \leq \|DF\|$  jest dostatecznie małe, dla każdego  $0 < t \leq 1$ .

Ograniczoność  $\phi^t - \psi^t$  wynika stąd, że daleko od 0,  $F \equiv 0$ .

Dla  $t = \frac{1}{n}$  mamy

$$(I + h_{\frac{1}{n}}) \circ \phi^{\frac{1}{n}} = \psi^{\frac{1}{n}} \circ (I + h_{\frac{1}{n}}),$$

czyli

$$(I + h_{\frac{1}{n}}) \circ \phi^{\frac{1}{n}} \circ (I + h_{\frac{1}{n}})^{-1} = \psi^{\frac{1}{n}}$$

Składając te lewe i prawe strony  $n$  razy otrzymujemy

$$(I + h_{\frac{1}{n}}) \circ \phi^1 \circ (I + h_{\frac{1}{n}})^{-1} = \psi^1$$

Ponieważ  $(I + h_1) \circ \phi^1 \circ (I + h_1)^{-1} = \psi^1$  otrzymujemy z jednoznaczności dla każdego  $n$

$$h_{\frac{1}{n}} = h_1.$$

Podobnie jak wyżej

$$(I + h_{\frac{1}{n}}) \circ \phi^{\frac{k}{n}} \circ (I + h_{\frac{1}{n}})^{-1} = \psi^{\frac{k}{n}} \quad \forall 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ  $\{\frac{k}{n}\}$  jest gęsty w  $[0, 1]$ , z ciągłości  $\phi, \psi$  otrzymujemy dla  $H = I + h_1$  i dla każdego  $0 \leq t \leq 1$

$$H \circ \phi^t = \psi^t \circ H,$$

więc, jak wyżej, tę samą równość dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ . □

*Dowód.* (droga 2)

Wystarczy używać tylko  $h_{t_0} = h$  dla ustalonego  $t_0$  np.  $t_0 = 1$ . Z  $(I + h) \circ \phi^1 = \psi^1 \circ (I + h)$  wynika bowiem dla każdego  $t$

$$\psi^{-t} \circ (I + h) \circ \phi^1 \circ \phi^t = \psi^{-t} \circ \psi^1 \circ (I + h) \circ \phi^t,$$

czyli

$$(\psi^{-t} \circ (I + h) \circ \phi^t) \circ \phi^1 = \psi^1 \circ (\psi^{-t} \circ (I + h) \circ \phi^t).$$

Odległość  $\psi^{-t} \circ (I + h) \circ \phi^t$  od  $I$  jest ograniczona, bo daleko  $\phi^t = \psi^t$ . Zatem z jednoznaczności  $h_1$  otrzymujemy dla każdego  $t$

$$\psi^{-t} \circ (I + h) \circ \phi^t = I + h$$

□

Lemat (5.1) został więc udowodniony (nawet dwoma sposobami).

Twierdzenie Grobmana-Hartmana udowodnimy teraz zatępując pole  $V(z)$  przez

$$\tilde{V}(z) = \rho \left( \frac{\|z\|}{r} \right) (V(z) - DV(0)z) + DV(0)z$$

jak w wersji dla dyfeomorfizmu. □

(Ten dowód znowu jest poprawny o ile  $z \mapsto \|z\|$  jest gładkie. W przeciwnym razie,  $\tilde{V}$  może nie być różniczkowalne i trzeba zmodyfikować szacowanie  $Lip(F)$ )

*Uwaga 5.2.* Sprzężenie  $H$  zależy od rozszerzeń  $\tilde{f}$  (dla dyfeomorfizmu) lub  $\tilde{V}$ . Dopiero przy zadanych rozszerzeniach jest jednoznaczne. Tę dowolność widać z łatwego dowodu tw. G-H jeśli  $x$  jest ściekiem, to znaczy dla  $\lambda \in \text{spec}(Df(x))$  mamy  $|\lambda| < 1$  (w wersji dla dyfeomorfizmu,  $f(x) = x$ ).

Dla  $r > 0$  odpowiednio małego mam

$$f(\overline{B(x, r)}) \subset B(x, r) \text{ i}$$

$$Df(x)(\overline{B(0, r)}) \subset B(0, r)$$

Definiujemy  $H: \overline{B(x, r)} \setminus f(B(x, r)) \rightarrow \overline{B(0, r)} \setminus Df(x)(B(0, r))$  jako dowolny homeomorfizm, taki żeby przeszły na brzegi i na brzegu  $\partial B(x, r)$

$$Df \circ H = H \circ f$$

(Znalezienie takiego  $H$  nie jest całkiem trywialne).

Dalej rozszerzamy  $H$  na otoczenie  $x$  wzorem

$$H(z) = Df^n(x) \circ H \circ f^{-n}(z),$$

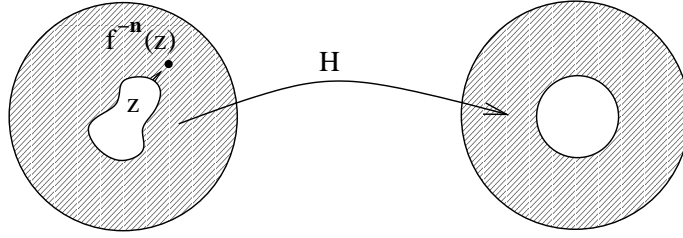
gdzie  $n \geq 0$  to najmniejsze  $n$  takie, że

$$f^{-n}(z) \in \overline{B(x, r)} \setminus f(B(x, r))$$

Można znaleźć  $H$  gładkie, tak jak  $f$ , wszędzie poza punktem  $x$ .

**Wniosek 5.3.** *Z tw. G-H wynika twierdzenie Hadamarda-Perrona w słabej wersji: zbiory  $W_e^s(x)$  i  $W_e^u(x)$  (lokalnie stabilne i niestabilne) są topologicznymi rozmaitościami (przejścia pomiędzy mapami  $\phi_j^{-1} \phi_i$  są homeomorfizmami*





Rysunek 5.1:

*Dowód.*

$$W_\epsilon^{s(u)}(x) = H(E^{s(u)} \cap B(0, \epsilon))$$

□

*Uwaga 5.4.* Na wykładzie (1) wspomniałem, że globalne rozmaitości stabilne i niestabilne punktów stałych  $W^{s(u)}(x)$  są immersyjnymi obrazami  $\mathbb{R}^{s(u)}$ . Rozumowanie z uwagi (1) daje dowód tego faktu.

*Dowód.* Wychodząc z homeomorfizmu

$$H: \overline{B(0, r)} \setminus Df(B(0, r)) \rightarrow W_r^s(x) \setminus f(W_r^s(x))$$

$$\overline{B(0, r)} \setminus Df(B(0, r)) \subset E^s(x) \subset T_x M$$

takiego, że dla  $z \in \partial B(0, r)$

$$H \circ Df(z) = f \circ H(z)$$

definiujemy dla  $z \in \overline{B(0, r)}$ ,  $n \geq 0$  takiego, że

$$Df^n(z) \in \overline{B(0, r)} \setminus Df(B(0, r))$$

$$H(z) = f^n \circ H \circ Df^{-n}(z).$$

Wychodząc z odpowiedniego  $h$  na “pierścieniu”  $\overline{B(0, r)} \setminus Df(B(0, r))$  można uzyskać  $H$  gładkie (poza 0).

Możemy jednak  $H$  zdefiniować także dla  $z \in E^s$  poza  $B(0, r)$  takim samym wzorem

$$H(z) = f^n \circ H \circ Df^{-n}(z),$$

gdzie  $n \geq 0$  najmniejsze takie, że  $Df^n(z) \in \overline{B(0, r)}$ . □

*Uwaga 5.5.* Jeśli  $\phi^t(x) = O(x)$  jest orbitą okresową hiperboliczną dla potoku, to podobnie dowodzimy, że

$$W_t^{s(u)}(\phi^t(x)) = \{ \phi^t(z) \rightarrow O(x), t \rightarrow \infty(-\infty) \} = \bigcup_{t \leq 0(t \geq 0)} \phi^t(W_\epsilon^{s(u)}(x))$$

dla  $f$  przekształcenia pierwszego powrotu do  $L$ , cięcia transwersalnego przechodzącego przez  $x$  jest albo immersyjnym zanurzeniem  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  albo uogólnioną wstęgą Mobiusa, tzn. zawieszeniem  $f: \mathbb{R}^{\sim} \rightarrow \mathbb{R}^s$  izomorfizmu zmieniającego orientację.  $W^s(O(x))$  nazywamy **rozmaitością stabilną orbity okresowej**  $O(x)$ . Podobnie  $W^u(O(x))$  nazywamy **rozmaitością niestabilną orbity**  $O(x)$ .

Jeśli okresem  $x$  jest  $t_0 > 0$  to można zdefiniować **rozmaitość stabilną (niestabilną) punktu  $x$**  jako

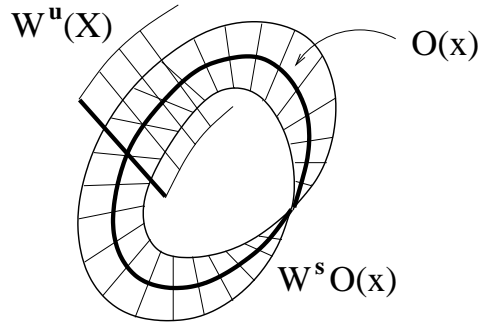
$$W^s(x) = \{z \mid \rho(\phi^t(z), \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ dla } t \rightarrow \infty\}$$

Wtedy jest ona immersyjnym zanurzeniem przestrzeni euklidesowej i

$$W^s(O(x)) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_0} W(\phi^t(x)).$$

(ćwiczenie)

□



Rysunek 5.2: rozmaitości stabilna i niestabilna

Nie zawsze daje się znaleźć linearyzację  $H$  w tw. G-H gładką. Wyjaśnimy to na następnych wykładach.

## 5.1. Uzupełnienie Wykładu 3: obmotka na torusie i rozbitcie na prostokąty.

Wróćmy do lematu (1) z wykładu (3). Prześledźmy jak może wyglądać przekształcenie  $f$  pierwszego powrotu do odcinka  $L$  będącego cięciem transwersalnym dla obmotki torusa.

Ponieważ wszystkie trajektorie są gęste, każdy punkt wraca do  $L$  i jedynie w punktach, których trajektorie przed powrotem do  $L$  przechodzą przez końce  $L$  czas powrotu  $t(z)$  może nie być ciągły. Mogą to być albo 2 różne punkty, albo jeden, jeśli jego trajektoria w przód najpierw przejdzie przez jeden koniec  $L$ , potem przez drugi, a dopiero potem wróci do  $L$ . Inaczej mówiąc to się zdarza, kiedy końce  $L$  leżą na części trajektorii, która po drodze między nimi nie przecina  $L$ . Przekształcenie pierwszego powrotu

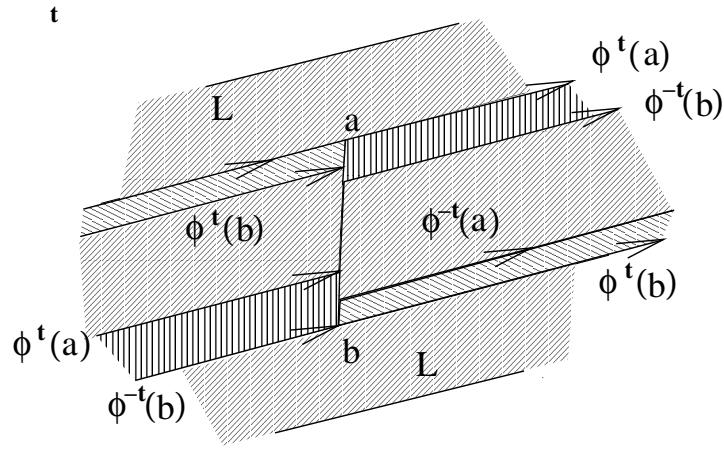
$$f(z) = \phi^{t(z)}(z)$$

to przekształcenie **przekładania odcinków** (tutaj 3 odcinków).

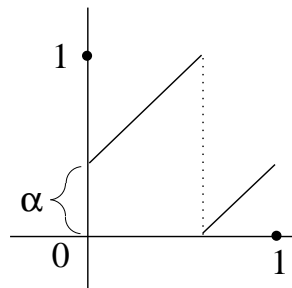
To jest uogólnienie obrotu na okręgu. Jeśli okrąg rozciąć robiąc z niego odcinek to obrót staje się przekształceniem przekładania dwóch odcinków.

**Definicja 5.6.**  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  nazywa się przekształceniem przekładania odcinków, jeśli  $[0, 1]$  można rozłożyć na skończoną sumę odcinków stykających się brzegami  $[0, 1] = \bigcup I_j$ ,  $f$  na każdym  $I_j$  jest izometrią, obrazy  $f(I_j)$  są parami rozłączne, oprócz brzegów.

**Twierdzenie 5.7.** Dla prawie wszystkich (w sensie miary Lebesgue'a) układów liczb  $a_1, \dots, a_k > 0$ ,  $\sum_{j=1}^k a_j = 1$ , przy ustalonej permutacji, przekształcenie przekładania odcinków  $I_j$  o długościach  $a_j = |I_j|$ , zgodne z tą permutacją, jest **ergodyczne**.



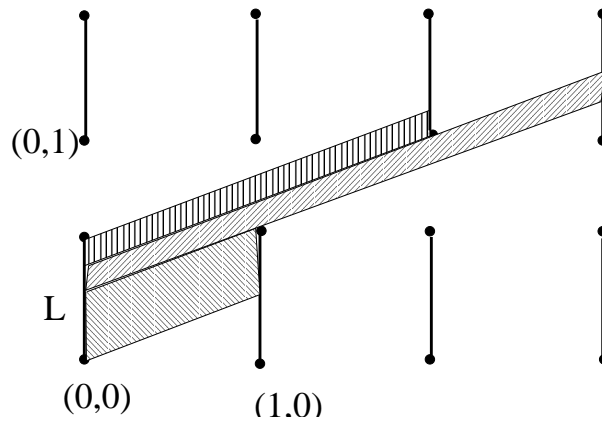
Rysunek 5.3: schemat



Rysunek 5.4: Wykres obrotu o kąt  $\alpha$  (przekładanie 2 odcinków)

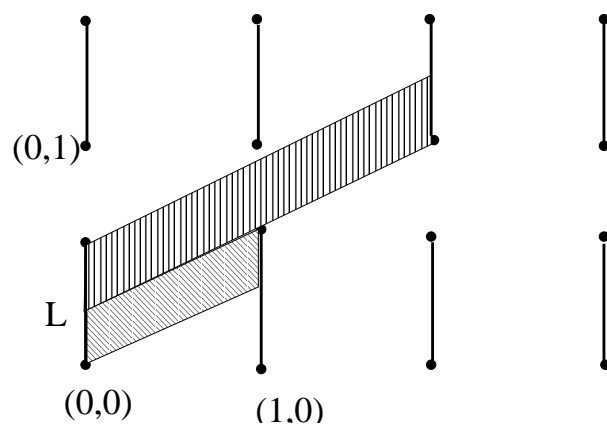
Dowód jest trudny, omijamy go. (Dowód ergodyczności dla obrotu na okręgu o kąt niewymierny był na ćwiczeniach, tw. Weyla - von Neumanna).

Dokładniejsze ilustracje przekształcenia pierwszego powrotu do  $L$  dla obmotki na torusie daje geometrycznie interesujące rozkłady torusa na 3 lub 2 prostokąty. (Na rysunkach to są



Rysunek 5.5:

równoległoboki. Będą prostokątami, jeśli  $L$  jest prostopadłe do trajektorii obmotki).

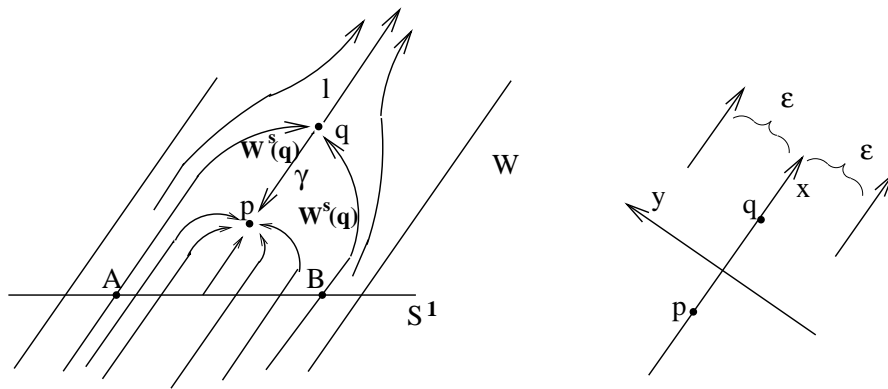


Rysunek 5.6:

# Wykład 6

Przykład 6.1. Potok Cherry'ego na torusie

Zaczynamy od pola  $V$  stałego, z niewymiernym stosunkiem współrzędnych, zatem dającego potok  $\phi^t$ , obrotkę. Ustalamy dowolny punkt i zmieniamy pole w jego otoczeniu tak, żeby uzyskać następujący obraz fazowy dla nowego pola  $W$ . We współrzędnych  $x, y$  o osi



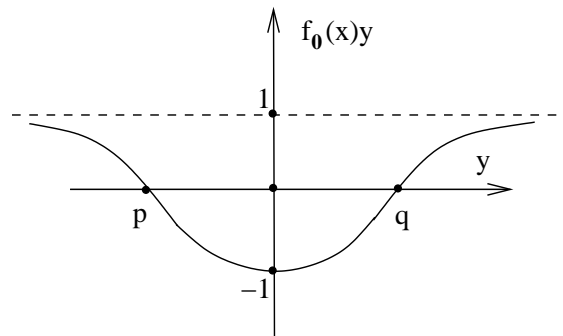
Rysunek 6.1:

ach równoległych i odpowiednio prostopadłych do trajektorii obrotki można to pole opisać wzorami

$$W = (f, g), \quad f \equiv 1 \text{ na } |y| \geq \epsilon$$

$f(x, y) = f_0(x)$  ma wykres

Ogólnie



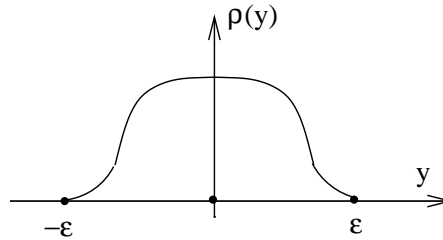
Rysunek 6.2:

$$f(x, y) = \rho(y)f_0(x) + (1 - \rho(y)) \cdot y$$

dla gładkiej funkcji

$$\rho(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y = 0 \\ 0 & \text{dla } |y| \geq \epsilon \end{cases}$$

Podobnie  $g \equiv 0$  na  $|y| \geq \epsilon$  i ogólnie

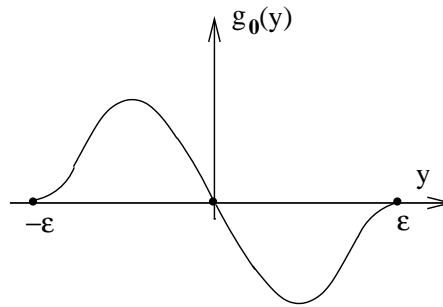


Rysunek 6.3:

$$g(x, y) = g_0(x)\rho(x)$$

dla  $g_0(x)$  o wykresie

Mamy



Rysunek 6.4:

$$DV(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial g_0}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} > 0 & 0 \\ 0 & < 0 \end{pmatrix},$$

więc  $q$  jest źródłem.

$$DV(p) = \begin{pmatrix} < 0 & 0 \\ 0 & < 0 \end{pmatrix},$$

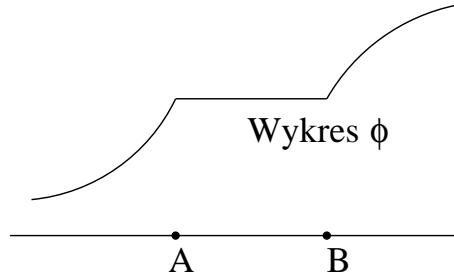
więc  $p$  jest ściekiem.

Można wziąć okrąg  $S^1$ , globalne cięcie transwersalne, jak na rysunku (6.1),  $((T)^2 = S^1 \times S^1)$  i rozpatrywać przekształcenie pierwszego powrotu do  $S^1$  zdefiniowane na  $S^1 \setminus [A, B]$ .

Można je rozszerzyć do przekształcenia  $\Phi: S^1 \rightarrow S^1$  definiując je dla każdego punktu należącego do łuku  $[A, B]$  jako punkt z przecięcia separatrasy niestabilnej  $l$  wychodzącej z punktu  $q$ . Wtedy  $\Phi$  jest przekształceniem monotonicznym  $S^1$  w  $S^1$  mającym “plateau” (to znaczy stałą wartość) na odcinku  $[A, B]$ .

*Ćwiczenie 6.2.* Jaka jest pochodna lewostronna w  $A$  i prawostronna w  $B$  ?

Można wziąć dwa okręgi w  $\mathbb{T}^2$  daleko od  $p, q$  postaci  $S^1 \times \{y_1\}, S^1 \times \{y_2\}$  i pomiędzy nimi zastąpić  $W$  polem  $W_\lambda$  dającym potok jak na rysunku: Oznaczmy przekształcenie pierwszego



Rysunek 6.5:

powrotu do  $S^1$  przez  $\Phi_\lambda$ . Mamy

$$\Phi_\lambda = R_\lambda \circ \Phi,$$

gdzie  $R_\alpha$  to obrót o kąt  $\lambda$ . Ponieważ  $\lambda$  może się zmieniać od 0 do 1 i wtedy liczba obrotu  $\rho(\widetilde{\Phi}_\lambda)$  zmienia się monotonicznie ( $\widetilde{\Phi}_\lambda$  to podniesienie  $\Phi_\lambda$  do  $\mathbb{R}$  zależne od  $\lambda$  w sposób ciągły) oraz

$$\rho(\widetilde{\Phi}_1) = \rho(\widetilde{\Phi}_0) + 1$$

to wszystkie liczby obrotu mogą być przyjęte, w szczególności niewymierne.

Jeśli  $\rho(\widetilde{\Phi}_\lambda)$  jest niewymierne, to istnieje  $h_\lambda: S^1 \rightarrow S^1$  funkcja ciągła, monotoniczna, taka, że

$$H_\lambda \circ \Phi_\lambda = R_\lambda \circ h_\lambda.$$

Stąd wynika w szczególności, że każda trajektoria pola  $W_\lambda$  oprócz przechodzących przez  $[A, B]$  (dla nich  $\Phi$  było zdefiniowane sztucznie i nie odpowiada trajektorii potoku wracającej do  $S^1$ ) jest gęsta w

$$M = \mathbb{T}^2 \setminus (\{\phi^t(x) \mid x \in (A, B), t \in \mathbb{R}\} \cup \gamma),$$

gdzie  $\gamma$  to separatrix niestabilna z  $q$  do  $p$  (rys. (6.1)).

“Rozdmuchana trajektoria”  $\{\phi^t(x) \mid x \in (A, B), t \in \mathbb{R}\}$  jest też gęsta w  $\mathbb{T}^2$ . Zbiór  $M$  jest *quasi-minimalny*.

**Definicja 6.3.** Zwarty niezmienniczy dla potoku zbiór  $X$  nazywa się **quasi-minimalny**, jeśli zawiera skończenie wiele punktów stałych i dla każdego  $x \in X$  albo  $\omega(x) = X$  albo  $\omega(x) = \text{punkt stały}$ .

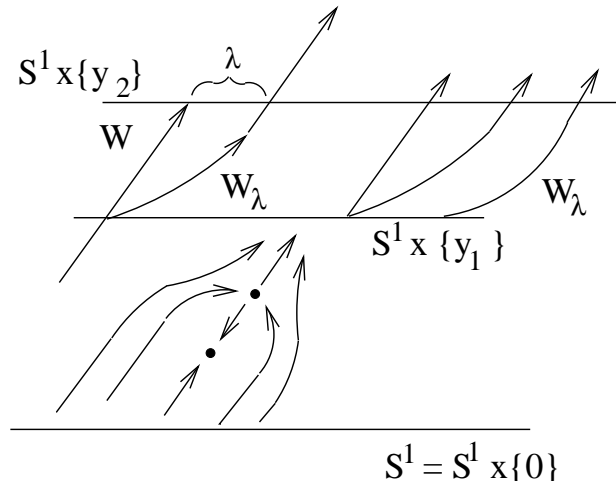
*Ćwiczenie 6.4.* (Katok-Hasselblatt) Pokazać, że na zwartej orientowalnej powierzchni  $M$ , liczba brzegowych zbiorów minimalnych, które nie są punktami stałymi lub orbitami zamkniętymi, dla pola klasy  $C^1$ , może być równa  $g = \text{genus}(M)$ , ale nie większa.

Pokazać, że dla pola klasy  $C^r$ ,  $r \geq 2$  liczba zbiorów quasi-minimalnych nie będących punktami stałymi lub orbitami zamkniętymi może być równa  $g$ , ale nie większa.

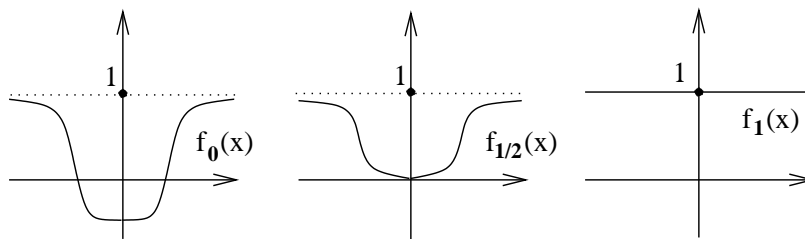
*Uwaga 6.5.* Jeśli w konstrukcji pola  $W$  dla potoku Cherry’ego zastąpić funkcję  $f_0$  funkcją  $f_s$ , gdzie  $f_s = (1 - s)f_0 + s$  to otrzymamy 1-parametrową rodzinę pól  $W_s$  (2-parametrową jeśli dodać parametr  $\lambda$  zmieniający liczbę obrotu, jak poprzednio).

Dla parametru  $s = \frac{1}{2}$  mamy topologiczną zmianę obrazu fazowego, tak zwaną **bifurkację siodło-węzeł**. Inny przykład bifurkacji siodło-węzeł

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + s \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$



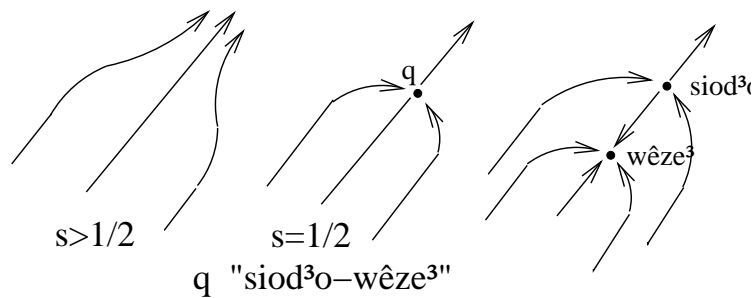
Rysunek 6.6:



Rysunek 6.7:

Przykład w wymiarze 3

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + s \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z \end{cases}$$



Rysunek 6.8:

*Uwaga 6.6.* W przykładzie Cherry'ego obszar  $U$  w  $\mathbb{T}^2$  między dwiema separatrydami siodła  $q$  jest kolejnym przykładem (obok przykładów składowych Ręba z wykładu (3)) gdzie  $\forall x, y$   $\omega(x) = \omega(y)$ ,  $\alpha(x) = \alpha(y)$ .  $U$  składa się z punktów nierekurencyjnych i  $\omega(x), \alpha(x) \subset \partial U$ .

Można napisać **Twierdzenie Klasyfikacyjne** dla potoków na zwartych powierzchniach (wg. Aronson, Grines "Flows on 2-dimensional manifolds").



Najpierw

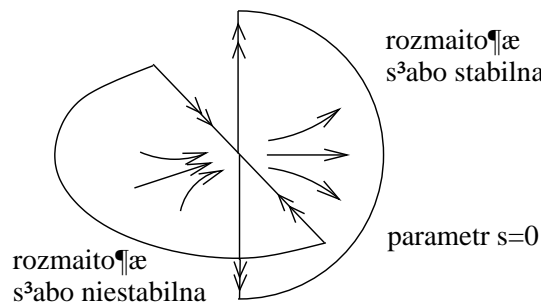
**Definicja 6.7.** Trajektorie osobliwe na powierzchni  $M$  to następujące trajektorie

1. punkty stałe
2. separatrasy (definicja poniżej)
3. trajektorie okresowe, takie, że przekształcenie Poincare'go (to znaczy pierwszego powrotu dla cięcia transversalnego przecinającego trajektorię) jest różne od identyczności dla dowolnie małego cięcia.
4. trajektorie nieokresowe  $\gamma$  rekurencyjne w przód lub w tył, mające następującą własność:

$$\forall x \in \gamma \exists \text{ otoczenie otwarte } U \ni x \text{ i łuk } \gamma_1 \subset \gamma, \gamma_1 \ni x$$

rozcinający  $U$  na 2 składowe w jednej, z których nie ma trajektorii nieokresowych nierekurencyjnych.

**Definicja 6.8.** Trajektorija potoku  $\phi^t(x)$  nazywa się **separatryszą** jeśli dla  $t \rightarrow \infty$  (lub  $t \rightarrow -\infty$ )  $\phi^t(x) \rightarrow p$ , gdzie  $p$  to punkt stały, istnieje otoczenie  $U \ni p$  oraz ciąg punktów  $x_n \rightarrow x$  oraz  $s_n \rightarrow \infty$ ,  $t_n > s_n$  (odpowiednio  $s_n \rightarrow -\infty$ ,  $t_n < s_n$ ) takie, że  $\phi^{s_n}(x_n) \rightarrow p$ ,  $\phi^{t_n}(x_n) \notin U$ .



Rysunek 6.9:

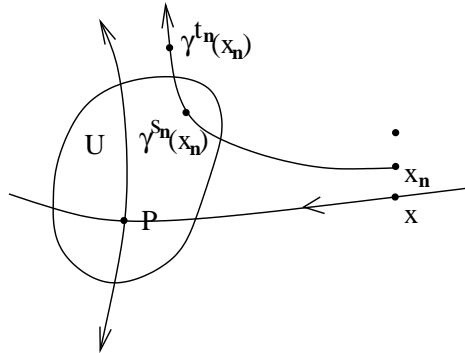
*Uwaga 6.9.* Trajektorie nieokresowe rekurencyjne nie mogą istnieć na sferze, płaszczyźnie rzutowej i butelce Kleina.

**Twierdzenie 6.10.** (Twierdzenie klasyfikacyjne)

Założmy, dla potoku  $\phi^t$ ,  $C^1$ -pola wektorowego, na zwartej powierzchni  $M$  jest skończenie wiele trajektorii osobliwych typu 1), 2). Wtedy po wyjęciu z  $M$  wszystkich osobliwych trajektorii, pozostały zbiór rozpada się na składowe niezmiennicze dla potoku następujących typów:

1. Składowa otwarta płaska (to znaczy zanurzalna w  $\mathbb{R}^2$ ) jednospójna lub dwuspójna (to znaczy homeomorficzna z pierścieniem  $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ ). Wszystkie punkty tej samej składowej mają ten sam zbiór  $\omega$ -graniczny i ten sam zbiór  $\alpha$ -graniczny, leżące w  $\partial U$ .
2. Składowa otwarta będąca sumą trajektorii okresowych. Jest to albo obszar dwuspójny albo torus.
3. Składowa będąca sumą nieokresowych trajektorii rekurencyjnych. Jest to albo torus (obmotka), albo też zbiór drugiej kategorii w swoim domknięciu, które w przecięciu z cięciem transversalnym, z konncami poza nim jest Cantora (uogólnienie zbiorów minimalnych Denjoy i quasi-minimalnych, patrz def (1)).

*Uwaga 6.11.* Jeśli  $\bar{U}$  można  $C^1$ -zanurzyć w  $\mathbb{R}^2$  (lub  $\bar{U} = S^2$  i pole  $V$  rozszerza się na  $C^1$  w otoczeniu  $\bar{U}$  w  $\mathbb{R}^2$  to dla  $x \in U$   $\omega(x)$  i  $\alpha(x)$  są okresowe lub są cyklami separatrysty i punktów stałych leżących w  $\partial U$ . Wynika to z Tw. Poincaré'go-Bendixsona (wersji z punktami stałymi, patrz ćwiczenia).

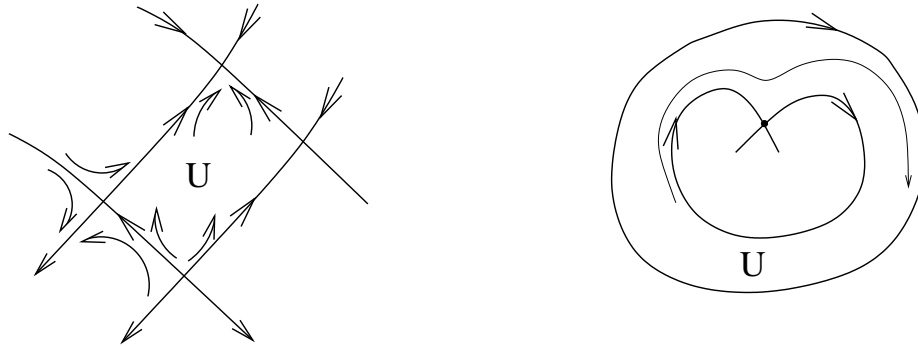


Rysunek 6.10:

*Przykład 6.12.* • **Typ 1**

Jeśli  $\bar{U}$  nie można zanurzyć jak wyżej, to  $U$  jest “uogólnioną” składową Cherry’ego lub “uogólnioną” szczeliną Denjoy.

Uogólnienie w tym sensie, że pole  $V$  na osiągalnych z  $U$  trajektorjach w  $\partial U$  może



Rysunek 6.11:

być pomnożone przez funkcję mającą zera, rozbijając taką trajektorię na ciąg punktów stałych i separatrysty.

• **Typ 1 c.d**

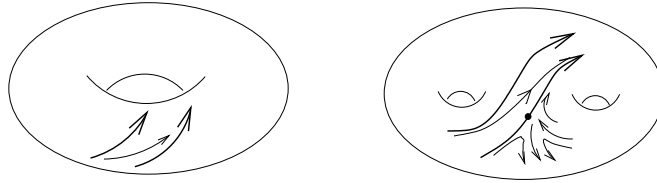
Składowe mające w osiągalnej części brzegu trajektorie rekurencyjne nieokresowe.

- “szczelina” Denjoy
- “uogólniona” szczelina Denjoy
- obszar Cherry

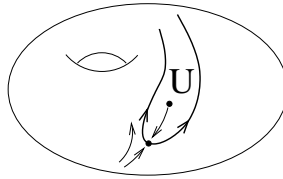
• **Typ 2**

Potok jest zawieszeniem symetrii okręgu zaznaczonego przerywaną linią.

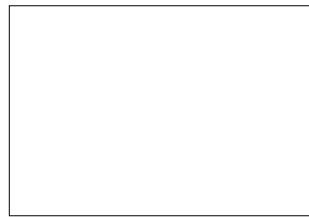
*Uwaga 6.13.* Składowych typu 3 jest co najwyżej  $g$  w przypadku gdy  $M$  jest orientowalna i co najwyżej  $\left\lceil \frac{g-1}{2} \right\rceil$  gdy  $M$  jest nieorientowalna ( $\lceil \cdot \rceil$  oznacza część całkowitą).  $g$  oznacza genus  $M$  to znaczy



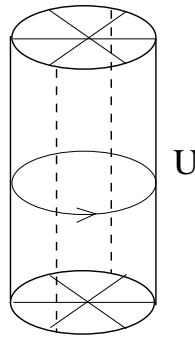
Rysunek 6.12:



Rysunek 6.13:



Rysunek 6.14:



Rysunek 6.15:

- w przypadku orientowalnym przy przedstawieniu  $M$  jako sfery z rączkami: liczbę rączek.
- w przypadku nieorientowalnym przy przedstawieniu  $M$  jako sfery z wyciętymi dyskami, w które wklejone są wstęgi Möbiusa, liczbę tych dysków (wstęg Möbiusa).

Przyklejenie każdych dwóch wstęg Möbiusa, oprócz pierwszej, to to samo co przyklejenie rączki, a w każdej rączce może być najwyżej jedna składowa typu 3. Stąd wzór  $\left[\frac{g-1}{2}\right]$ .

Zajmiemy się teraz klasą potoków zwanych **gradientowymi**. Niech  $M$  będzie różniczkowalną i  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją ciągłą. Ustalmy na  $M$  metrykę Riemannowską  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Wtedy można zdefiniować na  $M$  pole grad  $h$  jako pole spełniające równość

$$\langle \text{grad } h, v \rangle = Dh(v)$$

dla każdego wektora stycznego  $v \in T_x M$ ,  $\forall, x \in M$ . W przypadku  $M = \mathbb{R}^m$  i euklidesowej metryki

$$\text{grad } h = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_m} \right)$$

**Fakt 6.14.**  $\text{grad } h$  jest prostopadły do poziomicy  $h$ .

*Dowód.* Jeśli  $v$  jest styczny do poziomicy, to  $Dh(v) = 0$ . Wtedy

$$\langle \text{grad } h, v \rangle = Dh(v) = 0.$$

□

W mapie  $\langle v, w \rangle = \sum a_{ij} v_j w_i$ , gdzie  $a_{ij}$  to macierz symetryczna dodatnio określona. Załóżmy, że  $(\text{grad } h)(x) = 0$ . Różniczkę  $D(\text{grad } h)(x)$  nazywamy **Hesjanem**. Mamy w mapie dla  $\text{grad } h = (v_1, \dots, v_m) = \sum_{j=1}^m v_j e_j$  w dowolnym punkcie  $y$ , gdzie  $e_j$  to wersory bazowe  $e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  w  $T_y M$ ,

$$\langle \text{grad } h, e_i \rangle = \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j = \frac{\partial h}{\partial x_i}, \text{ czyli}$$

$$\text{grad } h = A^{-1} \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_m} \right)$$

Wreszcie w zerze pola, punkcie  $x$  mamy Hesjan

$$D(\text{grad } h)(x) = A^{-1} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

To jest macierz symetryczna, więc wszystkie jej wartości własne są rzeczywiste.

Założmy, że dla każdego  $x$  takiego, że  $(\text{grad } h)(x) = 0$  macierz  $\left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \right]$  jest rzędu  $m$  (mówimy, że  $x$  jest **niezdegenerowanym punktem krytycznym** funkcji  $h$ ).

Taką funkcję  $h$  nazywamy **funkcją Morse'a**. Wtedy wartości własne Hesjanu w każdym  $x$ , zerze  $\text{grad } h$  są niezerowe. Zatem wszystkie zera gradientu funkcji Morse'a są **punktami hiperbolicznymi**.

*Przykład 6.15.*

$$h = - \text{wysokość},$$

na sferze w  $\mathbb{R}^3$ , zanurzonej jak na rysunku.

(Trajektorie pola  $\text{grad } h$  można sobie wyobrażać jako trajektorie ściekającej po powierzchni kropli wody, dlatego wziąłem w tym przykładzie  $h = -\text{wysokość}$  a nie  $h = +\text{wysokość}$ .)

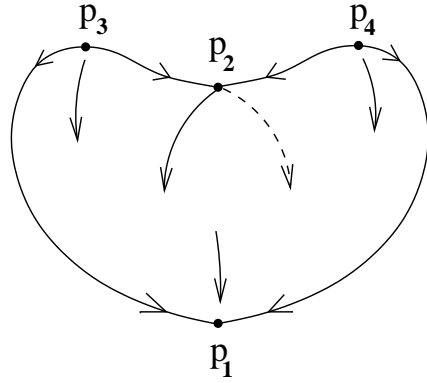
Mamy źródła  $p_3$  i  $p_4$ , siodło  $p_2$ , ściek  $p_1$ .

*Uwaga 6.16.* Funkcje Morse'a zostały użyte do dowodu hipotezy Poincare'go w wymiarze  $m \geq 5$ .

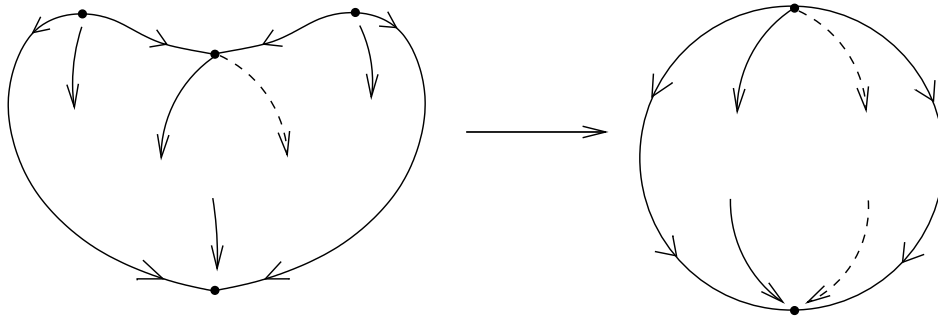
*Hipoteza 6.17. (Poincare'go)*

*Rozmaitość topologiczna  $M$  wymiaru  $m$ , homotopijnie równoważna sferze  $S^m$ , to znaczy istnieje  $\phi_1: M \rightarrow S^m$  i  $\phi_2: S^m \rightarrow M$ ,  $\phi_1 \circ \phi_2 \sim id$ ,  $\phi_2 \circ \phi_1 \sim id$ , jest homeomorficzna z  $S^m$  ( $\sim$  oznacza: homotopijna).*

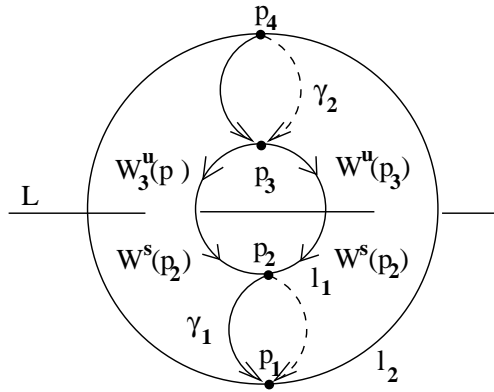
Przebudowuje się funkcję Morse'a tak, że w końcu mamy funkcję tylko z dwoma punktami krytycznymi,  $\text{grad } h = 0$  maksimum i minimum; patrz książka J.Milnor "Twierdzenie o h-kobordyzmie".



Rysunek 6.16:



Rysunek 6.17:



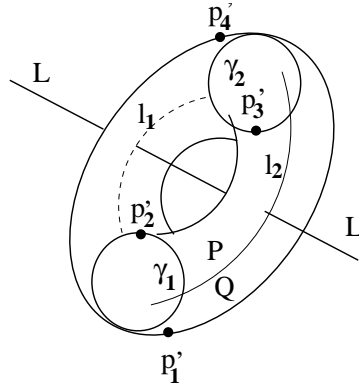
Rysunek 6.18:

Przykład 6.18. Pionowo postawiony torus.  
 $p_1$  to ściek,  $p_2, p_3$  to siodła,  $p_4$  to źródło.

$$W^s(p_2) \setminus p_2 = W^u(p_3) \setminus p_3$$

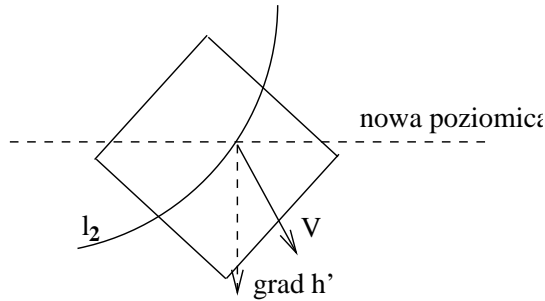
to przecięcie  $W^s(p_2)$  i  $W^u(p_3)$  nie jest w żadnym punkcie transwersalne.

Dla potoku transwersalne przecięcie 1-wymiarowych separatryst oznacza po prostu rozłączność. Jeśli pole trochę zmienimy, np. pochylimy torus, to otrzymamy rozłączność.  $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$  to nowe punkty krytyczne dla nowej funkcji  $h = -\text{wysokość}$ . Suma okręgów  $l_1 \cup l_2$  rozcina  $\mathbb{T}^2$  na część przednią  $P$  i tylną  $Q$ , pochylanie to obrót wokół osi  $L$ . Płaszczyzna styczna w dowol-



Rysunek 6.19:

nym  $z \in l_{1,2}$  do  $\mathbb{T}^2$  "przechylili się", to znaczy wektor styczny  $v$  do wyjściowej poziomici  $h$  w kierunku  $Q$  będzie skierowany w dół. Zatem  $\text{grad } h'$  jest skierowany do  $Q$ . Zatem separatrysa niestabilna  $W^u(p'_3)$  nie może dojść do  $p'_2$ , bo  $p'_3 \in Q$ ,  $p'_2 \in P$ , musiałaby przejść przez  $l_1$  lub  $l_2$  z  $Q$  do  $P$ , w przeciwną stronę niż pole  $\text{grad } h'$ .



Rysunek 6.20:

*Uwaga 6.19.* Potok gradientowy nie ma orbit okresowych ani punktów rekurencyjnych (tzn.  $x \in \omega(x)$ ) oprócz punktów stałych. Faktycznie pochodna  $h$  w kierunku  $\text{grad } h$

$$Dh(\text{grad } h) = \langle \text{grad } h, \text{grad } h \rangle > 0$$

(=0 w punktach krytycznych), zatem wzdłuż niestających trajektorii  $h$  jest ściśle rosnące.

$h$  pełni tu rolę funkcji Lyapunowa. Przypominam, że punkt  $x$  stały jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja różniczkowalna  $k \geq 0$ ,  $k(x) = 0$  taka, że  $Dk(v) < 0$ .

Również zbiór **punktów niebłądzących**  $\Omega(\text{grad } h)$  składa się jedynie z punktów stałych.

**Definicja 6.20.** • Dla dyfeomorfizmu (homeomorfizmu)  $f: M \rightarrow M$  **punkt niebłądzący** to taki punkt  $x \in M$ , że  $\forall U \ni x$  otoczenie otwarte  $x$  istnieje  $n > 0$  takie, że

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

• Dla potoku  $\phi^t$  pola  $V$  **punkt niebłądzący**, to taki punkt  $x$ , że

$$\forall \epsilon > 0 \forall U \ni x \text{ otoczenia otwartego } \exists t > \epsilon \phi^t(U) \cap U \neq \emptyset$$

Zbiór punktów niebłądzących oznaczamy symbolem  $\Omega(f)$  lub  $\Omega(V)$ .

*Uwaga 6.21.* Może się zdarzyć, że dla dyfeomorfizmu  $f$  zbiór  $\Omega(f)$  jest skończony, a dla  $C^\infty$ -bliskiego  $g$   $\Omega(g)$  jest bardzo duży.

*Uwaga 6.22.*  $\Omega(f) \neq \emptyset$  bo  $\forall x \omega(x) \subset \Omega$ .

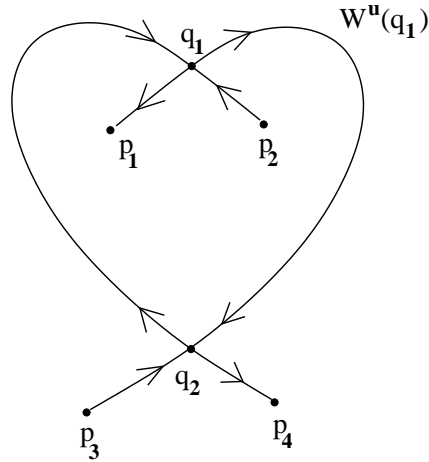
Inna definicja  $\Omega(f)$ :

$x \in \Omega(f)$  jeśli

$$\forall \epsilon \exists y \in M \exists n > 0 \rho(x, y) < \epsilon, \rho(x, f^n(y)) < \epsilon.$$

*Przykład 6.23.* ( $\Omega$ -eksplozja)

Wnętrze serca jest takie samo jak zewnątrz.

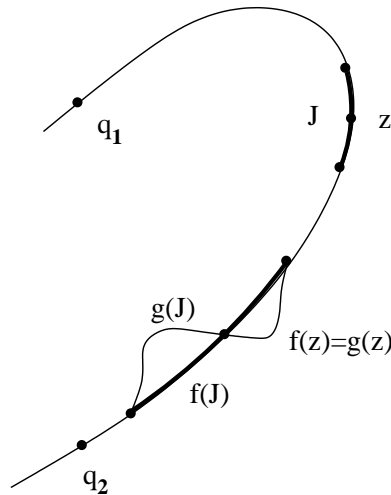


Rysunek 6.21:  $\phi^t$  - Potok na sferze  $S^2$

$$\forall t \Omega(\phi^t) = \{p_i \mid i = 1, \dots, 4\} \cup \{q_1, q_2\}$$

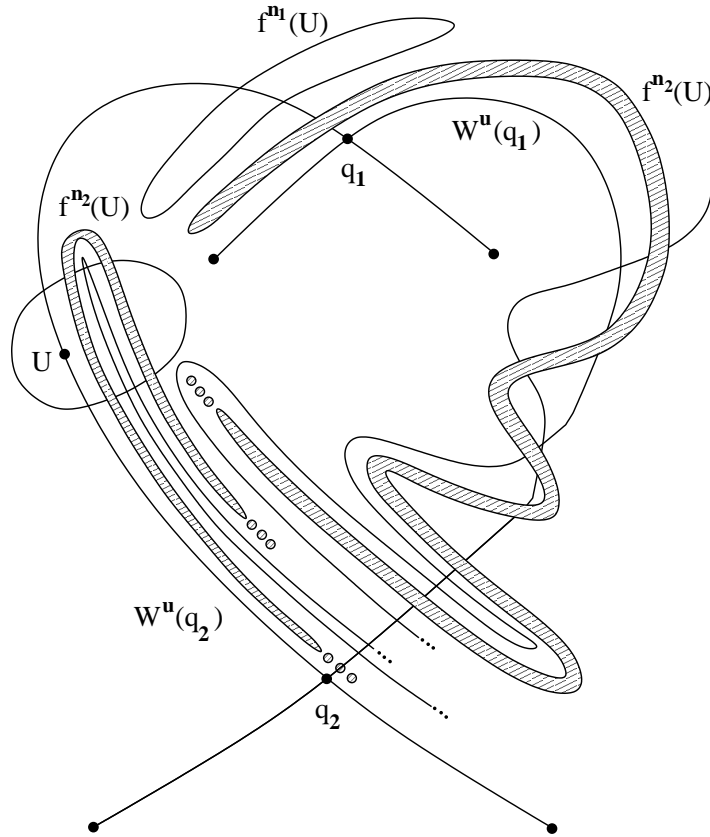
$p_1, p_4$  to ścieki,  $p_2, p_3$  źródła,  $q_1, q_2$  siodła.

Ustalmy  $t = 1$ ,  $f = \phi^1$  i na otoczeniu jakiegoś punktu  $z \in W^u(q_1)$ , separatrysie łączącej  $q_1$  i  $q_2$  zastąpmy  $f$  przekształceniem  $g$  jak na rysunku. Mamy  $g(J) \subset W^u(q_1, g)$  (rozmaitość



Rysunek 6.22:

niestabilna punktu  $q_1$  dla  $g$ ,  $f(J) \subset W^s(q_2, g)$ . Punkt  $z$  i wszystkie punkty  $g^n(z)$  to punkty transwersalnego przecięcia  $W^u(q_1, g)$  i  $W^s(q_2, g)$ . Separatrysa niestabilna z punktu  $q_2$  do  $q_1$  jest zawarta teraz w  $\Omega(g)$ . Korzystamy z  $\lambda$ -lematu Palisa, z którego wynika “rozpłaszczenie”



Rysunek 6.23:

$f^n(U)$  wzdłuż  $W^u(q_1)$ , które (wraz z  $f^n(U)$ ) “rozpłaszcza” się wzdłuż  $W^u(q_2)$ .



# Wykład 7

Uogólnieniem niektórych potoków gradientowych (jak ten na pochylonym torusie, wykład (6)) są potoki Morse'a-Smale'a. Podobnie jako uogólnienie dyfeomorfizmów  $\phi^t$  dla potoków gradientowych, definiuje się dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a.

**Definicja 7.1.**  $f: M \rightarrow M$  dyfeomorfizm rozmaitości zwartej nazywa się **Morse'a-Smale'a** jeśli

1.  $\Omega(f)$  =zbiór orbit okresowych jest zbiorem skończonym.
2. Każda orbita okresowa  $O(x) = (x, f(x), \dots, f^n(x) = x)$  jest hiperboliczna, to znaczy  $x$  jest punktem stałym hiperbolicznym dla  $f^n$ .
3. Dla każdych orbit  $O(x), O(y)$

$$W^s(O(x)) \bar{\cap} W^u(O(y)),$$

to znaczy każdy punkt przecięcia jest punktem **transwersalnego przecięcia**, to znaczy jeśli  $z \in W^s(O(x)) \cap W^u(O(y))$ , to

$$T_z W^s(O(x)) \oplus T_z W^u(O(y)) = T_z M.$$

**Definicja 7.2.**  $\phi^t$  potok dla pola  $V$  nazywa się **Morse'a-Smale'a** jeśli

1.  $\Omega(\phi^t)$
2. jw.
3. jw.

Przypominam, że orbita okresowa, która nie jest punktem stałym potoku nazywa się hiperboliczna, jeśli przekształcenie pierwszego powrotu do cięcia transwersalnego przez tę orbitę jest hiperboliczne.

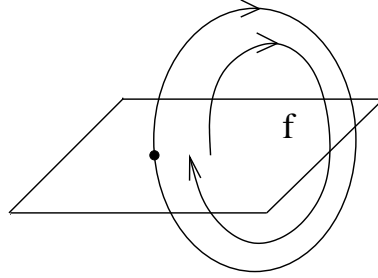
**Twierdzenie 7.3.** (*J. Palis, S. Smale*)

*Zbiór dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a jest otwarty w topologii  $C^1$  na dowolnej rozmaitości zwartej  $M$ . Podobnie dla pól wektorowych.*

**Twierdzenie 7.4.** (*J. Palis, S. Smale*)

*Dyfeomorfizmy i potoki Morse'a-Smale'a są  $C^1$ -strukturalnie stabilne.*

Przypominam:



Rysunek 7.1:

**Definicja 7.5.** 1.  $f$  jest  $C^r$ -strukturalnie stabilny jeśli

$$\exists \delta \forall g \in C^r \rho_{C^r}(f, g) < \delta$$

i  $f, g$  są **topologicznie sprzężone**, to znaczy

$$\exists h: M \rightarrow M \text{ homeomorfizm, taki, że } h \circ f = g \circ h$$

2. Potok  $\phi^t$  pola  $V$  jest  $C^r$ -strukturalnie stabilny jeśli

$$\exists \delta \forall W \in C^r \rho_{C^r}(V, W) < \delta$$

i potoki  $\phi^t$  i  $\psi^t$  mają równoważne obrazy fazowe, to znaczy

$$\exists h: M \rightarrow M \text{ homeomorfizm}$$

przeprowadzający trajektorie  $\phi^t$  w trajektorie  $\psi^t$  (niekoniecznie zachowując czas).

*Uwaga 7.6.* Żądanie dla potoków, żeby czas był zachwany przez  $h$  byłoby zbyt silne. W przypadku istnienia trajektorii okresowej, różnej od punktu stałego, żaden potok nie byłby stabilny strukturalnie bo nieco zmieniając czas (na przykład mnożąc pole przez funkcję  $\approx 1$ , ale  $\neq 1$  możemy zmienić okres trajektorii okresowej).

*Uwaga 7.7.* W definicjach strukturalnej stabilności można zażądać

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall g \dots$$

oraz

$$\rho_{C^0}(h, id) < \epsilon.$$

Mówimy wtedy o  $\epsilon$ -**strukturalnej stabilności**. We wszystkich dowodach strukturalnej stabilności konstruuje się  $h$  bliskie identyczności. Nie są znane przykłady dyfeomorfizmów lub potoków strukturalnie stabilnych, a nie  $\epsilon$ -strukturalnie stabilnych. Na następnym wykładzie będzie podana charakteryzacja układów strukturalnie stabilnych: Aksjomat A + silny warunek transwersalności. Być może wynika z niej równoważność strukturalnej stabilności i  $\epsilon$ -strukturalnej stabilności.

Udowodnimy Tw. 1 dla dyfeomorfizmów. Dowód dla potoków jest podobny. Dowód Tw. 2 jest trudniejszy i opuszczę go.

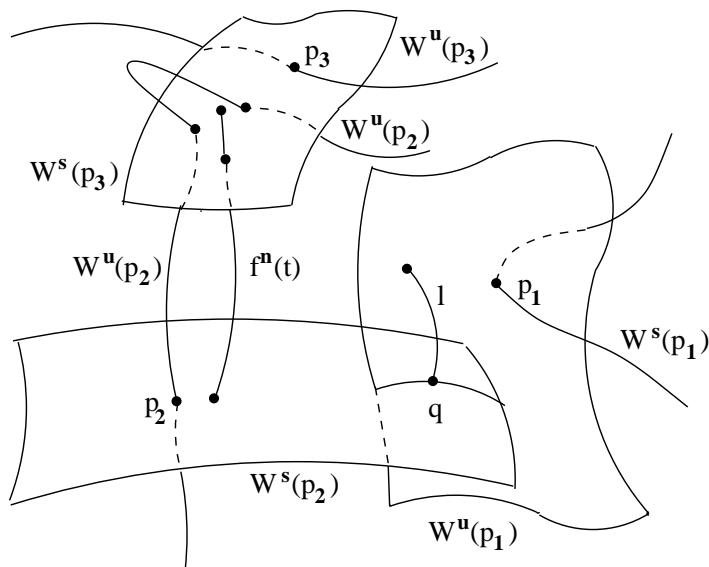
*Dowód.* (Tw. 1) Dla dyfeomorfizmu  $f$  Morse'a-Smale'a.

## 1. Krok

Zdefiniujemy w zbiorze orbit okresowych relację **częściowego porządku**.

$$O(x) \leq O(y) \text{ jeśli } W^s(O(x)) \cap W^u(O(y)) \neq \emptyset$$

- (a) **Zwrotność** wynika z  $W^s(O(x)) \cap W^s(O(x)) \supset O(x)$ .
- (b) **Antysymetryczność**. Jeśli  $W^s(O(x)) \cap W^u(O(y)) \ni z_1$  oraz  $W^s(O(x)) \cap W^u(O(y)) \neq \emptyset$  i  $O(x) \neq O(y)$  to punkty  $f^n(z_1)$  są niebłądzące z transwersalności przecięcia. Dowód jak na wykładzie (6). Zatem  $\Omega(f)$  jest zbiorem nieskończonym, sprzeczność z założeniem, że  $f$  jest Morse'a-Smale'a. Zatem  $O(x) \leq O(y)$  i  $O(x) \geq O(y)$  implikuje  $O(x) = O(y)$ .
- (c) **Przechodność** wynika podobnie jak antysymetryczność z  $\lambda$ -lematu Palisa.  $l \subset$



Rysunek 7.2:

$W^u(p_1)$  przecina transwersalnie  $W^s(p_2)$  w punkcie  $q$ , z  $\lambda$ -lematu  $f^n(\tilde{l})$  dla pewnego  $\tilde{l} \subset l$  jest prawie równoległe do dużej części  $W^u(p_2)$ , więc przecina, nawet transwersalnie  $W^s(p_3)$ .

Tę relację częściowego porządku można powiększyć do relacji **porządku liniowego**. Możemy więc ponumerować wszystkie orbity okresowe.

$$O_1 < O_2 < \dots < O_n$$

## 2. Krok

Udowodnimy istnienie **filtracji**, to znaczy ciągu rozmaitości z brzegiem (zwartych),  $m = \dim M$  wymiarowych

$$\emptyset \subset M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M,$$

gdzie  $n$  to liczba orbit okresowych, takich, że

$$M_{i-1} \subset \text{int} M_i \text{ dla } 1 \leq i \leq n$$

$$f(M_i) \subset M_i \text{ dla } 1 \leq i \leq n$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus M_{i-1}) = O_i \text{ dla } 1 \leq i \leq n$$

*Przykład 7.8.* Dla  $\phi^t$ , przekształceń potoku gradientowego, pola grad  $h$  jeśli wszystkie wartości  $h(x_i)$  dla punktów krytycznych  $x_i$  są parami różne, to można wziąć

$$M_i = \{z \in M \mid h(z) \leq a_i\},$$

gdzie  $a_i$  to dowolne liczby spełniające

$$h(x_1) < a_1 < h(x_2) < a_2 < \dots < h(x_n) = a_n$$

**Lemat 7.9.**

$$W^u(O_i) \setminus O_i \subset \bigcup_{j < i} W^s(O_j) \quad (7.1)$$

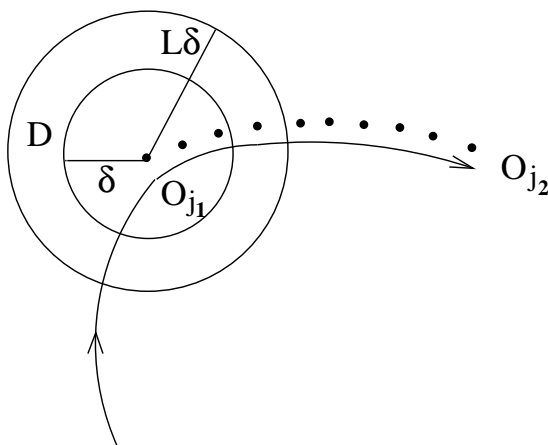
*Dowód.* Dla  $z \in W^u(O_i) \setminus O_i$  mamy  $\omega(z) \subset \Omega(f) \subset \bigcup_{i=1}^n O_j$ . Gdyby istniały ciągi

$$k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \dots \rightarrow \infty$$

takie, że  $f^{k_s}(z) \rightarrow O_{j_1}$ ,  $f^{l_s}(z) \rightarrow O_{j_2}$ ,  $s \rightarrow \infty$ ,  $j_1 \neq j_2$  to istniałby ciąg  $r_j$ ,  $k_j < r_j < l_j$  taki, że

$$f^{r_j}(z) \in B(O_{j_1}, L\delta) \setminus B(O_{j_1}, \delta) = D$$

dla pewnej małej liczby  $\delta$  i  $L$  stałej Lipschitza dla  $f$ . Wtedy istniałby punkt  $w \in$



Rysunek 7.3:

$\omega(z) \cap D$  zatem  $\forall n f^n(w) \in \Omega(f)$ , więc  $\Omega(f)$  jest nieskończony, sprzeczność. Zatem  $\exists j f^n(z) \rightarrow O_j$ . Zatem  $z \in W^s(O_j)$ , a ponieważ  $z \in W^u(O_i)$  mamy  $j < i$ , co dowodzi (7.1).  $\square$

Będziemy teraz konstruować filtrację  $\{M_j\}$  przez indukcję.

Można zacząć od  $M_0 = \emptyset$  i dalej konstruować  $M_i$  przez indukcję. Wykonam jednak oddzielnie, dla ułatwienia zrozumienia, pierwszy krok i skonstruuje  $M_1$ .

Za  $M_1$  można wziąć otoczenie  $O_1$  takie, że  $f(M_1) \subset \text{int}M_1$ .  $M_1$  istnieje, bo  $O_1$  jest

orbitą przyciągającą, ścięciem. Jeśli wybrać dowolnie  $x_1 \in O_1$  i oznaczyć okres przez  $n_1$  to można za  $M_1$  wziąć

$$\bigcup_{k=0}^{n_1-1} f^k(B(0, \lambda^k \delta)) \text{ dla } \lambda > 1, \lambda \approx 1,$$

małej liczby  $\delta > 0$  i  $h$  sprzężenia  $Df^{n_1}(x_1)$  i  $f^{n_1}$  w otoczeniu  $x_1$  z tw. Grobmana-Hartmana.

Gdyby  $O_1$  nie było orbitą przyciągającą, to

$$W^u(O_1) \setminus O_1 \neq \emptyset$$

więc z lematu (7.9)

$$\exists j < 1 \ W^s(O_j) \cap W^u(O_1) \neq \emptyset$$

sprzeczność, bo  $O_1$  jest najmniejsze. Mamy oczywiście

$$\bigcap f^n(M_1) = O_1 \text{ i } f(M_1) \subset \text{int}M_1$$

(do tego była potrzebna  $\lambda > 1$ ).

Dalej dla uproszczenia oznaczeń będziemy przyjmować  $O_j = \{x_j\}$ . Załóżmy, że  $M_k$ ,  $k < i$  spełniające tezę twierdzenia są już skonstruowane. Zbudujemy  $M_i$ . Na  $W^u(x_i)$  bierzemy **dziedzinę fundamentalną**

$$D_i^u = h(Df(\overline{B(0, \delta)})) \setminus h(B(0, \delta)).$$

(Każda trajektoria zawarta w  $W^u(O_i) \setminus O_i$  przecina  $D_i^u$  dokładnie jeden raz.  $h$  to sprzężenie  $Df$  i  $f$  w otoczeniu  $x_i$  z tw. Grobmana-Hartmana. Ponieważ z lematu (7.9)

$$D_i^u \subset \bigcup_{j < i} W^s(O_j) = \bigcup_{j < i} \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_{loc}^s(O_j) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\text{int}M_{i-1}),$$

bo  $\text{int}M_{i-1} \supset W_{loc}^s(O_i)$ , bo zawiera  $O_i$ . Mamy z tego, że  $f^{-1}(\text{int}M_{i-1}) \supset \text{int}M_{i-1}$  i  $D_i^u$  zwarty, oraz

$$\exists k_i \ \overline{D_i^u} \subset f^{-k_i}(\text{int}M_{i-1}).$$

Definiujemy teraz

$$M_i = f^{-k_i}(M_{i-1}) \cup R_i,$$

gdzie  $R_i$  to “rączka”

$$h(B^u(O, \delta) \times B^s(0, y)), \text{ gdzie}$$

$$B^u(0, \delta) \subset E^u(x_i)$$

$$B^s(0, y) \subset E^s(x_i)$$

i  $y$  jest bardzo małe. Dla  $y$  odpowiednio małego mamy

$$f(R_i) \subset \text{int}R_i \cup \text{int}f^{-k_i}(M_{i-1}).$$

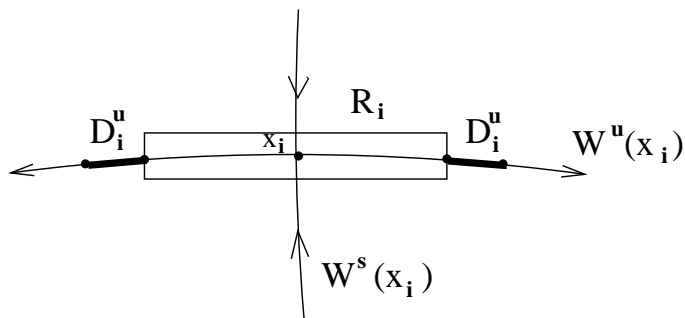
Mamy też

$$f(f^{-k_i}(M_{i-1})) \subset f^{-k_i}(M_{i-1})$$

zatem  $f(M_i) \subset \text{int}M_i$ . Wreszcie

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus M_{i-1}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M \setminus M_{i-1}) =$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R_i) = W_{loc}^s(x_i) \cap W_{loc}^u(x_i) = x_i$$



Rysunek 7.4:

### 3. Krok. Stabilność filtracji.

Jeśli  $g$  jest  $C^0$  blisko  $f$  to  $f(M_i) \subset \text{int}M_i$  implikuje  $g(M_i) \subset \text{int}M_i$ . Mamy też

$$g^{-k_i+1}(M_{i-1}) \supset f^{-k_i}(M_{i-1}),$$

więc

$$M_i \setminus g^{-k_i+1}(M_{i-1}) \subset R_i.$$

Okazuje się, że jeśli  $g$  jest  $C^1$  blisko  $f$  to  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(R_i)$  jest punktem stałym dla  $g$  (orbitą okresową  $O_i(g)$ ). To wynika z odpowiedniego wariantu tw. Hadamarda=perrona: Jeśli  $g$  jest  $C^1$  blisko  $f$  i  $x$  jest punktem stałym hiperbolicznym dla  $f$ , to

$$\{z \mid \rho(g^n(z), x) < \epsilon, n \leq 0\} = W_\epsilon^u(g)$$

to rozmaitości bliskie w  $C^1$  do  $W_\epsilon^s(x, f)$  i  $W_\epsilon^u(x, f)$ .

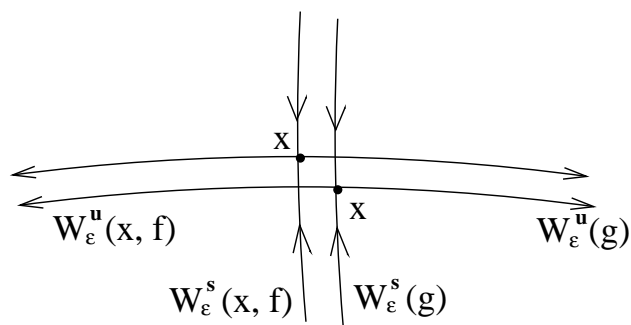
$$\{z \mid \rho(g^n(z), x) < \epsilon\} = W_\epsilon^s(g) \cap W_\epsilon^u(g)$$

to 1 punkt. Ponieważ

$$g(W_\epsilon^s(g)) \subset W_\epsilon^s(g)$$

$$\text{i } g^{-1}(W_\epsilon^u) \subset W_\epsilon^u(g)$$

to jest to punkt  $x_g$  stały dla  $g$  (ogólniej orbita okresowa  $O_i(g)$ ). Stąd wynika stabilność



Rysunek 7.5:

filtracji, to znaczy filtracja dla  $f$  jest też filtracją dla każdego  $g$   $C^1$  bliskiego.

### 4. Krok. Otwartość M-S.

(a) Istnienie filtracji  $\{M_j\}$  dla  $g$  natychmiast implikuje

$$\Omega(g) = \bigcup_{j=1}^n O_j.$$

Faktycznie, jeśli  $z \in M_i \setminus g(M_i)$  dla pewnego  $i$ , to otoczenie otwarte

$$U_z = \text{int}(g^{-1}(M_i)) \setminus g(M_i) \ni z$$

spełnia

$$g^n(U_z) \cap U_z = \emptyset \quad \forall n \geq 2.$$

Stąd wynika, że  $z$  nie jest punktem stałym, więc dla odpowiednio mniejszego  $U'_z$  mamy też  $g^n(U'_z) \cap U'_z = \emptyset$ , więc  $z \notin \Omega(g)$ . Załóżmy teraz, że  $z \in \Omega(g)$ . Niech  $i$  będzie takim indeksem, że  $z \in M_i \setminus M_{i-1}$ . Wtedy

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad z \notin g^k(M_i) \setminus g^{k+1}(M_i)$$

$$\text{ i } z \notin g^k(M_{i-1}) \setminus g^{k+1}(M_{i-1}),$$

$$\text{więc } z \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(M_i \setminus M_{i-1}) = O_i$$

(b) Orbita  $O_i(g)$  okresowa (patrz krok 3) jest hiperboliczna, bo

$$W_{loc}^{s(u)}(O_i(g)) \approx^{C_1} W^{s(u)}(O_i(f)),$$

więc  $\forall x \in O_i(f)$  i bliskiego  $x_g \in O_i(g)$  mamy  $Df(x) \approx Dg(x)$ .

(c) Należy jeszcze sprawdzić, że  $\forall i, j$

$$W^s(O_i(g)) \overline{\cap} W^u(O_j(g)).$$

Pozostawiam to na ćwiczenia.

□

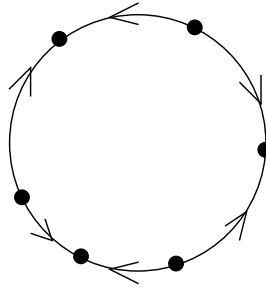




# Wykład 8

**Twierdzenie 8.1.** Pola wektorowe (potoki) Morse'a-Smale'a rozmaitości zwartych wymiaru 1 (to znaczy okręgu) są gęste w  $C^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, \infty$ .

*Dowód.* Wystarczy zaburzyć  $F: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  tak, aby zera nie były osobliwe to znaczy  $F(x) = 0$  implikuje  $F'(x) \neq 0$  □



Rysunek 8.1:

**Twierdzenie 8.2.** Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a okręgu są gęste w  $C^r$  w przestrzeni wszystkich dyfeomorfizmów okręgu.

*Dowód.* 1. Składając dyfeomorfizm  $f$  z dowolnie małym obrotem  $S_\alpha$  można uzyskać dla  $S_\alpha \circ f$  liczbę obrotu wymierną (zakładamy, że  $f$  zachowuje orientację). Faktycznie trajektoria  $f^n(x)$  jest gęsta w  $S^1$ , jeśli  $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$  i  $f \in C^2$  (ćwiczenia). Jeśli  $f^n(x)$  jest blisko  $x$ , powiedzmy na prawo od  $x$  (rysunek) to dla obrotu  $S_\alpha$  o kąt  $\alpha$  między  $f^n(x)$  a  $x$  mamy  $(S_\alpha \circ f)^n(x)$  na lewo od  $x$ , bo  $S_\alpha \circ f^n(x) = x$  (dzięki monotoniczności  $f$ ). Istnieje więc  $0 < \beta \leq \alpha$  takie, że  $(S_\beta \circ f)^n(x) = x$ .

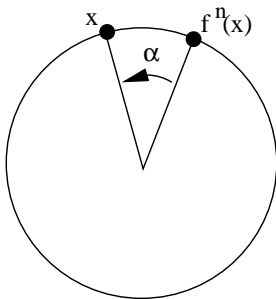
(Precyzyjnie ten dowód można zapisać używając podniesienia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

2. W przypadku, kiedy  $\rho(f) = 0$  wystarczy  $f$  zastąpić  $C^r$  bliską funkcją tak, żeby jej wykres przecinał przkątą i w każdym punkcie przecięcia, żeby przecięcie było transwersalne. To jest łatwe ćwiczenie. Dla  $\rho(f) \neq 0$   $\rho(f) = \frac{p}{q} f^q$  można zaburzyć tak samo, ale chcemy zaburzyć  $f$ . To jest trochę trudniejsze ćwiczenie.
3.  $f$  zmienia orientację. Wtedy  $f^2$  zachowuje orientację,  $\rho(f^2) = 0$ , zaburzenie robujemy jak wyżej.

Szczegóły: [ Nitecki, R.1.2 ]. □

**Twierdzenie 8.3.** (Peixoto)

Pola wektorowe (potoki) Morse'a-Smale'a na 2-wymiarowych orientowalnych zwartych rozmaitościach (to znaczy powierzchniach) są gęste w  $C^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, \infty$ .



Rysunek 8.2:

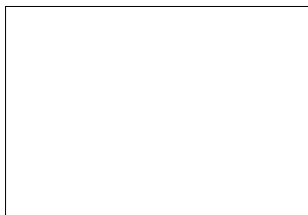
Dowód jest dość skomplikowany. Można go znaleźć na przykład w [Palis, de Melo]. Dla  $r = 1$  dowód można oprzeć na lemacie o zamykaniu, patrz niżej. Zostanie on podany w dalszej części wykładu. Nie trzeba dla  $r = 1$  zakładać orientowalności  $M$ .

Elementem dowodu Tw. (8.2, punkt 1) i Tw. (8.3) jest tak zwany lemat o zamykaniu (*Closing lemma*)

**Twierdzenie 8.4.** (*Pugh, lemat o zamykaniu*)

Jeśli dyfeomorfizm  $f$  (pole  $V$ ) jest klasy  $C^1$  i  $x$  jest punktem niebłądzącym, to dowolnie  $C^1$  blisko  $f$  istnieje  $g$  (pole  $W$ ) takie, że  $x$  jest punktem okresowym dla  $g$  (należy do trajektorii okresowej lub jest zerem pola  $W$ )

*Uwaga 8.5.* Dla  $C^0$  dowód jest bardzo łatwy. W przypadku dyfeomorfizmu składamy  $f$  z  $h$  gdzie,  $h(f^n(y)) = y$  i  $h = id$  poza  $U$  (rysunek).  $U$ -otoczenie  $y$  i  $f^n(y)$ , gdzie  $y, f^n(y)$  są blisko



Rysunek 8.3:

$x, f^j(y) \notin U$  dla  $j = 1, \dots, n - 1$ . Następnie zmieniamy współrzędne tak, żeby  $y$  przeszedł na  $x$ .

Dla  $C^1$  dowód jest trudny, należy do Charlesa Pugh. Nadal zaburzenie  $f$  wystarczy robić blisko  $x$ .

Dla  $C^r, r > 1$ , problem jest otwarty. Zaburzenie  $f$  trzeba próbować konstruować wzdłuż całej orbity  $f^j(y), j = 0, \dots, n$ .

*Uwaga 8.6.* Dla dyfeomorfizmów rozmaitości wymiaru  $\geq 2$  i potoków w wymiarze  $\geq 3$  układy Morse'a-Smale'a nie są gęste w  $C^1$ .

*Przykład 8.7.* Przekształcenie torusa

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

dane macierzą

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zbiór punktów niebłądzących  $\Omega(f)$  jest całym torusem. Okazuje się, że dla  $g \sim_{C^1} f$  też  $\Omega(g) = \mathbb{T}^2$ . Zatem istnieje otwarty w  $C^1$  zbiór dyfeomorfizmów, które nie są Morse'a-Smale'a

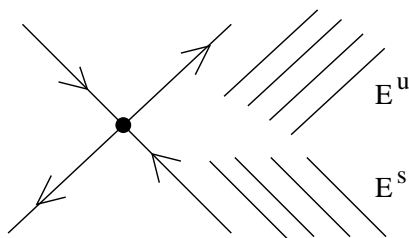
Okazuje się, że  $f$  jest strukturalnie stabilne, to znaczy dla  $g \sim_{C^1}$  blisko  $f$  istnieje homeomorfizm  $h$  taki, że  $h \circ f = g \circ h$ .  $f$  jest przykładem **dyfeomorfizmu Anosowa**. Niech  $E^s$  oznacza podwiązkę wiązki stycznej do  $\mathbb{T}^2$  wektorów równoległych do wektora własnego macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

odpowiadającego wartości własnej  $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ,  $|\lambda_1| < 1$ . Niech  $E^u$  oznacza podwiązkę wektorów równoległych do wektora własnego wartości własnej  $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ,  $|\lambda_2| > 1$ . Mamy

$$Df(E^s) = E^s \text{ i } Df(E^u) = E^u,$$

$Df$  skraca wektory należące do  $E^s$ , a wydłuża wektory należące do  $E^u$ .



Rysunek 8.4:

*Uwaga 8.8.* Okazuje się, że pewne **własności “hiperboliczne”** są spełnione dla gęstych zbiorów układów dynamicznych.

*Definicja 8.9.* Mówimy, że własność  $\mathcal{G}$  jest **typowa** w topologii  $C^r$ , jeśli jest spełniona dla gęstego  $G_\delta$  zbioru  $C^r$ -dyfeomorfizmów (pól wektorowych).

(Zbiór gęsty  $G_\delta$  nazywa się czasem **zbiorem residualnym**).

*Uwaga 8.10.* Ponieważ zbiór dyfeomorfizmów (pól) z metryką dającą topologię  $C^r$  jest przestrzenią zupełną, z własności Baire’a wynika, że przecięcie ciągu zbiorów otwartych gęstych jest zbiorem residualnym.

Podam teraz ważne twierdzenie, którego dowód opuszczę.

**Twierdzenie 8.11.** (*Kupki-Smale’a, wersja dla pól wektorowych*)

*Następujące własności są typowe w topologii  $C^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, \infty$  (Własności K-S):*

1. *Wszystkie punkty stałe i orbity okresowe (okres  $> 0$ ) są hiperboliczne.*
2. *Rozmaitości stabilne i niestabilne orbit okresowych i punktów stałych przecinają się transwersalnie (w każdym punkcie przecięcia).*
3. *W topologii  $C^1$  typowa jest własność  $\Omega = \overline{Per}$  (zbiór punktów niebłądzących jest domknięciem zbioru punktów okresowych).*

*Uwaga 8.12.*  $C^1$  typowość własności  $\Omega = \overline{Per}$  wynika z lematu o zamykaniu. Nietrudny dowód można znaleźć w książce [Szlenk, str. 139-140 (Wniosek 3.8.1)]. W tej książce można znaleźć dowód całego Tw. Kupki-Smale’a.

**Definicja 8.13.** Niech  $\Lambda$  będzie zwartym podzbiorem zwartej rozmaitości  $M$  i niech  $f$  będzie  $C^1$  dyfeomorfizmem określonym na otoczeniu  $U$  zbioru  $\Lambda$ ,  $f: U \rightarrow M$ , takim, że  $f(\Lambda) = \Lambda$ . Mówimy, że  $\Lambda$  jest zbiorem hiperbolicznym, jeśli istnieje rozkład wiązki stycznej do  $M$ , nad  $\Lambda$ , na dwie niezmiennicze podwiązki  $E^s$  i  $E^u$ , takie, że  $Df|_{E^s}$  skraca wektory,  $Df|_{E^u}$  rozciąga wektory,

$$Df|_{E^s} = E^s, \quad Df|_{E^u} = E^u, \quad T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

oraz istnieją stałe  $c > 0$ ,  $\lambda < 1$  takie, że  $\forall n \geq 0$

$$\begin{cases} \|Df^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| & \forall v \in E^s \\ \|Df^{-n}(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| & \forall v \in E^u \end{cases}$$

dla normy  $\|\cdot\|$  związanej z jakąś metryką Riemannowską na  $TM$ . Będziemy dalej przyjmowali  $c = 1$ . Można to uzyskać przez odpowiednią zmianę metryki.

$E^s$  nazywa się podwiązką stabilną.

$E^u$  nazywa się podwiązką niestabilną.

*Uwaga 8.14.*

$$E^s = \bigcup_{x \in \Lambda} E^s(x),$$

podwiązka jest sumą podprzestrzeni stycznych  $T_x M$  ( $E^s(x) \subset T_x M$ ), wszystkich tego samego wymiaru, który oznaczymy przez  $s$ . Podobnie

$$E^u = \bigcup_{x \in \Lambda} E^u(x),$$

$$\dim E^u(x) = u.$$

Nie trzeba zakładać ciągłości  $E^{s(u)}(x)$  w zależności od  $x$  (w mapie, gdzie wszystkie  $E^{s(u)}(x)$  są podprzestrzeniami tej samej przestrzeni  $\mathbb{R}^m$ ). Ciągłość wynika bowiem automatycznie z definicji (ćwiczenie). Można też łatwo wykazać, że kąt między  $E^s$  i  $E^u$  jest oddzielony od 0.

**Definicja 8.15.** Dla pola wektorowego (potoku) zbiór  $\Lambda$  nazywamy hiperbolicznym jeśli pole nie ma na nim zer.

Nazwijmy trajektorię rekurencyjną w przód lub w tył (to znaczy taką, że jej punkty są rekurencyjne) **trywialną** jeśli jest punktem stałym lub orbitą okresową.

Będziemy korzystać z

1. Lematu Pugh
2. Tw. Kupki-Smale'a
3. Wniosku z Tw. Klasyfikacyjnego (Wykład 6) mówiącego co następuje

**Wniosek 8.16.** *Jeśli nie ma nietrywialnych trajektorii rekurencyjnych i punkty stałe i trajektorie okresowe są hiperboliczne, to nie ma punktów niebłądzących, oprócz punktów stałych, trajektorii okresowych lub cykli separatryst.*

*Dowód.* Z założeń wynika, że możemy mieć tylko składowe  $U$  typu I. Jeśli  $x \in U$ , to dla  $\epsilon > 0$  dostatecznie małego  $\overline{B(x, \epsilon)} \subset U$  (domknięty dysk) i  $\phi^t(\overline{B(x, \epsilon)}) \rightarrow \partial U$  dla  $t \rightarrow \infty$ , zatem  $\phi^t(B(x, \epsilon)) \cap B(x, \epsilon) = \emptyset$  dla  $t$  dostatecznie dużych. Stąd  $x \notin \Omega$ .  $\square$

*Dowód.* (Tw. Peixoto,  $r = 1$ )

Wystarczy udowodnić, że dla każdego pola wektorowego  $V$  na  $M$  klasy  $C^1$  istnieje pole  $C^1$  bliskie, spełniające warunki 1, 2 z Tw. Kupki-Smale'a, dla którego wszystkie trajektorie rekurencyjne są trywialne. Z C wynika bowiem, że  $\Omega$  składa się tylko z trajektorii okresowych (z Wniosku (2) Kupki-Smale'a, nie ma cykli separatrys).

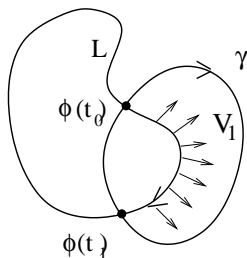
*Ćwiczenie 8.17.* Pokazać, że dla potoku Kupki-Smale'a na  $M^2$ , punktów stałych i trajektorii okresowych jest skończenie wiele.

Hiperboliczność punktów stałych i trajektorii okresowych i transversalność, występujące w def. Morse'a-Smale'a, zapisane są już we własnościach 1, 2 Kupki-Smale'a.

Przypuśćmy, że  $x$  jest nietrywialnym punktem rekurencyjnym. Wtedy z lematu (1) z wykładu (3) wynika, że istnieje krzywa Jordana  $L \subset M$ , transversalna do  $V$ , zawierająca nietrywialny punkt rekurencyjny  $y$  ( $y \in \phi^t(x)$ ). Z A istnieje  $V_1 \in C^1$  blisko  $V$  takie, że  $y$  jest okresowy. Oznaczmy jego trajektorię okresową dla  $V_1$  przez  $\gamma$ . Można założyć, że  $L$  jest transversalna do  $V_1$  i jeszcze, że  $V_1$  jest Kupki-Smale'a.  $\gamma$  nie może ograniczać topologicznego dysku  $D$  (to znaczy  $M \setminus \gamma$  nie może mieć składowej będącej topologicznym dyskiem). Co więcej  $M \setminus \gamma$  nie może mieć dwóch składowych, z których jedna,  $D$ , jest orientowalna. Załóżmy bowiem, że  $\gamma$  ogranicza takie  $D$ .

Sparametryzujmy  $L$ ,  $\phi: [0, 1] \rightarrow L$ ,  $\phi(0) = \phi(1)$  tak, żeby  $(\frac{dL}{dt}(t), V_1(t))$  było zgodne z orientacją  $D$  dla  $t_0 \leq t \leq t_1$ , gdzie  $t_0$  to parametr wejścia  $L$  w  $D$ , a  $t_1$  to pierwszy po  $t_0$  czas wyjścia.

Mamy w  $\phi^t(t_0)$ , że orientacja  $(n_W(t_0), V_1(t_0))$  zgadza się z orientacją  $(\frac{dL}{dt}(t_0), V_1(t_0))$ , zatem



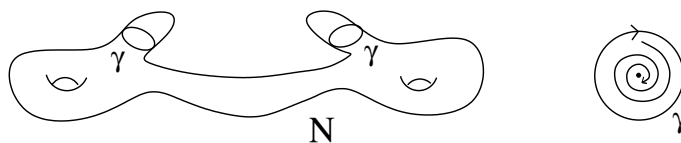
Rysunek 8.5:

z orientacją  $D$ , gdzie  $n_W$  to wektor normalny do  $\gamma$  w kierunku do wewnątrz  $D$ .

Powinniśmy więc mieć zgodne z orientacją  $D$ , więc zgodne, orientacje  $(n_W(t_1), V_1(t_1))$  oraz  $(\frac{dL}{dt}(t_1), V_1(t_1))$ , sprzeczność, bo  $\frac{dL}{dt}(t_1)$  jest skierowane na zewnątrz  $D$ .

Ponieważ  $\gamma$  nie ogranicza dysku,  $M \setminus \gamma$  ma albo jedną  $N$ , albo dwie składowe, ale suma ich genusów jest mniejsza niż genus  $M$ . (Są to rozmaitości z brzegiem, ale można "dziury" zakleić dyskami, w których  $V_1$  rozszerzamy tak, żeby były ścieki).

Jeśli w  $N$  jest nietrywialna trajektoria rekurencyjna to robimy kolejne zaburzenie  $V_1$  do



Rysunek 8.6:

$V_2$ , otrzymujemy trajektorię okresową  $\gamma_1$  i po analogicznej jak wyżej operacji znowu zmniejsza się genus. Po skończonej liczbie kroków już nie ma trajektorii rekurencyjnych bo genus powierzchni nie może spaść poniżej 0.  $\square$

$\Lambda$  jest niezmienniczy, to znaczy  $\phi^t \Lambda = \Lambda$  i  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^0 \oplus E^u$ , gdzie

$$\forall t \quad D\phi^t(E^s) = E^s, \quad D\phi^t(E^u) = E^u$$

$E^0$  jest wiązką jednowymiarową wektorów stycznych do trajektorii.

Spełniona jest własność skracania i rozciągania w def. (2), gdzie  $n \geq 0$  jest zastąpione przez  $t \geq 0$  i  $Df^n$  przez  $D\phi^t$ .

**Definicja 8.18.** Jeśli  $\Lambda = M$ , to mówimy, że dyfeomorfizm (potok) jest **dyfeomorfizmem Anosowa (potokiem Anosowa)**

Dla dokładniejszego zbadania zbiorów hiperbolicznych i układów Anosowa przyda się następujący

**Lemat 8.19.** (o jednostajnym zaburzeniu)

Niech  $f_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  będzie ciągiem dyfeomorfizmów klasy  $C^r$ ,  $r \geq 1$  i

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 1 < \mu_1 < \mu_2$$

oraz  $L_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  to przekształcenie liniowe takie, że dla  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^u$

$$L_n(\mathbb{R}^s) = \mathbb{R}^s, \quad L_n(\mathbb{R}^u) = \mathbb{R}^u$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \mathbb{R}^s, \|v\| = 1 \quad \lambda_1 \leq \|L_n(v)\| \leq \lambda_2$$

$$\text{ i } \forall v \in \mathbb{R}^u, \|v\| = 1 \quad \mu_1 \leq \|L_n(v)\| \leq \mu_2$$

Wtedy

$$\forall \epsilon \exists \delta \text{ jeśli } \forall n \text{ Lip}(f_n - L_n) \leq \delta \text{ i } \|f_n(0)\| \leq \delta$$

to istnieje ciąg  $C^r$ -rozmaitości  $W_n^u \in \mathbb{R}^m$ ,  $s$ -wymiarowych, będących wykresami funkcji z  $\mathbb{R}^u$  do  $\mathbb{R}^s$  ze stałą Lipschitza  $\leq \epsilon$ , zachodzi niezmienniczość, to znaczy

$$f_n(W_n^u) = W_{n+1}^u \text{ i } \text{dist}(W_n^u, 0) \leq \epsilon.$$

Istnieją także rozmaitości  $W_n^s$  spełniające analogiczne własności,  $W_n^s$  są wykresami funkcji z  $\mathbb{R}^s$  do  $\mathbb{R}^u$ .

$f_n$  rozciąga na  $W_n^u$  i skraca odległości na  $W_n^s$ .

$W_n^{s(u)}$  są wyznaczone jednoznacznie.

*Dowód.* Rozpatrzmy przestrzeń  $\mathcal{W}^u(\epsilon)$  ciągów wykresów

$$\{ \phi_n: B^u \rightarrow \mathbb{R}^s, n = \dots, -1, 0, 1, \dots, \text{Lip}(\phi_n) \leq \epsilon, \|\phi_n(0)\| \leq \epsilon \}.$$

$B^u$  to kula jednostkowa. Jeśli  $\delta$  jest odpowiednio małe, to przekształcenie

$$\{ \phi_n \mid n = \dots, -1, 0, 1, \dots \} \rightarrow \{ f_n(\phi_n) \mid n = \dots, -1, 0, 1, \dots \}$$

przeprowadza  $\mathcal{W}^u(\epsilon)$  w  $\mathcal{W}^u(\epsilon)$  i jest kontrakcją w normie  $\sup_{n, B^u}$ . Okazuje się, że ciąg wykresów  $\{ W_n^u \}$  będący punktem stałym tej kontrakcji jest wykresem funkcji klasy  $C^r$ . Dowód jest taki sam jak tw. Hadamarda-Perrona (Wykład (1)). Analogicznie znajdujemy ciąg  $\{ W_n^s \}$ . Jednoznaczność wynika z kontrakcji.  $\square$

**Wniosek 8.20.** Jeśli  $\Lambda$  jest zbiorem hiperbolicznym dla  $C^r$ -diffeomorfizmu  $f$ , to istnieje  $\epsilon > 0$  takie, że

$$\forall x \in \Lambda \quad W_\epsilon^s(x) = \{y \in M \mid \forall n \geq 0 \quad \rho(f^n(y), f^n(x)) \leq \epsilon\}$$

jest rozmaitością klasy  $C^r$ ,  $C^r$ -bliską  $B(0, \epsilon) \subset E^s$ , styczną w  $x$  do  $E^s$  (utożsamiamy tu otoczenie  $0$  w przestrzeni stycznej z otoczeniem  $x$  w  $M$ , możemy ustalić mapę wokół  $x$ ). Ponadto przy dowolnie ustalonym  $\lambda' : \lambda < \lambda' < 1$  można wybrać  $\epsilon$  tak, żeby

$$\forall y, z \in W_\epsilon^s(x) \quad \rho(f(y), f(z)) \leq \lambda' \rho(y, z).$$

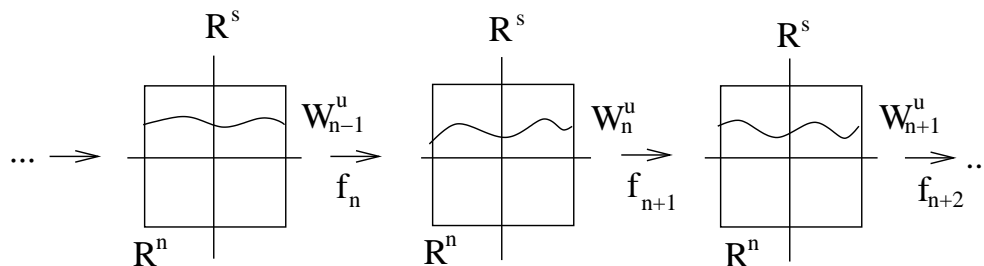
Mamy w szczególności

$$\forall x \in \Lambda \quad f(W_\epsilon^s(x)) \subset W_\epsilon^s(f(x)).$$

Analogiczne fakty zachodzą dla

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in M \mid \forall n \geq 0 \quad \rho(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \epsilon\}$$

*Uwaga 8.21.* To twierdzenie mówi o istnieniu zgodnej rodziny lokalnych stabilnych i niestabilnych rozmaitości i uogólnie tw. Hadamarda-Perrona o istnieniu takich rozmaitości dla stałego punktu hiperbolicznego. Punkt zastąpiony jest przez zbiór hiperboliczny.



Rysunek 8.7:

*Uwaga 8.22.* Jeśli  $f$  jest określone na całym  $M$ , to można zdefiniować globalne rozmaitości stabilne (niestabilne)

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W^s(f^n(x))),$$

które są immersyjnymi obrazami  $\mathbb{R}^s$  i

$$f(W^s(x)) \subset W^s(f(x)) \text{ i } W^s(x) = \{y \in M \mid \rho(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

Mieliśmy już na poprzednich wykładach przykład różny od  $\Lambda$ =(jeden punkt). Była to hiperboliczna orbita okresowa.

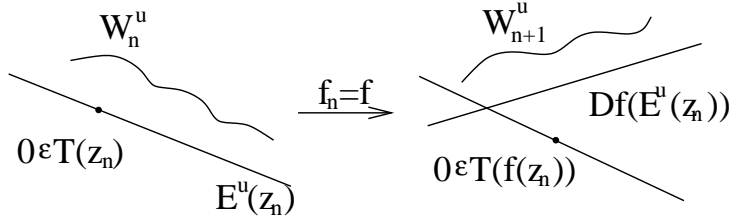
**Wniosek 8.23.** (*Shadowing lemma, lemat o przybliżaniu  $\epsilon$ -trajektorii, trajektorią*)

$\forall \eta > 0 \exists \epsilon > 0$  takie, że jeśli  $x_n \in U$  dostatecznie małego otoczenia zbioru hiperbolicznego  $\Lambda$  dla diffeomorfizmu  $f$  i ciąg  $x_n$  jest  $\epsilon$ -trajektorią, to znaczy  $\forall n \quad \rho(f(x_n), f(y_n)) \leq \epsilon$ , to istnieje taka  $f$ -trajektoria  $y_n$ ,  $f(y_n) = y_{n+1}$  (niekoniecznie w  $\Lambda$ ), że  $\rho(x_n, y_n) \leq \eta$

*Dowód.*  $\forall x_n$  wybierzmy bliski  $z_n \in \Lambda$  i współrzędne (mapę) taką, żeby  $E^s(z_n), E^u(z_n)$  przechodziły na  $\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^u$ . Wtedy w otoczeniach zer, w tych mapach  $f$  jest  $C^1$ -bliskie różniczkom  $Df(z_n)$ , które są bliskie jakimś przekształceniom  $L_n$ , o których mowa w lemacie (??). Stąd wynika (lemat (??)) istnienie  $f$ -niezmienniczego ciągu  $W_n^u$ . Analogicznie otrzymujemy niezmienniczy ciąg  $W_n^s$ . Definiujemy

$$y_n = W_n^s \cap W_n^u$$

□



Rysunek 8.8:

**Twierdzenie 8.24.** *Zbiór dyfeomorfizmów Anosowa jest otwarty w topologii  $C^1$ .*

*Dowód.* Niech  $f$  będzie dyfeomorfizmem Anosowa i  $g$  będzie  $C^1$ -blisko  $f$ . Wtedy dla dowolnej  $g$ -trajektorii  $x_n$  mamy

$$Dg(x_n) \sim Df(x_n) \text{ i } E^{s(u)}(f(x_n)) \sim E^{s(u)}(x_{n+1})$$

( $E^{s(u)}$  to podwiązka stabilna (niestabilna) dla  $f$ ). Zatem można znaleźć  $L_n$  takie, że  $Dg(x_n)$  jest bliskie  $L_n$  i  $L_n$  są jak w lemacie (??). Istnieje więc ciąg stabilnych (niestabilnych) rozmaitości  $E_n^{s(u)}$ ,  $Dg(x_n)(E_n^{s(u)}) = E_{n+1}^{s(u)}$ . Ponieważ  $Dg(x_n)$  są liniowe,  $E_n^{s(u)}$  są podprzestrzeniami liniowymi.

(Można było skorzystać z “Shadowing lemma”, przybliżyć  $x_n$ , które jest  $\epsilon$ -trajekcją, jeśli  $\rho_{C^0}(f, g) < \epsilon$ , przez  $f$ -trajekcję  $y_n$  i wziąć za  $L_n$  różniczki  $Dg(y_n)$ , we współrzędnych, w których  $E^s(y_n) \perp E_{y_n}^u$ .)  $\square$

Udowodnimy teraz  $\epsilon$ -strukturalną stabilność dyfeomorfizmów Anosowa. Najpierw wprowadzimy jednak nowe pojęcie

**Definicja 8.25.** Homeomorfizm  $f: M \rightarrow M$  nazywamy **ekspansywnym** jeśli

$$\forall r > 0 \forall x, y \in M, x \neq y \exists n \in \mathbb{Z} \rho(f^n(x), f^n(y)) \geq r$$

**Lemat 8.26.** *Na zbiorze hiperbolicznym  $\Lambda$  jest ekspansywny.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że mamy dwie  $f$ -trajektorie w  $\Lambda$  ( $x_n$ ) i ( $y_n$ ) oraz  $\rho(x_n, y_n) \leq \epsilon$ . Wtedy w odpowiednich współrzędnych wokół  $x_n$  w otoczeniach (zawierających  $y_n$ ) mamy  $f \sim_{C^1} Df(x_n) = L_n$ .

Z lematu (??) (jednoznaczność) otrzymujemy w tych otoczeniach

$$W^{s(u)}(x_n) = W^{s(u)}(y_n), \text{ zatem } x_n = y_n.$$

$\square$

**Twierdzenie 8.27.** *Dyfeomorfizmy Anosowa są  $\epsilon$ -strukturalnie stabilne.*

*Dowód.* Ustalmy  $f$  dyfeomorfizm Anosowa. Jeśli  $g$  jest  $C^0$ -bliskie  $f$ ,  $\rho_{C^0}(f, g) \leq \epsilon$  to każda  $g$ -trajektoria ( $x_n$ ) jest  $\epsilon$ -trajektoria  $y_n$ ,  $\rho(x_n, y_n) \leq \eta$ , (shadowing lemma).

Zdefiniujmy  $h_{gf}(x_n) = y_n$ .  $h$  jest ciągłe, bo jeśli  $x_0$  jest bardzo blisko  $x'_0$  to długie bloki  $g$ -trajektorii są bliskie sobie, powiedzmy  $\eta$ -bliskie, więc długie bloki  $f$ -trajektorii  $y_n = h_{gf}(x_n)$ ,  $y'_n = h_{gf}(x'_n)$  są  $3\eta$ -bliskie, to znaczy  $\rho(y_n, y'_n) \leq 3\eta$  dla  $|n| \leq N$ . Stąd wynika (ćwiczenie), że  $\rho(y_0, y'_0)$  jest bardzo bliskie 0,  $\rho(y_0, y'_0) \rightarrow 0$  gdy  $N \rightarrow \infty$ . (Można w ten sposób udowodnić



Holderowską ciągłość  $h_{gf}$ ). Ponieważ  $h_{gf} \circ g = f \circ h_{gf}$  z tw. (8.24) wynika, że jeśli  $g$  jest  $C^1$ -blisko  $f$  to  $g$  też jest Anosowa. Można zatem skonstruować  $h_{fg}$  takie, że

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h_{fg} \downarrow & & \downarrow h_{fg} \\ M & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

Zatem  $h_{ff} := h_{fg} \circ h_{gf}$  sprzęga  $f$  z samym sobą. Z jednoznaczności wynika, że  $h_{ff} = id$ , bo  $id$  też sprzęga  $f$  z samym sobą. Podobnie  $h_{gg} = h_{gf} \circ h_{fg} = id$ . Zatem  $h_{fg}$  jest homeomorfizmem  $M$ .  $\square$

Jednoznaczność, z której skorzystaliśmy można sformułować następująco

**Lemat 8.28.** *Jeśli  $f$  jest ekspansywnym homeomorfizmem zbioru  $\Lambda \subset M$  na  $\Lambda$  oraz  $h_1$  i  $h_2$  to przekształcenia pewnego zbioru  $A \subset M$  w  $\Lambda$ ,  $g$  to przekształcenie  $A$  w  $A$  i*

$$h_1 \circ g = f \circ h_1, \quad h_2 \circ g = f \circ h_2 \quad \text{to} \quad \rho(h_1, h_2) < r$$

(stała) ekspansywności z def. (8.25) implikuje  $h_1 = h_2$ .

*Dowód.* Jeśli  $h_1(z) \neq h_2(z)$  to  $\exists n \in \mathbb{Z}$

$$\rho(h_1(g^n(z)), h_2(g^n(z))) = \rho(f^n(h_1(z)), f^n(h_2(z))) \geq r.$$

$\square$

**Twierdzenie 8.29.** *Jeśli  $\Lambda_f$  jest zbiorem hiperbolicznym dla dyfeomorfizmu  $f$  i  $g \sim_{C^1} f$  to istnieje blisko  $\Lambda_f$  zbiór niezmienniczy dla  $g$   $\Lambda_g$ , hiperboliczny dla  $g$  i homeomorfizm*

$$h_{fg}: \Lambda_f \rightarrow \Lambda_g \quad \text{taki, że}$$

$$h_{fg} \circ f|_{\Lambda_f} = g|_{\Lambda_g} \circ h_{fg}$$

$h$  bliskie  $id$ .

*Dowód.* Jeśli  $(x_n)$  to  $f$ -trajektoria  $\Lambda_f$  to jest to  $\epsilon$ - $g$ -trajektoria. Stosując lemat (8.19) tak jak w dowodzie “Shadowing lemma” znajdujemy blisko  $(x_n)$   $g$ -trajektorie  $(y_n)$  i definiujemy  $h_{fg}(x_n) = y_n$   $\square$

*Uwaga 8.30.* Analogiczna teoria prawdziwa jest dla potoków.

*Przykład 8.31.* Niech dla dyfeomorfizmu  $f$  powierzchni ma punkt homokliniczny, transwersalny, to znaczy  $W^s(p)$  przecina  $W^u(p)$  w punkcie  $x$  transwersalnie. Wtedy istnieje dla  $f$  nieprzeliczalny niezmienniczy zbiór hiperboliczny.

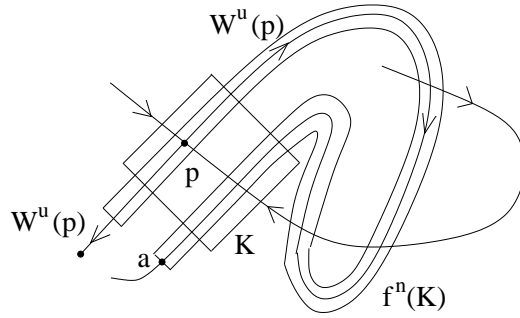
Faktycznie, jeśli “prostokąt”  $K$  jest odpowiednio niski (krótki w kierunku  $W^u(p)$ ) to  $n$ , dla którego  $f^n(K)$  otacza  $W^u(p)$  aż do punktu  $a$ , jest duże, więc pasek  $f^n(K)$  cienki.

Wtedy

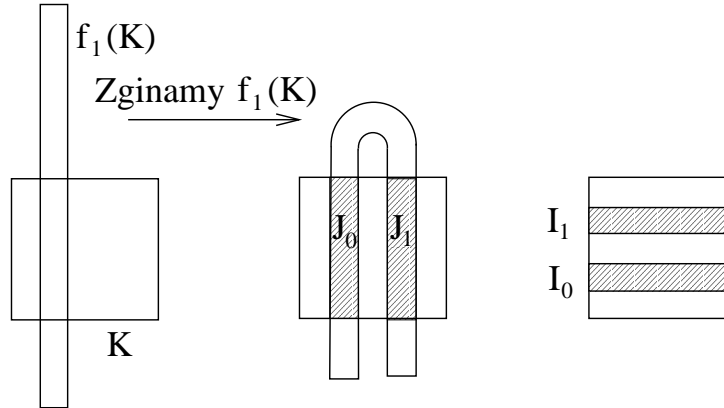
$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{nk}(K) = \Lambda$$

jest zbiorem hiperbolicznym dla  $f^n$ .

Zbadajmy to dokładniej w sytuacji idealnej (modelowej):



Rysunek 8.9:



Rysunek 8.10:

*Przykład 8.32.* (Podkowa Smale'a)

Niech  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$  przekształca kwadrat  $K$  dyfeomorficznie na swój obraz w  $\mathbb{R}^2$ , w ten sposób, że jest złożeniem najpierw przekształcenia afinicznego  $f_1$ , a potem takiego  $f_2$ , że  $f_1(K)$  jest przeprowadzone przez  $f_2$  na "podkowę".

Robimy to tak, żeby  $f$  na  $I_0$  i  $I_1$  będącymi przeciwobrazami przy  $f^{-1}$  składowych  $J_0, J_1$  zbioru  $K \cap f(K)$  było afiniczne i przekształcało linie poziome w poziome, a pionowe w pionowe. Widać, że

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K)$$

to iloczyn kartezjański dwóch zbiorów Cantora, poziomego i pionowego.

Zbadajmy  $\Lambda$  dokładniej.

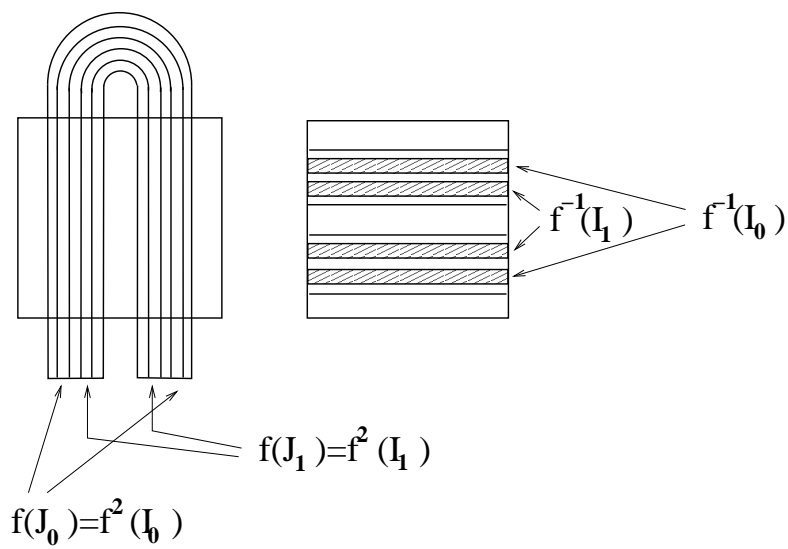
Oznaczmy  $\Sigma^2$  przestrzeń ciągów  $0, 1$  z metryką  $\rho((\alpha_n), (\beta_n)) = 2^{-N}$ , gdzie  $N = \min\{|n| \mid \alpha_n \neq \beta_n\}$ .

Przporządkujmy ciągowi  $\alpha_n$  zbiór

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(I_{\alpha_n}).$$

Ciąg  $(\alpha_n)$  nazywamy kodem tego punktu  $x$ .  $f^n(x) \in I_{\alpha_n}$ .  $\alpha_n$  dla  $n \geq 0$  opisują przyszłość tego punktu, a  $\alpha_n$  dla  $n < 0$  przeszłość.

To przyporządkowanie  $h$  jest homeomorfizmem.  $\Lambda$  jest zbiorem hiperbolicznym. Rozmaitości stabilne w  $K$  to linie poziome, niestabilne to linie pionowe.



Rysunek 8.11:



# Wykład 9

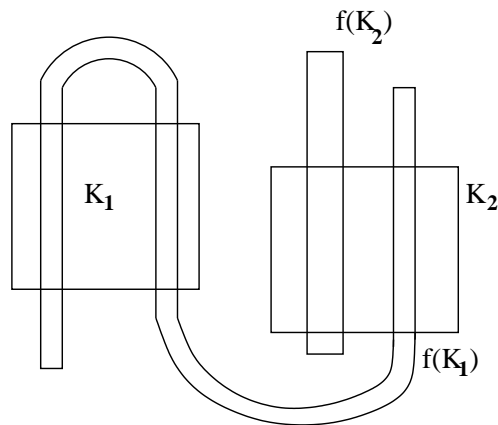
Na przestrzeni  $\Sigma^2$  ciągów  $\alpha_n = 0$  lub  $1$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  można wprowadzić przesunięcie w lewo

$$\forall k \quad \sigma((\alpha_n)_n)_k = \alpha_{k+1}.$$

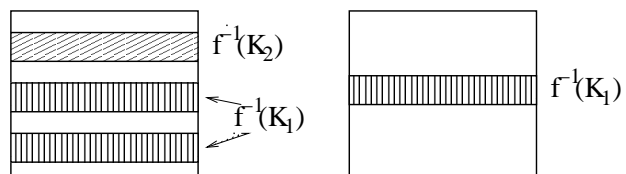
Wtedy kodowanie  $h: \Sigma^2 \rightarrow \Lambda$  zbioru niezmienniczego  $\Lambda$  dla podkowy Smale'a spełnia własność

$$f|_{\Lambda} \circ h = h \circ \sigma.$$

*Przykład 9.1.* Można badać uogólnioną podkowę Smale'a gdzie zamiast jednego jest kilka kwadratów  $K_1, \dots, K_l$  a liczba składowych  $f(K_i) \cap K_j$  jest dowolna. Jeśli  $I_0, \dots, I_d$  to



Rysunek 9.1:



Rysunek 9.2:

składowe  $f^{-1}(K_i) \cap K_j$ ,  $i, j = 1, \dots, l$ , to

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n \left( \bigcup K_j \right)$$

może być zakodowane przez przestrzeń ciągów symboli  $\alpha_n = 1, \dots, d$ . W takim ciągu jako kolejne symbole, mogą pojawiać się tylko pary  $\alpha_n \alpha_{n+1}$ , dla których

$$f(I_{\alpha_n}) \cap I_{\alpha_{n+1}} \neq \emptyset$$

**Definicja 9.2.** Niech  $A$  będzie macierzą  $d \times d$  z wyrazami  $a_{ij} = 0$  lub  $1$ . **Topologiczny łańcuch Markowa**  $\Sigma(A)$  to przestrzeń ciągów

$$(\alpha_n)_{n=\dots, -1, 0, 1, \dots}, \quad \alpha_n \in \{1, \dots, d\},$$

takich, że

$$\forall n \quad a_{\alpha_n \alpha_{n+1}} = 1$$

$$\sigma(\Sigma(A)) = \Sigma(A).$$

W poprzednim przykładzie skonstruowaliśmy homeomorfizm  $h: \Sigma(A) \rightarrow \Lambda$  dla odpowiedniej macierzy  $A$ .

*Uwaga 9.3.*  $A$  można utożsamiać z grafem skierowanym  $\Gamma_A$ , którego wszystkie wierzchołki odpowiadają  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Krawędzie od  $I_i$  do  $I_j$  liczbom  $a_{ij} = 1$ . Punkty  $\Lambda$  to nieskończone ścieżki po grafie.

Można zacząć od grafu  $\Gamma$ , którego wierzchołkami są  $K_j$ , a od  $K_j$  do  $k_i$  jest tyle krawędzi ile składowych  $K_i \cap f^{-1}(K_j)$ . Wtedy  $\Gamma_A$  będzie grafem pochodnym, to znaczy jego wierzchołkami są krawędzie  $\Gamma$ , a krawędziami, pary krawędzi takie, że koniec pierwszej to początek drugiej.

Zajmiemy się teraz analogiczną konstrukcją dla zbiorów hiperbolicznych.

**Definicja 9.4.** Mówimy, że zbiór zwarty  $X$ , niezmienniczy dla homeomorfizmu  $f$ , określonego na jego otoczeniu, jest **izolowany** (inna nazwa: **lokalnie maksymalny**) jeśli istnieje w dziedzinie  $f$  otoczenie  $U$  zbioru  $X$  takie, że

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U) = X$$

(Inaczej mówiąc: jeśli  $x \in X \setminus U$  to jego trajektoria, albo w przód, albo w tył ucieka z  $U$ .)

**Definicja 9.5.**  $X$  jest atraktorem jeśli

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = X.$$

**Lemat 9.6.** Jeśli  $\Lambda$  zbiór hiperboliczny dla dyfeomorfizmu  $f$  jest izolowany to ma lokalną strukturę iloczynu, to znaczy

$$\forall x, y \text{ blisko } y \quad W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^u(y) \in \Lambda.$$

*Dowód.*  $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$  dla  $\epsilon$  dostatecznie małego, to dokładnie jeden punkt, bo  $E^s$  i  $E^u$  są podwiązkami ciągłymi na  $\Lambda$  i  $W_\epsilon^{s(u)}(x)$  jest w  $x$  styczne do  $E^{s(u)}(x)$ , bliskie  $C^1$  w otoczeniu  $B(x, \epsilon)$ , niezależne od  $x$ . (Patrz Lemat (8.1) o jednostajnym zaburzeniu). Mamy więc dla  $\{z\} = W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$

$$\forall n \geq 0 \quad \rho(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \quad (\rightarrow 0) \text{ i}$$

$$\forall n \geq 0 \quad \rho(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon.$$

Zatem cała trajektoria  $f^n(z)$   $n \in \mathbb{Z}$  pozostaje blisko  $\Lambda$ , należy więc do  $\Lambda$  z definicji  $z$ .  $\square$

*Ćwiczenie 9.7.* Udowodnić Lemat w drugą stronę, to znaczy, że lokalna struktura iloczynu implikuje, że  $\Lambda$  jest izolowany.

Oznaczamy  $W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^u(y)$  przez  $[x, y]$ .

**Definicja 9.8.** Zwarty podzbiór  $R \subset \Lambda$  nazywamy **prostokątem** jeśli  $\forall x, y \in R$  mamy  $[x, y] \in R$ , oraz  $R = \overline{IntR}$ .

Dla  $x \in R$  oznaczmy  $W_R^s(x) = W_\epsilon^s(x) \cap R$ .  
Oznaczmy **brzegiem stabilnym**,  $\partial^s R$ , zbiór

$$\partial^s(R) = \bigcup_{x \in R} \partial_{\Lambda \cap W_\epsilon^u(x)} W_R^u(x)$$

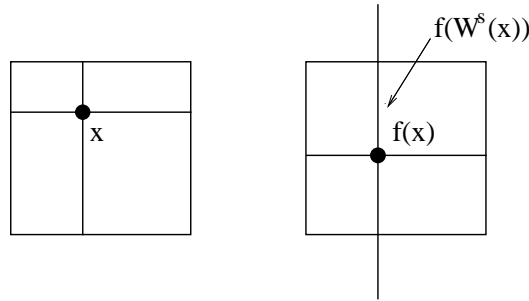
gdzie indeks przy brzegu  $\partial$  oznacza przestrzeń topologiczną, w której brzeg jest rozważany. Analogicznie definiujemy **brzeg niestabilny**  $\partial^u R$ .

**Definicja 9.9. Rozbiciem Markowa** zbioru  $\Lambda$  hiperbolicznego, izolowanego, nazywamy takie skończone pokrycie  $\Lambda$  prostokątami  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , że  $IntR_i \cap IntR_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$ .

1. Dla każdego  $x \in IntR_i$ , jeśli  $f(x) \in IntR_j$  to

$$W_{R_j}^u(f(x)) \subset f(W_{R_i}^u(x)) \text{ i } f(W_{R_i}^s(x)) \subset W_{R_j}^s(f(x))$$

oraz



Rysunek 9.3:

2.  $f(W_{R_i}^u(x))$  zawiera dla każdego  $j$  najwyżej jeden zbiór  $W_{R_j}^u(y)$  (to znaczy jeśli zawiera  $W_{R_j}^u(y_1)$  i  $W_{R_j}^u(y_2)$  to  $W_{R_j}^u(y_1) = W_{R_j}^u(y_2)$ ).

*Uwaga 9.10.* Widać że warunek 1 implikuje, że dla  $\partial^s = \bigcup_{i=1}^d \partial^s R_i$  i  $\partial^u = \bigcup_{i=1}^d \partial^u R_i$  mamy

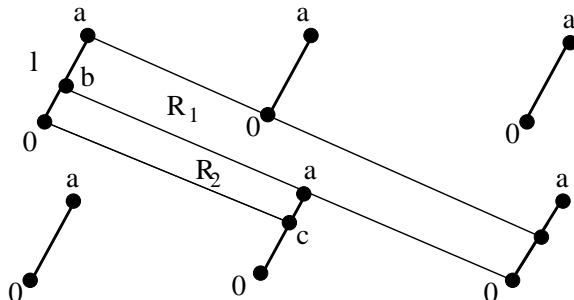
$$f(\partial^s) \subset \partial^s \text{ i } f^{-1}(\partial^u) \subset \partial^u.$$

Odwrotnie to może nie być prawdą, jeśli na przykład  $\partial^{s(u)}$  są puste, warunek 3 jest pusty. Jeśli jednak  $\forall i, x \in R_i$   $IntW_{R_i}^{u(s)}(x)$  jest spójny, to  $3 \Rightarrow 1$  (ćwiczenie).  
Dla dyfeomorfizmu Anosowa, będącego algebraicznym, hiperbolicznym automorfizmem torusa  $\mathbb{T}^2$ , to znaczy danym hiperboliczną macierzą

$$A: \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

(przekształceniem liniowym) o całkowitych współczynnikach i  $\det(A) = 1$  “porządne” rozbicie Markowa można skonstruować bezpośrednio. Nazywa się ono **rozbiciem Adlera-Weissa** (de facto było ono już skonstruowane na wykładzie 5).

Dla  $0 < \lambda_1 < 1$   $\lambda_2 > 1$  wartości własnych  $A$  rozmaitość stabilna punktu stałego  $0$  to prosta w kierunku wektora własnego odpowiadającego  $\lambda_1$ , niestabilna w kierunku wektora własnego odpowiadającego  $\lambda_2$  (patrz Wykład 8). Niech  $l$  będzie odcinkiem  $W^u(0)$  łączącym  $0$  i punkt  $a \in W^s(0)$  taki, że odcinek  $l^s$  łączący w  $W^s(0)$   $a$  i  $0$  nie przecina  $l$ . Przekształcenie pierwszego



Rysunek 9.4:

powrotu wzdłuż stabilnej foliacji  $W^s$  do odcinka  $l$ , (przy ustalonym kierunku), może mieć najwyżej 2 punkty nieciągłości, przeciwbrazy końców  $l$ , ale tu dzięki specjalnemu doborowi  $a$  jest tylko 1 punkt  $b$  (porównaj Wykład 5.). Otrzymujemy rozbicie  $\mathbb{T}^2$  na dwa prostokąty  $R_1$  i  $R_2$ .

Mamy

$$\partial^u = l, \quad \partial^s = \text{odcinek}[b, c] \subset W^s(0)$$

Oczywiście

$$f^{-1}(\partial^u) \subset \partial^u, \quad f(\partial^s) \subset \partial^s.$$

Warunek (3), a zatem (1) (patrz Uwaga 2) jest spełniony. Nie jest niestety spełniony warunek (2), bo  $R_1$  i  $R_2$  są za duże (porównaj  $K_1$  i  $K_2$  w przykładzie 1).

Za prostokąty dające rozbicie Markowa należy wziąć składowe  $R_i \cap f^{-1}(R_j)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Dla uzyskania drobniejszego rozbicia Markowa można powtórzyć tę operację itd.

**Uwaga 9.11.** Dla dyfeomorfizmów Anosowa rozmaitości wymiaru  $\geq 3$  na ogół  $\partial^s$  i  $\partial^u$  są **fraktalami** (nie są rozmaitościami różniczkowalnymi).

**Uwaga 9.12.** W przykładzie 1 rozbiciem Markowa jest

$$\{I_1, \dots, I_d\}$$

**Uwaga 9.13.** Przy ustalonym rozbiciu Markowa  $\{R_i\}_{i=1, \dots, d}$  niech dla macierzy  $A = (a_{ij})_{i, j=1, \dots, d}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } f(\text{Int}R_i) \cap \text{Int}R_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{jeśli } f(\text{Int}R_i) \cap \text{Int}R_j = \emptyset \end{cases}$$

Wtedy

$$h: \Sigma(A) \rightarrow \Lambda, \quad h((\alpha_n)_{n=\dots, -1, 0, 1, \dots}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\alpha_n})$$

jest dobrze zdefiniowanym przekształceniem ciągłym i  $h \circ \sigma = f \circ h$ .

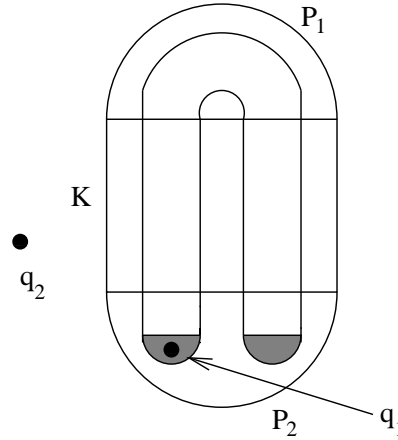
(Ponadto dla każdej miary ergodycznej  $\sigma$ -niezmienniczej  $\mu$  na  $\Sigma(A)$ ,  $h_*: \mu \rightarrow h_*(\mu)$ , gdzie  $h_*(\mu) := \mu \circ h^{-1}$ , jest izomorfizmem teorii-miarowym. To będzie bliżej wyjaśnione na wykładzie z układów dynamicznych.)



**Konkluzja:**

Rozbicie Markowa pozwala na prawie 1-1 kodowanie topologicznym łańcuchem Markowa.

*Przykład 9.14.* Wróćmy do **podkowy Smale'a**. Rozszerzymy  $f$  do dyfeomorfizmu całej sfery  $S^2$ . Do kwadratu  $K$  dolepione są dwa półkola  $P_1$  i  $P_2$ . Dysk topologiczny  $P_1 \cup K \cup P_2$  jest



Rysunek 9.5:

przekształcony w siebie,  $P_1, P_2$  na zakreskowane obrazy w  $P_1$ .  $q_1$  to ściek. Można wtedy rozszerzyć  $f$  do  $S^2$ , tak, żeby oprócz źródła  $q_2$  każda trajektoria wpadała w  $P_1 \cup K \cup P_2$ . Zbiór punktów niebłądzących to

$$\Omega = \{q_1\} \cup \{q_2\} \cup \Lambda \quad (9.1)$$

gdzie jak poprzednio  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K)$ . Każdy ze zbiorów  $\{q_1\} \cup \{q_2\}, \Lambda$  to izolowany punkt niezmienniczy, hiperboliczny. Punkty okresowe są gęste w  $\Omega$  (ćwiczenie). Jest to przykład przekształcenia spełniającego tak zwany Aksjomat A (Smale'a)

**Definicja 9.15.** Dyfeomorfizm  $f: M \rightarrow M$  rozmaitości zwartej spełnia **Aksjomat A** jeśli

1.  $\Omega$  jest skończoną sumą zbiorów hiperbolicznych.
- 2.

$$\overline{Per(f)} = \Omega(f)$$

*Uwaga 9.16.* Dla  $\dim M = 2$  (1) $\Rightarrow$ (2), jeśli  $\dim M \geq 3$  to tak być nie musi. Przykład nie jest prosty.

Jeśli  $f$  spełnia Aksjomat A to można wprowadzić relację równoważności na punktach okresowych:  $x \sim y$  jeśli istnieją punkty  $p_1, p_2$ , w których  $W^s(x)$  przecina  $W^u(y)$ , transwersalnie.

*Ćwiczenie 9.17.* Sprawdzić, że to relacja równoważności. Wsk:  $\lambda$ -lemat.

Domknięcia tych klas równoważności dają rozbicie  $\Omega(f)$  na skończoną liczbę zbiorów hiperbolicznych, tak zwane **rozbicie spektralne** (skończone bo punkty okresowe blisko siebie muszą być równoważne).

W przykładzie 2 rozbicie  $\Omega$  jak w (9.1) jest rozbięciem spektralnym.

Weźmy rozbicie  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$  na większe zbiory, orbity zbiorów rozbięcia spektralnego (muszą to być orbity okresowe bo rozbicie spektralne jest skończone).

Możemy podobnie jak dla dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a wprowadzić relację

$$\Omega_i \leq \Omega_j, \text{ jeśli } \exists x \in \Omega_i, y \in \Omega_j W^s(x) \cap W^u(y) \neq \emptyset.$$

Załóżmy, że jest to relacja częściowego porządku ( to znaczy nie ma cykli  $\Omega_{i_1} < \dots < \Omega_{i_2}$ . Dla Morse'a-Smale'a nie trzeba było tego zakładać, wynikało to z tego, że zakładaliśmy transwersalność przecięć  $W^s$  i  $W^u$ ). Wtedy jak w przypadku M-S dowodzi się, że istnieje filtracja. Dzięki temu, podobnie jak dla M-S nie ma dla małych zaburzeń  $f$   $\Omega$ -eksplozji. Co więcej otrzymujemy następujące

**Twierdzenie 9.18.** *Aksjomat A i brak cykli implikuje  $C^1 - \Omega$ -stabilność, to znaczy jeśli  $g$  jest  $C^1$ -bliskie  $f$ , które spełnia aksjomat A i brak cykli, to istnieje homeomorfizm*

$$h: \Omega(f) \rightarrow \Omega(g),$$

taki, że

$$h \circ f|_{\Omega(f)} = g|_{\Omega(g)} \circ h.$$

Poza tym  $g$  też spełnia Aksjomat A i warunek braku cykli.

Prawdziwe jest też następujące twierdzenie uogólniające twierdzenie o strukturalnej stabilności układów Morse-a-Smale'a.

**Twierdzenie 9.19.** *Aksjomat A i silny warunek transwersalności (to znaczy każdy punkt przecięcia  $W^s(x)$  i  $W^u(y)$  jest punktem transwersalnego przecięcia) implikują  $C^1$ -strukturalną stabilność.*

*Dowód.* Trudny. Można znaleźć w pracy C. Robinson, "Journal of Differential Equations" 22(1976), str. 28-73. □

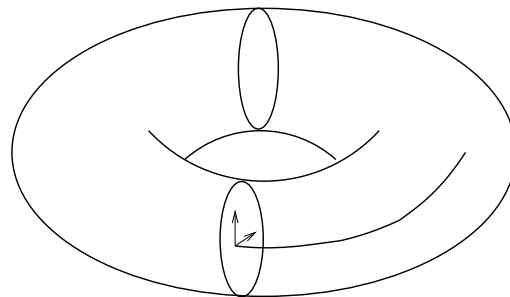
Prawdziwe są też twierdzenia odwrotne do twierdzeń (9.18) i (9.19), to znaczy  $C^1 - \Omega$ -stabilność (odpowiednio  $C^1$ -strukturalna stabilność) implikuje Aksjomat A i brak cykli (odpowiednio silny warunek transwersalności).

Mamy więc pełną charakteryzację układów  $C^1 - \Omega$ -stabilnych i  $C^1$ -strukturalnie stabilnych. Głównym autorem dowodów tych twierdzeń był Ricardo Mane, w latach 80-tych. Do dowodów potrzebne były nowe metody: teorii ergodycznej.

Na koniec jeszcze kilka ważnych przykładów zbiorów hiperbolicznych

*Przykład 9.20.* (Solenoid)

Niech  $K$  będzie pełnym torusem w  $\mathbb{R}^3$ . Sparametryzujemy go jako iloczyn kartezjański okręgu i dysku jednostkowego w  $\mathbb{R}^2$  ( $\varphi, x, y$ ). Zdefiniujmy  $f: K \rightarrow K$  wzorem



Rysunek 9.6:

$$f(\varphi, x, y) = (2\varphi, r_0 \sin \varphi + \lambda x, r_0 \cos \varphi + \lambda y),$$

gdzie  $r_0 + \lambda < 1$  i  $\lambda < r_0$ .

Widać, że  $f$  jest 1 – 1 i  $f(K)$  jest cienkim, podwójnie nawiniętym pełnym torusem.

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(K) \text{ nazywamy solenoidem.}$$

Jest to zbiór hiperboliczny, atraktor.  $W^s(z_0)$  w  $K$  to dysk z ustalonym  $\varphi = \varphi_0$ , gdzie  $z_0 = (\varphi_0, x_0, y_0) \in \Lambda$ .

$W^u(z_0)$  to linia “mniej więcej” w kierunku  $\varphi$ . (Istnienie  $E^u$  trzeba udowodnić, ćwiczenie.)

Ustalonemu ciągowi  $\varphi_0, \varphi_{-1}, \dots, \varphi_{-n}$  takiemu, że  $2\varphi_{-n} \pmod{2\pi} = \varphi_{-n+1}$  można przyporządkować

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(D_{\varphi_{-n}}).$$

To jest jeden punkt, bo  $f$  jest kontrakcją na dyskach.

Mamy więc homeomorfizm z  $\widetilde{S}^1$  na  $\Lambda$ , gdzie  $\widetilde{S}^1$  jest przestrzenią wyżej opisanych ciągów.

$\widetilde{S}^1$  jest grupą, granicą odwrotną systemu

$$\dots \xrightarrow{z^2} \widetilde{S}^1 \xrightarrow{z^2} \widetilde{S}^1$$

(zastosowałem tu zapis multiplikatywny).

$$(\varphi_0, \varphi_{-1}, \dots) \cdot (\psi_0, \psi_{-1}, \dots) = (\varphi_0\psi_0, \varphi_{-1}\psi_{-1}, \dots)$$

To jest element granicy odwrotnej (trajektoria wstecz dla  $z \mapsto z^2$ ), bo  $z \mapsto z^2$  jest homomorfizmem

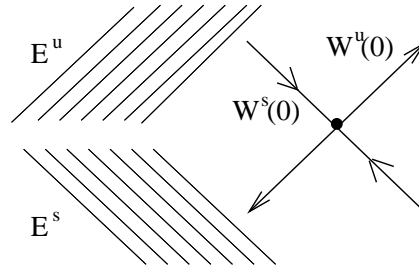
$$(\varphi_n \psi_n)^2 = \varphi_n^2 \psi_n^2 = \varphi_{n+1} \psi_{n+1}.$$

Na  $\Lambda$  udało się więc wprowadzić strukturę grupy.

*Przykład 9.21.* Zaburzymy (mocno) przekształcenie  $f$  torusa, Anosowa, dane macierzą

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zmieńmy  $f$  w otoczeniu 0 tak, żeby zero, które jest siodłem, stało się źródłem. Będziemy

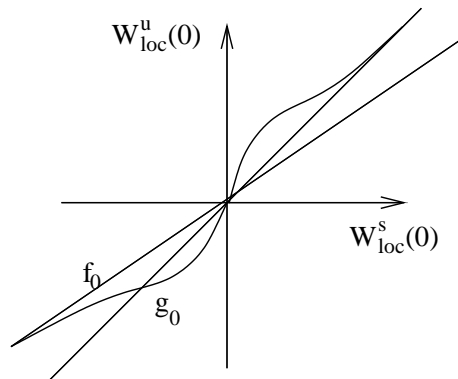


Rysunek 9.7:

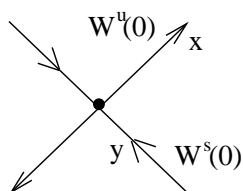
zmieniać  $f$  tak, żeby proste stabilne (blisko 0) nadal przechodziły w te same proste stabilne. Dla  $f$  na  $W_{loc}^s(0)$  mamy kontrakcję. Niżej rysuję wykres  $f_0 = f|_{W_{loc}^s(0)}$  i nowego, po zaburzeniu,  $g_0 = g|_{W_{loc}^s(0)}$ .

Na  $W_{loc}^s(0)$ ,  $x \in W_{loc}^s(0)$  to zaburzenie gładko wygaszam. We współrzędnych  $(x, y)$ , w których  $W^s = \{x = const\}$ ,  $W^u = \{y = const\}$ , w otoczeniu 0, można  $g$  zapisać jako

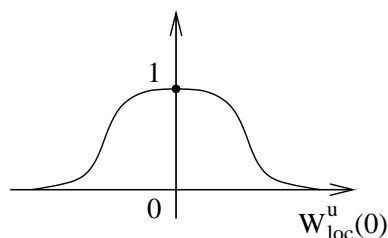
$$g(x, y) = (F(x), \rho(x)g_0(y) + (1 - \rho(x))f_0(y)),$$



Rysunek 9.8:



Rysunek 9.9:



Rysunek 9.10:

gdzie  $F(x)$  to pierwsza współrzędna  $f(x, y)$ . Nie zależy ona od  $y$ .  $\rho(x)$  jest gładka z wykresem

Jeśli  $U$  to otoczenie  $0$ , mamy atraktor hiperboliczny

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\mathbb{T}^2 \setminus U),$$

Niezmiennicza podwiązka  $E^s$  jest na  $\Lambda$  taka jak poprzednio. Podwiązkę  $E^u$  na  $\Lambda$  uzyskujemy jako granicę  $Dg^n(E^u)$  dla starej wiązki  $E^u$ . Mamy bowiem kontrakcję  $Dg$  na przestrzeni wiązek bliskich staremu  $E^u$  na  $\Lambda$ .

**Uwagi:**

1. Taki sam dowód daje hiperboliczność solenoidu.
2. Porównaj dowód tw.(8) z wykładu (8).

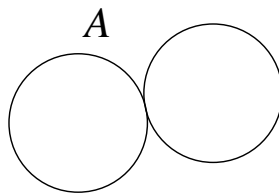
Jeśli z  $\mathbb{T}^2$  wyjmiemy  $l = W^u_{loc}(0)$  dla  $f$ , to  $f$  działa na przestrzeni  **$\mathcal{A}$  składowych**  $W^{glob}_s(x) \setminus l$  (to znaczy składowe przeprowadza w składowe, czasem w jedną).

Podobnie jak dla solenoidu  $\Lambda$  jest granicą odwrotną systemu

$$\dots \rightarrow^F \mathcal{A} \rightarrow^F \mathcal{A},$$

gdzie  $F$  to przekształcenie indukowane przez  $f$  na przestrzeni składowych  $\mathcal{A}$ . Tutaj składowe odgrywają rolę dysków w konstrukcji solenoidu.

Można nadać  $\mathcal{A}$  strukturę rozgałęzionej rozmaitości (krzywej). Wtedy  $F$  jest rozciągająca



Rysunek 9.11: Zlepka dwóch okręgów

(podobnie jak  $z^2$  na  $S^1$  dla solenoidu).

*Ćwiczenie 9.22.* Zanurzyć  $\mathcal{A}$  w  $\mathbb{T}^2 \setminus l$  tak, żeby każda składowa była przecięta transwersalnie.

*Uwaga 9.23.* Uzyskane  $g$  nazywa się **DA-dyfeomorfizmem** (Derived from Anosov). Konstrukcja topologicznie polegała na tym, że rozmaitość  $W_{glob}^u(0)$  rozdmuchaliśmy do “szczeliny” gęstej w  $\mathbb{T}^2$  (porównaj ze zbiorem minimalnym zawieszenia  $C^1$ -dyfeomorfizmu okręgu z niewymierną liczbą obrotu bez gęstych trajektorii, to znaczy z błądzącym łukiem - przykład Denjoy).

**Twierdzenie 9.24.** (*R.F. Williams*)

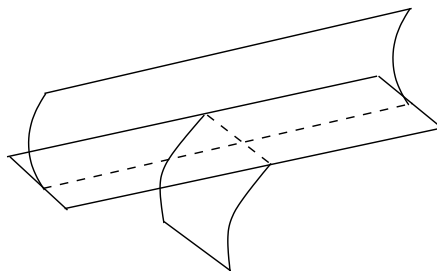
*Każdy hiperboliczny rozciągający atraktor (Expanding attractor) jest granicą odwrotną systemu*

$$\dots \rightarrow^f \mathcal{A} \rightarrow^f \mathcal{A},$$

*dla  $f$  rozciągającego przekształcenia pewnej rozgałęzionej rozmaitości  $\mathcal{A}$ .*

**Definicja 9.25.** Rozciągający znaczy, że wymiar topologiczny  $\Lambda$  jest równy  $u = \dim E^u$ . Intuicyjnie: wzdłuż  $\Lambda$  jest tylko rozciąganie.

Definicję rozgałęzionej rozmaitości przedstawia rysunek:  
Przerywane, to linie rozgałęzień.

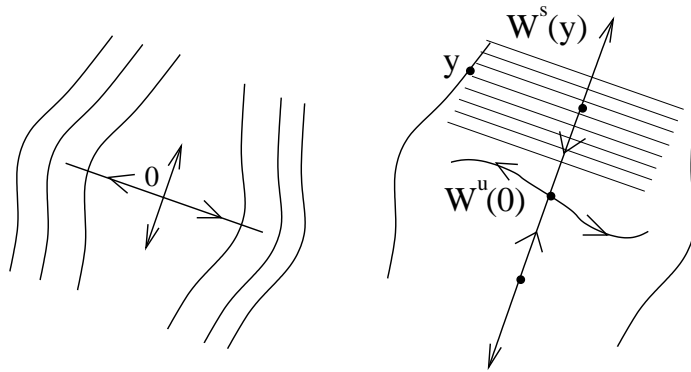


Rysunek 9.12: Rozmaitość rozgałęziona

Modyfikując DA-dyfeomorfizmy możemy udowodnić

**Twierdzenie 9.26.** *Dyfeomorfizmy strukturalnie stabilne nie są gęste w topologii  $C^1$  w przestrzeni dyfeomorfizmów torusa  $\mathbb{T}^2$*

Dla  $g_1$  istnieje  $y \in \Lambda$  taki, że  $W^s(y)$  jest styczna do  $W^u(0)$ . Taka styczność, stabilna przy  $C^1$ -zaburzonych  $g_1$  (zmienia się  $y$ ) powoduje brak strukturalnej stabilności. Można skorzystać z tw. odwrotnego do tw. (9.19), ale można to łatwo pokazać elementarnie, ćwiczenie.

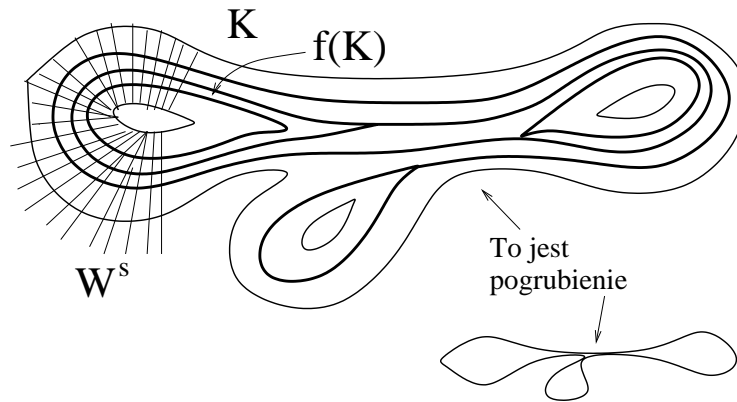


Rysunek 9.13:  $g$  DA-dyfeomorfizm i  $g_1$ -zmodyfikowane  $g$

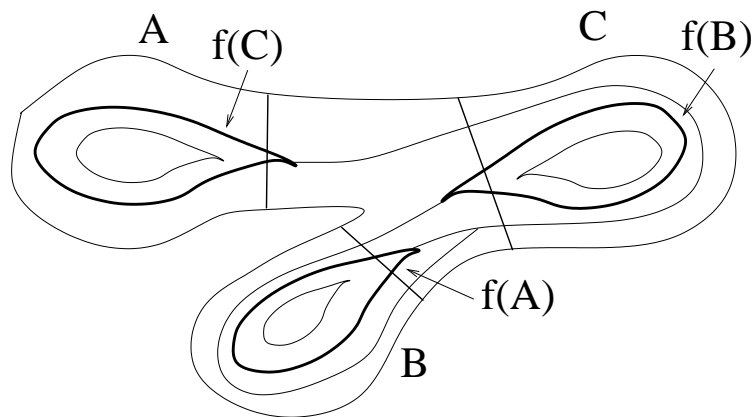
*Przykład 9.27.* (Plykin)

Rozciągający atraktor hiperboliczny można skonstruować na płaszczyźnie. Wtedy jednak wiązka  $E_{\Lambda}^{s(u)}$  musi być nieorientowalna i liczba składowych  $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda \geq 4$ .  $\Lambda$  jest wspólnym brzegiem tych składowych.

Inny przykład typu Plykina.



Rysunek 9.14:



Rysunek 9.15:

# Wykład 10

Zajmiemy się badaniem **osobliwości pól wektorowych**, to znaczy pól wektorowych  $V$  w otoczeniu  $x$ , gdzie  $V(x) = 0$ . W szczególności zbadamy, czy w tw. Grobmana-Hartmana nie można linearyzującego homeomorfizmu  $h$  zastąpić gładkim dyfeomorfizmem.

Najpierw podam pewne ogólne rozważania.

Niech  $\phi^t$  będzie potokiem dyfeomorfizmów generowanym polem  $X$

$$\frac{d\phi^t}{dt}(x) = X(\phi^t(x))$$

Oznaczmy

$$V^t(x) = D\phi^{-t}V(\phi^t(x)). \quad (10.1)$$

Pole jest  $V$  we współrzędnych  $\phi^{-t}$ , chcemy badać zmianę pola przy zmianach współrzędnych dyfeomorfizmami tego potoku.

Mamy

$$\left. \frac{dV^t}{dt} \right|_{t=0}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D\phi^{-t}V(\phi^t(x)) - V(x)}{t}$$

To ostatnie wyrażenie nazywa się **iloczynem Liego**  $[X, V](x)$ . Tę operację V. Arnold nazywa operacją **rybaka**. Potokiem  $\phi^{-t}$  płyną wektory pola  $V$  (lub inne obiekty). Rybak siedzi na brzegu, łowi je i różniczkuje.

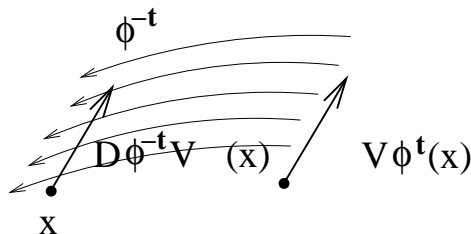
Dla dowolnego  $t_0$

$$\left. \frac{dV^t}{dt} \right|_{t=t_0}(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{D\phi^{-(t-t_0)}D\phi^{-t_0}V\phi^{t_0}\phi^{-(t-t_0)}(x) - D\phi^{-t_0}V\phi^{t_0}(x)}{t - t_0}$$

Zatem pole  $V^t$  spełnia cząstkowe równanie różniczkowe

$$[X, V^t] = \dot{V}^t. \quad (10.2)$$

Równanie (10.2) jest liniowym równaniem różniczkowym, więc (formalnie) można napisać



Rysunek 10.1: Przekształcenie rybaka

rozwiązanie

$$V^t = e^{t[X, \cdot]}(V) = \sum_{n=0}^{\infty} [X, [X, [\dots [X, V] \dots]] \frac{1}{n!} t^n. \quad (10.3)$$

Oznaczmy przez  $J^s$  przestrzeń pól wektorowych  $V$  zdefiniowanych na otoczeniu  $0 \in \mathbb{R}^m$ , takich, że  $V(0) = 0$  i ponadto

$$V = \sum_{i=1}^m \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ gdzie } \phi_i = \sum_{s_1 + \dots + s_m = s} a_{s_1 \dots s_m} x^{s_1} \dots x^{s_m}$$

$$a_{s_1 \dots s_m} \in \mathbb{R}.$$

(to znaczy współczynniki  $\phi_i$  przy  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  są wielomianami jednorodnymi stopnia  $s$ ). Czasem przez  $J^s$  będą po prostu oznaczał rodziny wielomianów jednorodnych stopnia  $s$ .

**Lemat 10.1.** *Jeśli*

$$X = X_s + o(|x|^s), \quad V = V_r + o(|x|^r)$$

dla  $x \in \mathbb{R}^m$  blisko 0,  $X_s \in J^s$ ,  $V_r \in J^r$ , to

$$[X, V] = [X_s, V_r] + o(|x|^{s+r-1}) \text{ i } [X_s, V_r] \in J^{s+r-1}.$$

W szczególności (porównaj formalne (10.3)),

$$V^1 = V + [X_s, V_r] + o(|x|^{s+r-1}) \quad (10.4)$$

jeśli  $s, r \geq 1$  i jeśli  $V, X$  są analityczne.

Przed udowodnieniem lematu (10.1), zatrzymajmy się jeszcze nad ogólnymi własnościami iloczynu Liego.

$$[X, X] = 0 \text{ bo } \forall t \ D\phi^{-t} X \phi^t(x) = X(x) \text{ jeśli } X = \dot{\phi}^t.$$

Zatem

1.

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

2. Można też udowodnić następującą tożsamość Jacobiego:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Przestrzeń liniowa  $\mathcal{X}$  z dwuliniowym przekształceniem

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

spełniającym warunki (i)(ii) nazywa się **algebrą Liego**. (Tutaj  $\mathcal{X}$  to przestrzeń pól wektorowych nad  $\mathbb{R}$ ).

Zauważmy, że u nas z definicji dla  $f \in C^1$  mamy dodatkową własność:

$$[X, fY] = (D_X f)Y + f[X, Y]. \quad (10.5)$$

We współrzędnych  $x_1, \dots, x_m$  można policzyć, że dla

$$X = \sum_{i=1}^m f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$



$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \sum_{j=1}^m (D_X g_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^m g_j [X, \frac{\partial}{\partial x_j}] \quad (\text{z (10.5)}) \\
&= (\text{z (i)}) \sum_{j=1}^m (D_X g_j) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^m g_j [\frac{\partial}{\partial x_j}, X] = \\
&= \sum_{j=1}^m (D_X g_j) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^m g_j \sum_{i=1}^m (\frac{\partial}{\partial x_j} f_i) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m g_j \sum_{i=1}^m f_i [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}] = \\
&= \sum_{j=1}^m (D_X g_j) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m (D_Y f_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Można to zapisać jako

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X. \quad (10.6)$$

*Dowód.* (lematu (10.1)). Wzór na

$$[X, V] = [X_s, V_r] + o(|x|^{s+r-1})$$

wynika natychmiast z (10.6).

Wzór na  $V^1$  wynika z analityczności  $X, V$  i z (10.3), w odpowiednio małym otoczeniu 0 zapewniającym zbieżność szeregów ( $t = 1$ ).  $\square$

Z tego lematu nie będziemy dalej korzystać, miał on tylko wyjaśnić o co chodzi. Będziemy bowiem zamiast zmieniać współrzędne dyfeomorfizmem  $\phi^{-1}$ , po prostu zmieniać współrzędne pisząc  $X = y - X(y)$ .

(Mamy dla  $X \in \mathcal{J}^s$ , jeśli  $s \geq 2$ ,

$$X - (\phi^{-1} - id) = o(|X|^s), \text{ gdzie } \dot{\phi}^t = X(\phi^t), \text{ wiczenie).}$$

Przyda nam się jeszcze następujący wariant twierdzenia o istnieniu funkcji odwrotnej.

**Lemat 10.2.** *Jeśli  $x = y + h(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , gdzie  $h(y) = (h_1(y), \dots, h_m(y))$  to wielomiany jednorodnego stopnia  $r \geq 2$  (lub ogólniej  $h$  to funkcje analityczne,  $h = H + K$ , gdzie  $H$  to wielomiany jednorodnego stopnia  $r$ ,  $K = o(|y|^r)$ ). Wtedy w otoczeniu  $0 \in \mathbb{R}^m$  istnieje funkcja odwrotna, która jest postaci*

$$y = x - h(x) + \alpha(x),$$

gdzie  $\alpha$  to funkcja analityczna  $\alpha(x) = o(|x|^r)$ .

*Dowód.* Mamy

$$y = x - h(y) \quad (10.7)$$

Rozważmy ciąg funkcji

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= x \\
&\vdots \\
y_{n+1}(x) &= x - h(y_n(x)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jeśli istnieje granica  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  to jest rozwiązaniem (10.7).

Mamy

$$|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| = |h(y_{n+1}(x)) - h(y_n(x))| \leq \frac{1}{2}|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$$

o ile  $Liph \leq \frac{1}{2}$ . Można to sobie zapewnić zmieniając  $h$  poza pewnym otoczeniem  $0$ ,  $B(0, \delta)$ . Wtedy  $y_n(x) \rightarrow y(x)$ , o ile  $|x| \leq \frac{1}{2}\delta$ , wtedy bowiem  $y_n(x) \in B(0, \delta)$ , więc w dziedzinie gdzie stare  $h$  jest równe nowemu.  $\square$

Zbadajmy bliżej funkcję  $y(x)$ . Oznaczmy  $y_{n+1} = y_n + \alpha_n$ . Wtedy

$$\alpha_{n+1} = h(y_{n+1}) - h(y_n) = h(y_n + \alpha_n) - h(y_n).$$

Oznaczmy przez  $s(\alpha_n)$  najmniejszy stopień jednomianu, w sumach dających wielomiany  $\alpha_n$ . Wtedy

$$h_i(y_n + \alpha_n) - h_i(y_n) = ay_n^{r-1}\alpha_n + by_n^{r-2}\alpha_n^2 + \dots$$

Zatem  $s(\alpha_{n+1}) \geq r - 1 + s(\alpha_n)$ , więc  $s(\alpha_{n+1}) > s(\alpha_n)$ . Stąd każdy współczynnik rozwinięcia (formalnego) Taylora  $y(x)$  jest taki sam jak  $y_n(x)$  dla dużych  $n$ , w szczególności mamy zbieżność współczynników po  $n$ .

Jeszcze nie wiemy, czy ten formalny szereg Taylora dla  $y(x)$  jest zbieżny w jakiejś kuli wokół  $0$ . Można to sprawdzić szacując wyrazy szeregu. Można też wywnioskować analityczność rozważając ciąg  $y_n(x)$  dla zespolonych  $x$ ,  $y_n(x) \in \mathbb{C}^m$ . Tak jak dla funkcji jednej zmiennej zbieżność punktowa funkcji analitycznych implikuje analityczność granicy (wzór Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{|\zeta_1 - z_1| = \delta_1} \dots \int_{|\zeta_m - z_m| = \delta_m} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_m) d\zeta_1 \dots d\zeta_m}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_m - z_m)}.$$

)

**Lemat 10.3.** Niech  $h = (h_1, \dots, h_m)$  to wielomiany jednorodne na  $\mathbb{R}^m$  stopnia  $r \geq 2$ . Wtedy równanie różniczkowe, liniowe

$$\dot{y} = Ay$$

przechodzi przy zamianie zmiennych  $x = y + h(y)$  w otoczeniu  $0$  na równanie

$$\dot{x} = Ax + W(x) + k(x),$$

gdzie

$$W(x) = Dh \circ A(x) - Ah(x) \in J^r,$$

$k(x)$  jest analityczna,  $k(x) = o(|x|^r)$ .

*Dowód.* Po podstawieniu i skorzystaniu z lematu (10.2) mamy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (Id + Dh)\dot{y} = \underline{(Id + Dh)Ay(x)} = (Id + Dh)A(x - h(y) + \alpha(x)) = \\ &= Ax - Ah(x) + Dh(Ax) + \beta(x), \end{aligned}$$

gdzie  $\beta(x) = A\alpha(x) - DhAh(x) + DhA\alpha(x)$  jest analityczna,  $\beta(x) = o(|x|^r)$ .

(Podkreślone wyrażenie zgadza się z (10.1), przy czym  $h$  odpowiada  $-x$ ).  $\square$

*Uwaga 10.4.* Można to zapisać jako

$$\dot{x} = Ax + [Ax, h(x)] + \beta(x), \tag{10.8}$$

bo z wzoru (10.6)

$$[Ax, h(x)] = D_{Ax}h(x) - D_{h(x)}Ax = Dh(x)(Ax) - A(h(x)).$$

**Konkluzja.** Mając dane równanie różniczkowe

$$\dot{y} = Ay + \alpha(y) + k_r(y) + \beta(y) + o(|y|^s),$$

gdzie  $\alpha \in J^2 \oplus \dots \oplus J^{r-1}$ ,  $k_r \in J^r$ ,  $\beta \in J^{r+1} \oplus \dots \oplus J^s$ , gdzie  $s = 2, 3, \dots, \infty, \omega$  ( $\infty$  oznacza dla  $o(|y|^s)$ , że funkcja jest płaska, to znaczy  $o(|y|^t) \forall t < \infty$ ,  $\omega$  oznacza, że  $o(|y|^s) \equiv 0$ ), i chcąc pozbyć się  $k_r(y)$  wystarczy rozwiązać tak zwane **równanie homologiczne**

$$[Ay, h(y)] = -k_r(y) \quad (10.9)$$

Jeśli  $h$  spełnia to równanie, to zmiana współrzędnych  $x = y + h(y)$  zmienia równanie na

$$\dot{x} = Ax + \alpha(x) + \gamma(x) + o(|x|^s), \text{ gdzie } \gamma \in J^{r+1} \oplus \dots \oplus J^s.$$

Jeśli

$$[Ay, h(y)] = -l(y), \quad l \in J^r$$

to otrzymamy

$$\dot{x} = Ax + \alpha(x) + (k_r(x) - l(x)) + \gamma(x) + o(|x|^s).$$

**Oznaczenie**

$\forall r \geq 2$  oznaczymy operator liniowy przestrzeni  $J^r$  w siebie

$$h \mapsto [Ax, h], \text{ przez } L_A^r.$$

**Twierdzenie 10.5.** *Jeśli  $B_r \in J^r$  to przestrzenie liniowe takie, że*

$$\text{Im}(L_A^r) \oplus B_r = J^r, \text{ to } \forall r = 2, 3, \dots$$

*równanie różniczkowe*

$$\dot{y} = Ay + k(y) + o(|y|^r), \quad (10.10)$$

gdzie  $k = \sum_{s=2}^r k_s \in J^2 \oplus \dots \oplus J^r$ , można wielomianową zamianą zmiennych zamienić na równanie w tak zwanej **postaci normalnej**

$$\dot{x} = Ax + h(x) + o(|x|^r), \text{ - postać normalna}$$

gdzie  $h = \sum_{s=2}^r h_s$ ,  $h_s \in B_s$ .

W szczególności, jeśli wszystkie  $L_A^r$  przekształcają **na**  $J^r$ , to

$$\dot{x} = Ax + o(|x|^r).$$

**Formalną zamianą zmiennych można uzyskać**

$$\dot{x} = Ax + h(x), \quad h = \sum_{s=2}^{\infty} h_s, \quad h_s \in B^s,$$

a jeśli wszystkie  $L_A^r$  są **na**, to można zlinearyzować formalnie do

$$\dot{x} = Ax.$$

*Dowód.* Rozkładamy  $k_2 = k_2' + k_2''$ , gdzie  $k_2' \in \text{Im}(L_A^r)$ ,  $k_2'' \in B^2$ . Z **Konkluzji** (rozwiązując (10.9) dla  $k_2'$ ), otrzymujemy w nowych zmiennych (10.10), gdzie  $k_2 \in B^2$  ( $k_r$ ,  $r > 2$  zmieniają się). Dalej (rozwiązując (10.9) dla  $k_2''$ ) uzyskamy (10.10), gdzie  $k_3 \in B^3$  (nie zmienia się  $k_2$ ), itd ...  $\square$

*Uwaga 10.6.* W tym twierdzeniu część liniowa pola  $Ax$  jest “maszynką”, która dzięki zmianom współrzędnych pozwala zredukować wszystkie  $h \in \text{Im } L_A^r$ . Okazuje się, że “często” część nieliniowa pola,  $\in B^r$  jest “maszynką” pozwalającą na dalsze redukcje. (Nie będziemy rozwijać dalej tego pomysłu patrz R.Roussard “Modeles locaux de champs et de forms”, Asterisque 30(1975)).

Zbadajmy dokładnie operatory  $L_A^r$ . Załóżmy dla uproszczenia, że wszystkie klatki Jordana są  $1 \times 1$ . Wybierzmy współrzędne takie, że  $\frac{\partial}{\partial x_j}(0)$  to baza wektorów własnych  $A$ , mogą to być wektory w  $\mathbb{C}^n$ , wtedy nierzeczywiste są parami sprzężone.

Liczymy z wzoru (10.6),  $r_1 + \dots + r_m = r$

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \\ & = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i r_i x_1^{r_1} \dots x_i^{r_i-1} \dots x_m^{r_m} \frac{\partial}{\partial x_j} - \lambda_j x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m} \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ & = \left( \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i \right) - \lambda_j \right) x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m} \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Widać więc, że wszystkie jednomiany  $x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m} \frac{\partial}{\partial x_j}$  są wektorami własnymi  $L_A^r: J^r \rightarrow J^r$ . Wartościami własnymi są

$$\left( \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i \right) - \lambda_j, \quad r_1, \dots, r_m \geq 0, \quad \sum r_i = r.$$

**Definicja 10.7.** Układ wartości własnych  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , parami różnych, nazywamy **rezonansowym**, jeśli istnieją liczby całkowite

$$r_1, \dots, r_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m r_i \geq 2,$$

taki, że

$$\sum r_i \lambda_i = \lambda_j \tag{10.11}$$

dla pewnej liczby  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Równanie (10.11) nazywamy **rezonansem**.

Z twierdzenia (10.5) wynikają następujące twierdzenia:

**Twierdzenie 10.8.** (Poincare) *Jeśli wartości własne macierzy  $A$  nie są układem rezonansowym, to równanie*

$$\dot{y} = Ay + k(y) + o(|y|^r),$$

gdzie  $k(y) \in J^2 \oplus \dots \oplus J^r$ , zamianą zmiennych klasy  $C^r$  można zamienić na równanie  $\dot{x} = Ax + o(|x|^r)$ . Jeżeli  $\dot{y} = Ay + k(y)$ , gdzie  $k$  to szereg, to formalną zamianą zmiennych można uzyskać

$$\dot{x} = Ax.$$

**Twierdzenie 10.9.** (*Poincare-Dulac*) *Równanie*

$$\dot{y} = Ay + k(y) + o(|y|^r),$$

można zamianą zmiennych klasy  $C^r$  sprowadzić do równania

$$\dot{x} = Ay + h(y) + o(|y|^r), \text{ gdzie}$$

$$h = \sum_{s=2}^r h_s, \quad h_s = (h_{s,1}, \dots, h_{s,m}),$$

$$h_{s,j} = \sum_{s_1, \dots, s_m \geq 0, \sum s_i = s} a_{s_1 \dots s_m} x_1^{s_1} \dots x_m^{s_m},$$

ostatnia suma po układach  $s_j$  dających rezonans

$$\sum_{i=1}^m s_i \lambda_i = \lambda_j$$

*Dowód.* Dla  $r$  skończonych, jak i wariacie formalnych zmian zmiennych twierdzenia 2, 3 wynikają natychmiast z Tw. (10.5). Dla  $r = \infty$  należy skorzystać z Tw. Borela, o tym, że każdy ciąg liczb można zrealizować jako ciąg pochodnych w 0 funkcji klasy  $C^\infty$ . ( $o(|x|^r)$  dla  $r = \infty$  oznacza funkcję “płaską” to znaczy jej wszystkie pochodne w 0 są równe 0. Równoważna definicja jest podana w **Konkluzji**).

Należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że dla nierzeczywistych wartości własnych  $A$ , występują one parami  $\lambda, \bar{\lambda}$ . Wtedy przestrzenie  $\text{Im } L_A^s$  mają parami sprzężone wektory bazy i to samo dotyczy uzupełniających wektorów bazy  $B^s$ . Zatem zmiany współrzędnych i  $h(x)$  można uzyskać **rzeczywiste**.  $\square$

**Definicja 10.10.** Hiperpłaszczyznę w  $\mathbb{C}^m = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)\}$  określoną przez równanie

$$\sum_{i=1}^m r_i \lambda_i = \lambda_j, \quad \sum r_i \geq 2, \quad r_i \geq 0, \quad r_i \in \mathbb{Z}$$

nazywamy **hiperpłaszczyzną rezonansową** (porównaj (10.11))

Takich płaszczyzn jest nieskończenie (przeliczalnie) wiele.

**Definicja 10.11.** Układ  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$  należy do **obszaru Poincare’go**  $P \subset \mathbb{C}^m$  jeśli wypuklenie  $\text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  w  $\mathbb{C}$ , nie zawiera  $0 \in \mathbb{C}$ .

**Definicja 10.12.**  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$  należy do **obszaru Siegela**  $S \subset \mathbb{C}^m$  jeśli  $\text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \ni 0$  w  $\mathbb{C}$ .

**Twierdzenie 10.13.** 1. *Każdy punkt obszaru Poincare’go leży najwyżej w skończonej liczbie hiperpłaszczyzn rezonansowych i ma otoczenie nie przecinające się z innymi hiperpłaszczyznami rezonansowymi.*

2. *Każdy punkt obszaru Siegela jest punktem skupienia ciągu różnych płaszczyzn rezonansowych.*

*Dowód.* 1. Jeśli istnieje ciąg  $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k)$  i ciąg układów  $(r_1^k, \dots, r_m^k)$ ,  $k = 1, \dots, \sum_{i=1}^m r_i^k \lambda_i^k = \lambda_j^k$ ,  $\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i$ , to

$$\sum_{i=1}^m \frac{r_i^k}{\sum_{j=1}^m r_j^k} \lambda_i^k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0,$$

bo  $\sum r_i^k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ . Wybierając podciągi zbieżne

$$s_i^{k_n} = \frac{r_i^{k_n}}{\sum_{i=1}^m r_i^{k_n}} \rightarrow s_i,$$

mamy

$$\sum_{i=1}^m s_i \lambda_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad \sum s_i = 1,$$

więc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  należy do obszaru Siegela, więc nie Poincare.

2. Jeśli istnieją  $s_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m s_i = 1$  takie, że  $\sum_{i=1}^m s_i \lambda_i = 0$ , to można przybliżyć  $s_i$  nieujemnymi liczbami wymiernymi

$$\frac{p_i^k}{q^k} \rightarrow s_i, \quad q^k \rightarrow \infty, \quad p_i^k, q^k \text{ całkowite.}$$

Wybermy  $j$  takie, że  $s_j \geq \frac{1}{m}$ , i założmy też, że

$$\frac{p_j^{k_1}}{p_j^{k_2} - 1} \neq \frac{p_{j'}^{k_1}}{p_{j'}^{k_2}}$$

$\forall k_1 \neq k_2$  i dla pewnego  $j' \neq j$ . Wtedy istnieją  $\lambda_j^k \rightarrow \lambda_j$  takie, że

$$\sum_{i=1}^m \frac{p_i^k}{q^k} \lambda_i^k = \frac{\lambda_j^k}{q^k}, \quad (10.12)$$

gdzie  $\lambda_i^k = \lambda_i$  dla  $i \neq j$  (trzeba wziąć

$$\frac{p_j^k - 1}{q^k} \lambda_j^k = s_k \lambda_j$$

). Zatem

$$\sum_{i=1}^m p_i^k \lambda_i^k = \lambda_j^k$$

i dzięki (10.12) to są hiperpłaszczyzny parami różne. □

Podam teraz twierdzenie dotyczące analitycznej linearyzacji (zbieżność formalnej zamiany zmiennych w Tw.10.8), bez dowodów.

**Twierdzenie 10.14.** (*Poincare*)

Jeśli wartości własne części liniowej pola analitycznego w  $\mathbb{R}^m$

$$\dot{x} = Ax + k(x)$$

( $k$  to nieliniowa część analityczna. Można ogólnie przyjąć, że  $A$  to macierz zespolona,  $k$  holomorficzne w  $\mathbb{C}^n$ ) należą do obszaru Poincare i są nierezonansowe, to istnieje linearyzacja analityczna w otoczeniu 0.

**Twierdzenie 10.15.** (Siegel)

Jeśli wartości własne części liniowej spełniają nierówność diofantyczną

$$\left| \lambda_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i \right| \geq \frac{c}{(\sum r_i)^\nu}$$

dla pewnych stałych  $C > 0$ ,  $\nu \geq 2$  i każdych  $r_1, \dots, r_m \geq 0$ , całkowitych,  $\sum_{i=1}^m r_i \geq 2$ , to istnieje linearyzacja analityczna w otoczeniu 0.

O pozbywaniu się części  $o(|x|)$  w Tw. 10.8 mówi następujące

**Twierdzenie 10.16.**  $\forall n \exists N(n)$  takie, że jeśli wartości własne macierzy rzeczywistej  $A$  nie są układem rezonansowym do rzędu  $N$ , to znaczy

$$\sum_{i=1}^m r_i \lambda_i - \lambda_j \neq 0, \quad \forall j, r_i \geq 0, 2 \leq \sum r_i \leq N,$$

to dowolne równanie różniczkowe

$$\dot{x} = Ax + k(x), \quad \text{gdzie } k(0) = Dk(0) = 0$$

i  $k$  jest klasy  $C^N$  można **zlinearyzować** dyfeomorfizmem klasy  $C^n$ , to znaczy otrzymać po zamianie zmiennych takim dyfeomorfizmem równanie

$$\dot{x} = Ax.$$

*Uwaga 10.17.* Jeśli istnieje wartość własna  $\lambda$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , to istnieje rezonans. Faktycznie, jeśli  $\lambda = 0$ , to  $2\lambda = \lambda$ . Jeśli  $\lambda \neq 0$ , to także  $\bar{\lambda}$  jest wartością własną, więc  $2\lambda + \bar{\lambda} = \lambda$ .

Zatem dla  $\dot{x} = Ax + \dots$ , jeśli wartości własne są nierezonansowe, to 0 jest **punktem hiperbolicznym** tego równania różniczkowego.

*Przykład 10.18.* Dla **siodła** układ wartości własnych jest w obszarze Siegela, bo jeśli  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , to  $0 \in \operatorname{Conv}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Dla **źródła** lub **ścieku** układ wartości własnych jest w obszarze Poincar'ego, bo

$$\forall i \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \Rightarrow \operatorname{Conv}(\lambda_i) \subset \operatorname{Re} z < 0, \text{ więc } 0 \notin \operatorname{Conv}(\lambda_i).$$

$$\forall i \operatorname{Re} \lambda_i > 0 \Rightarrow \operatorname{Conv}(\lambda_i) \subset \operatorname{Re} z > 0, \text{ więc } 0 \notin \operatorname{Conv}(\lambda_i).$$

W  $\mathbb{R}^2$  dla **ogniska** nie ma też rezonansów.

Dla **węzła** może być rezonans, na przykład  $\lambda_1 = n\lambda_2$ .





# Wykład 11

## Metoda uśredniania

Arnold "Teoria równań różniczkowych" r. 16. Ta metoda służy do badania równań różniczkowych na rozmaitości  $M$  będącej lokalnie iloczynem kartezjańskim **bazy**  $B$ , **włókna**  $N$ ,  $M = B \times N$ , włókno jest często torusem (w szczególności okręgiem). Szybki ruch odbywa się w kierunku  $N$ , powolny w kierunku  $B$ .

Oznaczmy współrzędne punktu przez  $(\phi, I)$ ,  $\phi \in N$ ,  $I \in B$ .

**Definicja 11.1. Równanie niezaburzone**

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \omega(I) \\ \dot{I} &= 0\end{aligned}\tag{11.1}$$

$N$  jest torusem  $\mathbb{T}^n$ ,  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  to współrzędne kątowe, na każdym torusie  $\{I = \text{const}\}$  pole jest stałe,  $\omega(I) = (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I))$  nazywa się wektorem częstości.

**Definicja 11.2. Równanie zaburzone**

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \omega(I) + \epsilon f(I, \phi, \epsilon) \\ \dot{I} &= \epsilon g(I, \phi, \epsilon)\end{aligned}\tag{11.2}$$

$f, g$  mają ten sam okres  $2\pi$  względem  $\phi$ .

**Definicja 11.3. Równanie uśrednione**

$$\dot{J} = \epsilon G(J),\tag{11.3}$$

gdzie

$$G(J) = \frac{\int g(J, \phi, \epsilon) d\phi}{\int d\phi},$$

(na  $\mathbb{T}^n$   $\int d\phi = (2\pi)^n$ ) to średnia wartość  $g$  na włóknie.

*Przykład 11.4.* Równanie zaburzone:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \omega \\ \dot{I} &= \epsilon(a + b \cos \phi).\end{aligned}$$

Równanie uśrednione ma wtedy postać

$$\dot{J} = \epsilon a, \text{ bo } \int_0^{2\pi} (a + b \cos \phi) d\phi = 2\pi a.$$

Porównajmy rozwiązania obu równań:

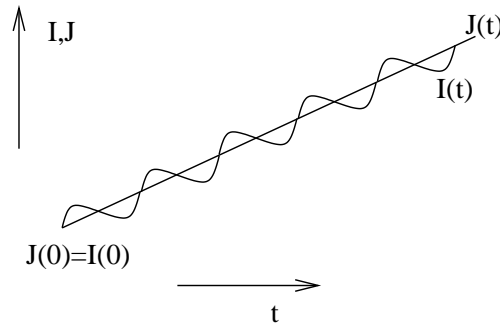
- dla równania zaburzonego, przyjmując  $t_0 = 0, \phi(0) = 0$

$$I(t) = I(0) + \epsilon at + \epsilon b \frac{\sin \omega t}{\omega},$$

- dla równania uśrednionego

$$J(t) = J(0) + \epsilon at.$$

Oba rozwiązania różnią się tylko małym składnikiem oscylującym, oto ich wykresy:



Rysunek 11.1:

*Uwaga 11.5.* Rozpatrzmy w ogólnej sytuacji odcinek czasu  $T$ , duży w porównaniu z 1, ale dużo mniejszy niż  $\frac{1}{\epsilon}$ . W tym czasie przemieszczenie trajektorii równania zaburzonego w kierunku bazy  $B$  (zmiana  $I(t)$ ) jest rzędu  $\epsilon T \ll 1$ . W przybliżeniu możemy więc zamiast  $\epsilon g(I, \phi, \epsilon)$  rozważać  $\epsilon g(I, \phi, 0)$ . Podobnie  $\phi$  możemy uznać za zmieniające się zgodnie z równaniem niezaburzonym. Wtedy dla przemieszczenia po czasie  $T$  w kierunku  $B$  otrzymujemy

$$\Delta I = \epsilon T \left( \frac{1}{T} \int_0^T g(I, \phi(t), 0) dt \right) + o(\epsilon T)$$

*Ćwiczenie 11.6.* Udowodnić to dokładnie.

W przypadku kiedy włókno jest torusem, a trajektorie  $\dot{\phi} = \omega(I)$  są w nim gęste (liczby  $\omega_1, \dots, \omega_n, 1$  są niezależne nad ciałem liczb wymiernych, ćwiczenia) mamy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(I, \phi(t), 0) dt = \frac{\int g(I, \phi, 0) d\phi}{\int d\phi} = G(I),$$

czyli granica średnich funkcji  $g$  po każdej trajektorii jest równa średniej  $g$  po przestrzeni. Taka własność nazywa się **ściśle ergodyczność**.

Widać że ta równość średnich (przynajmniej dla prawie każdej trajektorii równania niezaburzonego w kierunku  $\phi$ , nazywa się to ergodyczność potoku  $\dot{\phi}$ , włókno nie musi być torusem, należy ustalić miarę  $\mu$  na włóknie, niezmienniczą dla  $\phi^t$  i całkować  $\int g(I, \phi, 0) d\mu(\phi)$ ) jest kluczowa dla poprawności metody przybliżania rozwiązań równania zaburzonego rozwiązaniami równania uśrednionego.

Oto konkretne twierdzenie w szczególnej, łatwej sytuacji:

**Twierdzenie 11.7.** *Jeśli włóknom jest okrąg i  $\omega(I) \neq 0$ , to dla dowolnej stałej  $C_1 > 0$  istnieje  $C_2 > 0$ , takie że jeśli dla  $J_0 \in B$  rozwiązanie równania uśrednionego  $J(t), J(0) = J_0$ ,*

pozostaje w  $B$  dla  $0 \leq t \leq \frac{C_1}{\epsilon}$ , to dla rozwiązania  $I(t)$  równania zaburzonego  $I(0) = J(0) = J_0$  mamy

$$|I(t) - J(t)| \leq C_2 \epsilon$$

dla każdego  $\epsilon$  dostatecznie małego.

Dowodu nie podaje. Można go znaleźć w książce: Arnold "Teoria Równań Różniczkowych", str 138-139. Proszę zauważyć, że w poprzednich rozważaniach było  $t \ll \frac{1}{\epsilon}$ . Dokładniejsze twierdzenie zawierające również poniższe Tw. 11.8, można znaleźć w książce J. Guckenheimer, P. Holmes "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields", Th. 4.1.1.

**Twierdzenie 11.8.** Załóżmy, jak wyżej, że włoknem jest  $S^1$ , a baza jest także 1-wymiarowa,  $B \subset \mathbb{R}^1$ . Załóżmy, że  $G(I_0) = 0$  i  $\frac{\partial}{\partial I} G(I_0) \neq 0$ . Wtedy istnieje otoczenie  $U$  włokna  $I = I_0$  takie, że dla każdego  $\epsilon$  dostatecznie małego istnieje dla równania zaburzonego (11.2) dokładnie jedna orbita okresowa w  $U$ .

*Dowód.* Istnienie orbity okresowej jest łatwym wnioskiem z Tw. 11.7. Wybierzmy  $a > 0$  takie, że  $\frac{\partial}{\partial I} G \geq C_3 > 0$  (lub  $\leq -C_3$ ) dla pewnej stałej  $C_3 > 0$ . Przyjmijmy dalej  $I_0 = 0$ . Wtedy dla pewnej stałej  $a_1$ :  $\frac{1}{2}a < a_1 < a$  i dla wszystkich dostatecznie małych  $\epsilon$  mamy

$$J(0) = \frac{a}{2} \Rightarrow J\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \in (a_1, a)$$

$$\text{i } J(0) = -\frac{a}{2} \Rightarrow J\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \in (-a, -a_1).$$

Z Tw. 11.7 wynika więc, że dla rozwiązań równania zaburzonego

$$I(0) = \frac{a}{2} \text{ i } I(0) = -\frac{a}{2},$$

$$I\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \geq a_1 - c_2 \epsilon > \frac{a}{2} \text{ i odpowiednio } I\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \leq -a_1 + c_2 \epsilon < \frac{a}{2}.$$

To samo uzyskamy gdy zamiast czasu  $\frac{1}{\epsilon}$  rozważymy dowolny, rzędu  $\frac{1}{\epsilon}$  czas powrotu do  $B$ . Jeżeli  $\Phi_\epsilon$  to przekształcenie pierwszego powrotu dla równania zaburzonego, to dla  $T \sim \frac{1}{\epsilon}$  mamy

$$\Phi^T\left(\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]\right) \supset \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right],$$

więc dla  $\Phi_\epsilon^T$  istnieje w  $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$  punkt stały. Z twierdzenia Jordana wynika, że istnieje orbita okresowa, z okresem równym czasowi pierwszego powrotu. Nie widać jednak, jak opierając się tylko na Tw.11.7 udowodnić, że taka orbita jest tylko jedna. Podam więc inny bezpośredni dowód Tw.11.8. Zamiast długiego czasu będę rozpatrywał pierwszy czas powrotu, ale skalę w  $B$  zmieniał czynnikiem  $\frac{1}{\epsilon}$ .

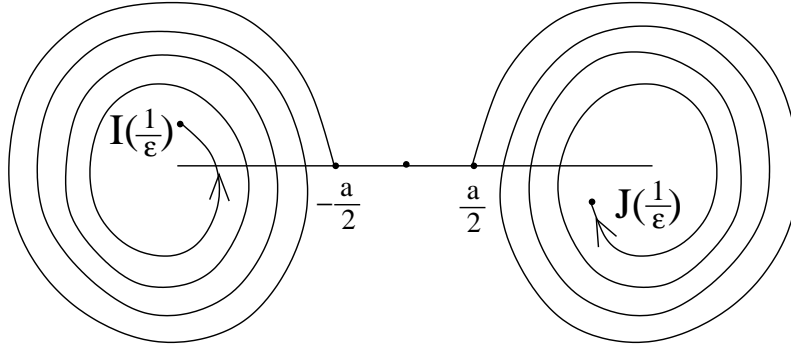
Najpierw pomnóżmy pole zaburzonego równania przez funkcję  $\frac{\omega}{\omega + \epsilon f}$ . Wtedy otrzymujemy równania

$$\dot{\phi} = (\omega + \epsilon f) \frac{\omega}{\omega + \epsilon f} = \omega \tag{11.4}$$

$$\text{i } \dot{I} = \epsilon g(I, \phi, \epsilon) \cdot \frac{\omega}{\omega + \epsilon f(I, \phi, \epsilon)} =$$

$$\epsilon g(I, \phi, \epsilon) + \epsilon^2 g_1(I, \phi, \epsilon) := h(I, \phi, \epsilon)$$

dla pewnej funkcji  $g_1$  o okresie  $2\pi$  ze względu na  $\phi$ . Można to równanie traktować jako nieautonomiczne równanie różniczkowe, dla 1-wymiarowej zmiennej  $I$ . Oznaczmy przez  $\Psi_\epsilon^t =$



Rysunek 11.2:

$(T_\epsilon^t, \omega t)$  potok dyfeomorfizmów (zmiennych  $I, \phi$ ) dla (11.4), a przez  $\Phi_\epsilon = I_\epsilon^{\frac{2\pi}{\omega}}$  przekształcenie pierwszego powrotu do  $B$ .

Liczmy dla każdego  $I$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_\epsilon}{d\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\Phi_\epsilon(I) - I) = \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\epsilon g(I_\epsilon^s, \omega s, \epsilon) + \epsilon^2 g_1(I_\epsilon^s, \omega s, \epsilon)] ds &= \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} g(I, \omega s, 0) ds, & \end{aligned}$$

$$\text{bo } |I_\epsilon^s - I| \leq \text{Const} \cdot \epsilon \text{ dla } 0 \leq s \leq \frac{2\pi}{\omega}.$$

Zbieżność jest jednostajna ze względu na  $I$ .

Otrzymujemy w końcu zamieniając zmienne  $\phi = \omega s$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\Phi_\epsilon(I) - I) = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} g(I, \phi) d\phi = \frac{2\pi}{\omega} G(I).$$

Stąd wynika istnienie punktu stałego dla  $\Phi_\epsilon(I)$  (zera dla  $\frac{1}{\epsilon}(\Phi_\epsilon(I) - I)$ ), blisko zera  $G$ .

Dla pokazania, że jest to jedyne zero trzeba zbadać równanie w wariacjach wzdłuż trajektorii równania (11.4).

Mamy oznaczając pochodne w kierunkach  $x, I$  przez  $D_x, D_I$  i używając oznaczenia  $h$  z (11.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} D_I(I_\epsilon^t)(I, 0) = D_x(h)(I_\epsilon^t(I, 0), t\omega, \epsilon) \cdot D_I(I_\epsilon^t)(I, 0),$$

a w postaci całkowej

$$D_I(I_\epsilon^t)(I, 0) = I dt \int_0^t (D_x h)(I_\epsilon^s(I, 0), s\omega, \epsilon) ds.$$

Ustalmy  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ , czas pierwszego powrotu. Rozpisując  $h$  według definicji w 11.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D_I \Phi_\epsilon(I) - 1}{\epsilon} &= \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\epsilon D_x g(I_\epsilon^s(I, 0), s\omega, \epsilon) + \epsilon^2 D_x g_1(I_\epsilon^s(I, 0), s\omega, \epsilon)] ds - 1}{\epsilon} &= \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} D_x g(I, s\omega, 0) ds = \frac{2\pi}{\omega} D_I G(I).$$

Ponieważ zbieżność jest jednostajna dla funkcji zmiennej  $I$  mamy na odcinku, gdzie  $D_I G \neq 0$  (oddzielone od zera stałą  $C_3$ ), dla  $\epsilon$  dostatecznie małych

$$D_I \Phi_\epsilon(I) \neq 1.$$

$\Phi_\epsilon$  jest więc na tym odcinku rozciąganiem, lub kontrakcją, ma więc co najwyżej jeden punkt stały.  $\square$

*Uwaga 11.9.* Prostszy dowód można znaleźć w książce A. Palczewski "Równania Różniczkowe Zwyczajne" str. 308-309.

*Przykład 11.10. Równanie Van der Pola*

$$\ddot{x} = -x + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} \tag{11.5}$$

zapisane w postaci układu równań rzędu 1

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \epsilon(1 - x^2)y \end{aligned}$$

we współrzędnych  $I = \frac{x^2+y^2}{2}$ ,  $\phi$  kąt ( $x = \sqrt{2I}\cos\phi$ ,  $y = \sqrt{2I}\sin\phi$ ) ma postać

$$\begin{aligned} \dot{I} &= x\dot{x} + y\dot{y} = \dot{x}(x - x + \epsilon(1 - x^2)y) = \\ &= \dot{x}^2 \epsilon(1 - x^2) = 2\epsilon I \sin^2 \phi(1 - 2I \cos^2 \phi) \\ \dot{\phi} &= \dots \text{ (konkretny wzór nie jest nam potrzebny)} \end{aligned}$$

Równanie niezaburzone ma postać ( $\epsilon = 0$ )  $\ddot{x} = -x$ , czyli

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0 \\ \dot{\phi} &= -1 \end{aligned}$$

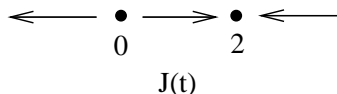
Dla równania uśrednionego  $\dot{J} = G(J)$  liczymy

$$G(J) = \frac{1}{2\pi} \int 2J \sin^2 \phi(1 - 2J \cos^2 \phi) d\phi = J - \frac{1}{2}J^2,$$

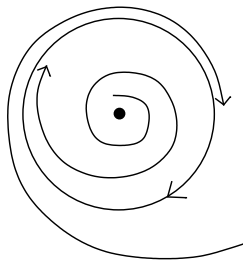
więc równanie uśrednione ma postać

$$\dot{J} = \epsilon(J - \frac{1}{2}J^2).$$

Prawa strona ma zera w  $J = 0$  i  $J = 2$ , to wówczas są punkty stałe (stany równowagi) równania uśrednionego,  $0$  jest niestabilny (źródło), bo  $\frac{d}{dJ}(J - \frac{1}{2}J^2)|_{J=0} > 0$ ,  $2$  jest stabilny (ściek), bo  $\frac{d}{dJ}(J - \frac{1}{2}J^2)|_{J=2} = -1 < 0$ . Mamy  $\frac{d}{dJ}(J - \frac{1}{2}J^2) = 1 - J < 0$  dla  $J > 1$ , więc na mocy poprzedniego Tw. 11.8 w obszarze  $I \geq 1 + a$  (albo dla ustalonego  $a > 0$ ,  $a \approx 0$ ) dla  $\epsilon$  dostatecznie małych równanie zaburzone ma dokładnie jedną orbitę okresową, przyciągającą. Dla  $J < 1$  mamy  $\frac{d}{dJ}(J - \frac{1}{2}J^2) > 0$  więc znów na mocy Tw. 11.8 w obszarze  $-a \leq I \leq a$ ,  $0 < a < 1$ , równanie zaburzone ma dokładnie jedną orbitę okresową, odpychającą. Ale  $I = 0$  jest taką orbitą. We współrzędnych  $x, y$  to jest punkt  $x = y = 0$ .



Rysunek 11.3:



Rysunek 11.4:

Między  $a$  i  $1 + a$  orbity równania uśrednionego idą do obszaru  $I > 1 + a$ . To samo z Tw.11.7 znajdzie też dla równań zaburzonych.

### Konkluzja

0 jest źródłem, ogniskiem, dla każdej orbity zbiór  $\omega$ -graniczny to orbita zamknięta blisko  $I = 2$ , okręgu o promieniu 2.

*Przykład 11.11.* Czasem **równaniem Van der Pola** nazywa się równanie

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + (\epsilon - x^2)\dot{x} \quad (11.6)$$

(E. Ott “Chaos in Dynamical Systems”, str 12)

Jeśli zmienimy zmienne:  $y = \frac{x}{\sqrt{\epsilon}}$  dla  $\epsilon > 0$ , to otrzymamy

$$\sqrt{\epsilon}\ddot{y} = -\omega^2\sqrt{\epsilon}y + (\epsilon - \epsilon y^2)\sqrt{\epsilon}\dot{y},$$

czyli

$$\ddot{y} = -\omega^2 y + \epsilon(1 - y^2)\dot{y},$$

a to jest równanie (??) (tam  $\omega = 1$ , ale można było z dowolną  $\omega \neq 0$ ).

Zatem dla  $\epsilon > 0$  istnieje dokładnie jedna orbita okresowa dla (11.6), przyciągająca, blisko okręgowi o środku 0 i promieniu  $\sqrt{\epsilon}$ . Ponieważ część liniowa (11.6) ma macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \epsilon \end{pmatrix}$$

(jako układ 2 równań rzędu 1) mamy iloczyn wartości własnych

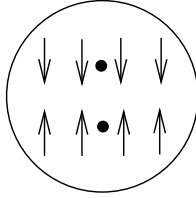
$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 = \omega^2 \quad \text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 = \epsilon,$$

dla, małych  $|\epsilon|$   $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$  są nierzeczywiste. Dla  $\epsilon > 0$  leżą w prawej półpłaszczyźnie, więc 0 jest źródłem.

Ponieważ część nieliniowa  $-x^2\dot{x}$  jest skierowana do wnętrza dysków o środku 0 (oprócz 4 punktów), dla  $\epsilon = 0$  punkt 0 przyciąga wszystkie punkty z  $\mathbb{R}^2$ . Tym bardziej przyciąga dla  $\epsilon < 0$ , gdzie decyduje część liniowa, a część nieliniowa pomaga.

Mamy więc następujące zjawisko: Dla  $\epsilon \leq 0$  punkt 0 przyciąga  $\mathbb{R}^2$ , dla  $\epsilon > 0$  punkt 0 odpycha i oddziela się od niego przyciągająca orbita okresowa.

1-parametrowa rodzina równań różniczkowych w otoczeniu  $0 \in \mathbb{R}^2$ , gdzie tak zmienia się obraz fazowy równania, nazywa się **bifurkacją Hopfa**.



Rysunek 11.5:

*Uwaga 11.12.* Zastosowana metoda szukania orbit okresowych jest standardowa dla równań różniczkowych z parametrem. Przypomnijmy kolejne kroki postępowania z (11.6), które w ogólnej sytuacji wyglądają następująco

1. Zmieniamy współrzędne, zależnie od parametru, tak żeby nowa rodzina miała postać układu hamiltonowskiego  $+\epsilon$ (jakiś pole), to znaczy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon f_2(x, y). \end{cases} \quad (11.7)$$

2. W obszarze niezmienniczym dla części hamiltonowskiej (11.7), to znaczy  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$ ,  $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ , gdzie  $H$  nie ma punktów krytycznych, mamy wszystkie orbity okresowe:  $H = \text{Const}$ . Liczymy dla uzyskania równania uśrednionego

$$G(I) = \int_{\{H=I\}} \frac{dH(f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y})dt}{\text{okres}(I)}, \quad (11.8)$$

gdzie  $t$  to parametryzacja krzywej  $\{H = I\}$  czasem dla rozwiązania równania hamiltonowskiego będącego tą krzywą.

$G(I)$  często, dla pól wielomianowych, wyraża się za pomocą całek eliptycznych, trzeba umieć znajdować ich zera i dowodzić, że są niezdegenerowane, to znaczy  $\frac{\partial}{\partial I}G(I_0) \neq 0$  dla  $G(I_0) = 0$ . Wtedy z Tw. (11.8) otrzymujemy informację o orbitach okresowych dla równań zaburzonych (11.7). Jeśli zera są wielokrotne, to trzeba mieć twierdzenie subtelniejsze od Tw. (11.8).

Liczenie zer pojawiających się całek eliptycznych stanowi obszerną teorię. Przykład (2) był wyjątkowo prosty. Specjalistą w Warszawie w tej dziedzinie jest prof. H. Żołądek.

W przykładzie (3) para wartości własnych części liniowej przechodzi przez oś urojoną, gdy  $\epsilon$  przechodzi przez 0. Zobaczmy jakie zjawiska towarzyszą temu w sytuacji bardziej ogólnej. Najpierw taką rodzinę sprowadzimy zamianą zmiennych do postaci normalnej upraszczając część nieliniową (patrz wykład 10).

Założmy, że mamy dla części liniowej parę sprzężonych, nierzeczywistych wartości własnych  $\lambda_1(\epsilon) = \overline{\lambda_2(\epsilon)}$ . Jeśli  $\text{Re } \lambda_i(\epsilon) = 0$  to mamy rezonanse

$$n\lambda_1 + (n+1)\lambda_2 = \lambda_2$$

$$\text{i } (n+1)\lambda_1 + n\lambda_2 = \lambda_1$$

dla  $n \geq 1$ .

Zatem we współrzędnych w  $\mathbb{C}^2$ , takich, że wektory bazowe to wektory własne odpowiadające  $\lambda_{1,2}$  postać normalna ma wygląd:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1(\epsilon)z_1 + a_1(\epsilon)z_1^2z_2 + a_2(\epsilon)z_1^3z_2^2 + \dots \\ \dot{z}_2 = \lambda_2(\epsilon)z_2 + b_1(\epsilon)z_1z_2^2 + b_2(\epsilon)z_1^2z_2^3 + \dots \end{cases}$$

Łatwo policzyć, że punktom w  $\mathbb{R}^2$  odpowiadają w tych współrzędnych pary  $z_1 = \bar{z}_2$ , to znaczy punktowi o współrzędnych  $x, y$  w standardowej bazie w  $\mathbb{R}^2$  odpowiadają współrzędne  $z_1 = x + ky, z_2 = x - ky$  w nowej bazie, dla pewnej liczby rzeczywistej  $k$ .

Wystarczy więc rozpatrywać jedno z dwóch równań (11.8), które daje dwa równania: na część rzeczywistą i urojoną. Dla  $z_1 = z$  można więc napisać

$$\dot{z} = \lambda(\epsilon)z + a_1(\epsilon)z|z|^2 + a_2(\epsilon)z|z|^4 + \dots \quad (11.9)$$

Zbadajmy następujące uproszczone równanie:

$$\dot{z} = \lambda(\epsilon)z + a(\epsilon)z|z|^2. \quad (11.10)$$

We współrzędnych  $I = |z|^2$ ,  $\phi$  daje ono:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \text{Im } \lambda(\epsilon) + (\text{Im } a(\epsilon)) \cdot I \\ \dot{I} &= (\text{Re } \lambda(\epsilon) + I \text{Re } a(\epsilon)) \cdot 2I. \end{aligned} \quad (11.11)$$

W drugim równaniu nie ma  $\phi$ . (Można je łatwo uzyskać z obu równań (11.8) i  $I = (z\bar{z}) = \dots$ ).

Zera funkcji (pola) z prawej strony (11.11) to  $I = 0$  i

$$I = \frac{\text{Re } \lambda(\epsilon)}{\text{Re } a(\epsilon)}. \quad (11.12)$$

Stąd wynika, że jeśli  $\text{Re } a(0) > 0$ , to dla  $\text{Re } \lambda(\epsilon) < 0$  istnieje odpychająca orbita okresowa, 0 przyciąga; dla  $\text{Re } \lambda(\epsilon)$  nie ma tej orbity, 0 odpycha. Jeśli  $\text{Re } a(0) < 0$ , to odwrotnie, dla  $\text{Re } \lambda(\epsilon) < 0$ , 0 przyciąga  $\mathbb{R}^2$ ; dla  $\text{Re } \lambda(\epsilon) > 0$ , 0 odpycha, istnieje orbita przyciągająca (porównaj sytuację  $\epsilon > 0$  w Przykładzie (3)).

Nieuproszczone równanie (11.9) daje zamiast (11.11), równanie

$$\dot{I} = 2I(\text{Re } \lambda(\epsilon) + I \text{Re } a(\epsilon)) + O(I^2),$$

gdzie, jeśli zlikwidowaliśmy w wyjściowym układzie części nierezonansowe do stopnia 3,  $O(I^2)$  to funkcja zależna od  $I$  i  $\phi$ .

Przy  $\text{Re } a(0) \neq 0$ , więc  $\text{Re } a(\epsilon) \neq 0$  dla  $\epsilon \sim 0$ , ta część nie ma wpływu na obraz fazowy blisko  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

Założmy teraz konkretnie, że  $\text{Re } \lambda(0) = 0$  i

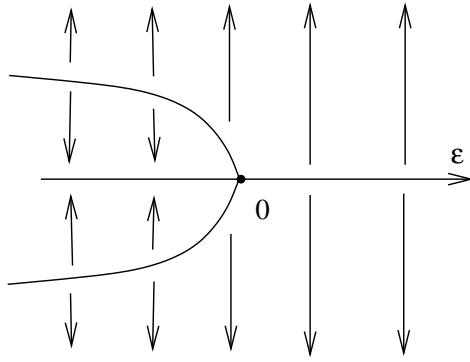
$$\left. \frac{d \text{Re } \lambda(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} > 0.$$

Wtedy

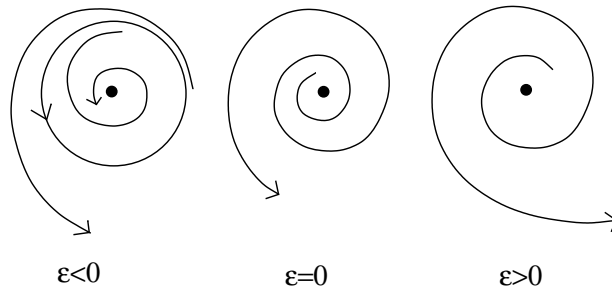
1. Przy  $\text{Re } a(0) > 0$  mamy tak zwaną **ostrą utratę stabilności** w 0.
2. Przy  $\text{Re } a(0) < 0$  mamy tak zwaną **miękką utratę stabilności** w 0. Otrzymujemy **bifurkację Hopfa** jak w przykładzie (3).

**Definicja 11.13.** Ustalmy równanie różniczkowe  $\dot{x} = V(x)$  (inaczej mówiąc: pole wektorowe  $V(x)$ ),  $x, V \in \mathbb{R}^2$  w otoczeniu  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Rodzina  $n$ -parametrowa równań różniczkowych  $\dot{x} = V(x, \epsilon)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$  nazywa się **wersalna** (lub **wersalną deformacją**  $V$ ) jeśli jest zdefiniowana na pewnym otoczeniu  $(0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ,  $V \in T\mathbb{R}^m$ ,  $V(\cdot, 0) = V(\cdot)$  i jeśli dla każdej innej takiej  $n'$ -parametrowej rodziny  $W(x, \delta)$  istnieje ciągle przekształcenie  $\mu$  otoczenia  $0 \in \mathbb{R}^{n'}$  w  $\mathbb{R}^n$  takie, że  $\mu(0) = 0$  i istnieje ciągła funkcja  $h: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h(0, 0) = 0$ , gdzie  $U$  to pewne otoczenie  $0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $V$  otoczenie  $0 \in \mathbb{R}^{n'}$ , taka, że  $\forall \delta \in V$   $h(\cdot, \delta)$  jest homeomorfizmem i przeprowadza trajektorie pola  $W(\cdot, \delta)$  w trajektorie pola  $V(\cdot, \mu(\delta))$ .

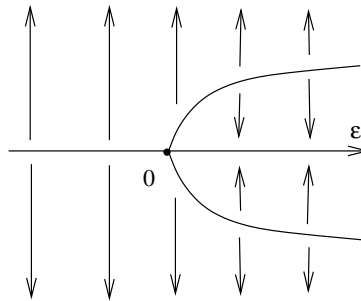




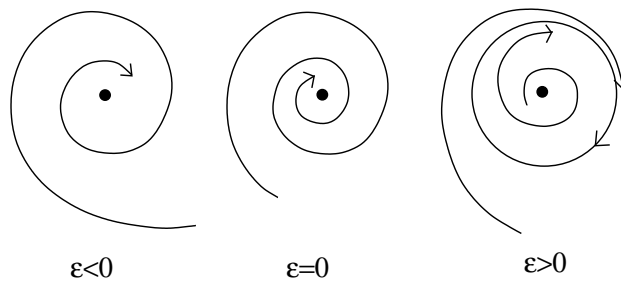
Rysunek 11.6:



Rysunek 11.7:



Rysunek 11.8:



Rysunek 11.9:

*Uwaga 11.14.* Nie zakładamy, że  $h(0, \delta) = 0$ .

Zamiast deformacji pola  $V$  możemy dyskutować **wersalne deformacje pól** ze zbioru  $\mathcal{V}$ . Wtedy zamiast  $V(\cdot, 0) = W(\cdot, 0) = V$  zakładamy  $V(\cdot, 0), W(\cdot, 0) \in \mathcal{V}$ .

Czasem zamiast każdej rodziny  $W$ , rozważamy tylko “typowe” rodziny (podany jest wtedy warunek). Żądamy wtedy, żeby  $\mu$  było  $1 - 1$ . Mówimy wtedy, że  $V(x, \epsilon)$  jest  $1 - 1$ -wersalna.

*Uwaga 11.15.* Wersalność  $V(x, \epsilon)$  oznacza w szczególności, że obrazy fazowe wszystkich pól bliskich  $V$ , blisko  $0 \in \mathbb{R}^m$ , można zobaczyć już w rodzinie  $V(x, \epsilon)$ .

*Uwaga 11.16.* Wszystkie rozważana wyżej obiekty są zdefiniowane tylko w pewnych otoczeniach  $0 \in \mathbb{R}^m$ , lub  $(0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Można więc te definicje przepisać w języku kielków tych funkcji w  $0$ .

**Kielék funkcji**  $(\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow \mathbb{R}^l$  to klasa równoważności dla relacji

$$f \sim g \text{ jeśli istnieje otoczenie } 0, \text{ w którym } f = g.$$

Dla **bifurkacji Hopfa** otrzymujemy następujące

**Twierdzenie 11.17.** *Jeśli  $\mathcal{V}$  to pole zdefiniowane w otoczeniu  $0 \in \mathbb{R}^2$ , takie, że wartości własne części liniowej to para sprzężonych liczb urojonych  $\lambda, \bar{\lambda}$  i w postaci normalnej (11.8)  $\operatorname{Re} a_1 > 0$ , to deformacja 1-parametrowa, bifurkacja Hopfa*

$$\dot{z} = iz + \epsilon z + |z|^2 \tag{11.13}$$

jest wersalna dla  $\mathcal{V}$  i  $1 - 1$ -wersalna dla rodzin

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \operatorname{Re} \lambda(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} > 0.$$

Jeśli  $\operatorname{Re} a_1 < 0$  to (11.13) należy zastąpić przez bifurkację Hopfa

$$\dot{z} = iz + \epsilon z - |z|^2. \tag{11.14}$$

*Dowód.* Należy zauważyć, że sprowadzenie do postaci normalnej (11.8), dla  $\epsilon \in \mathbb{R}^{n'}$  polegające na redukcji części nierezonansowych gładko (algebraicznie) zależy od  $\epsilon$  (sprawdź procedurę z wykładu 10). Poza rezonansami wypisanymi przed (11.8) nie ma innych dla żadnych  $\epsilon \sim 0$ . Dla rodzin w postaci normalnej obraz fazowy już jednoznacznie opisałem. ((11.13) i (11.14) są równoważne, to znaczy dla ich pól  $V$  i  $W$  istnieje  $h$  takie jak w definicji (??) i  $\mu$  odwracalne, o ile pozwolić  $h$  zmieniać kierunek czasu na trajektoriach).  $\square$

*Uwaga 11.18.* Na ogół  $\mathcal{V}$  jest podrozmaitością w przestrzeni kielków pól  $V$ ,  $V(0) = 0$ , zadaną układem  $k$  równań i jakichś nierówności. Kowymiar  $\mathcal{V}$  jest równy liczbie równań  $k$ . Wtedy często rodziną wersalną jest rodzina transwersalna do  $\mathcal{V}$ , zatem wystarczy  $k$  parametrów. Tak jest na przykład dla bifurkacji Hopfa. Terminologia wzięta jest z teorii bifurkacji osobliwości funkcji (inna nazwa: **teoria katastrof**).

Wtedy wprowadza się jeszcze pojęcie deformacji uniwersalnej: liczba parametrów  $n$  minimalna możliwa. Słowo **wersalna** jest przecięciem słów : transwersalna i uniwersalna. Patrz T.L. Brocker, L. Lander “Differentiable germs and catastrophes”.

*Uwaga 11.19.* Przy badaniu bifurkacji już lokalnie dla kielków  $V(x, \epsilon)$  w  $(0, 0)$ , pojawiają się zjawiska globalne: na przykład orbita okresowa dla bifurkacji Hopfa. Gdybyśmy badali kielék  $V(x, \epsilon)$  jako funkcji  $x$  w  $x = 0$  dla każdego  $\epsilon$  oddzielnie to byśmy tego zjawiska nie wykryli. Wykrylibyśmy tylko źródło lub ściek (być może nieliniowy) w  $0$ .

Przykład 11.20. (bifurkacja Bogdanowa-Takensa)

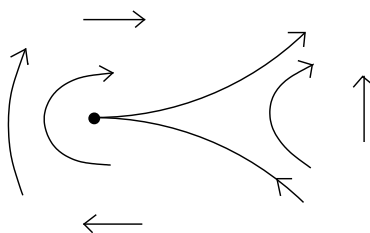
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 x_1 + x_1^2 \pm x_1 x_2 \end{aligned}$$

Część liniowa dla  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  ma postać

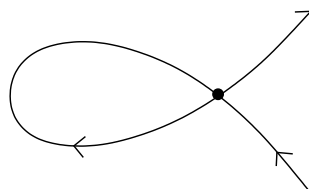
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 \pm x_1 x_2 \end{aligned}$$

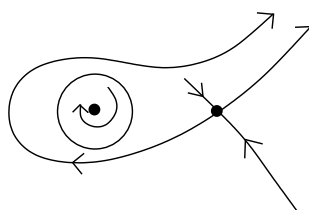
Dla pewnych  $\epsilon_1, \epsilon_2$  mamy stabilno - niestabilną separatoryse, która może bifurkować dając orbitę zamkniętą, która potem niknie w bifurkacji Hopfa. To jest zjawisko globalne.



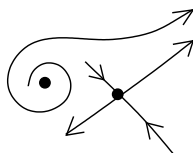
Rysunek 11.10:



Rysunek 11.11:



Rysunek 11.12:



Rysunek 11.13:



# Wykład 12

Na wykładzie 11 omówiłem 1-parametrową wersalną deformację osobliwości pola w  $0 \in \mathbb{R}^2$  przy przejściu pary nierzeczywistych wartości własnych części liniowej przez oś urojoną w  $\mathbb{C}$ , tak zwaną bifurkację Hopfa.

Teraz omówię inną 1-parametrową rodzinę wersalną, **bifurkację siodło-węzeł** w  $0 \in \mathbb{R}^1$ . Wartość własna części liniowej dla  $\epsilon = 0$  jest równa 0.

**Twierdzenie 12.1.**

$$\dot{x} = \epsilon + x^2$$

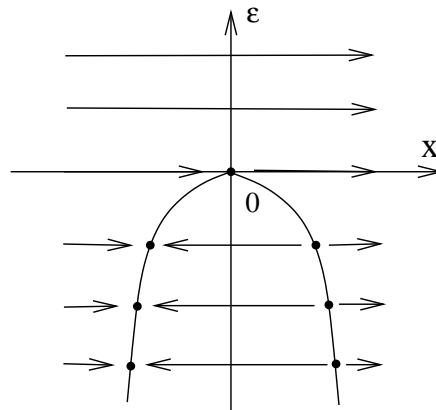
to wersalna deformacja dla kielków pól

$$\dot{x} = ax^2 + o(|x|^2), \text{ gdzie } a \neq 0.$$

•

$$\dot{x} = \epsilon + x^2$$

$\forall \epsilon$  zera pola są w  $x = \pm\sqrt{-\epsilon}$



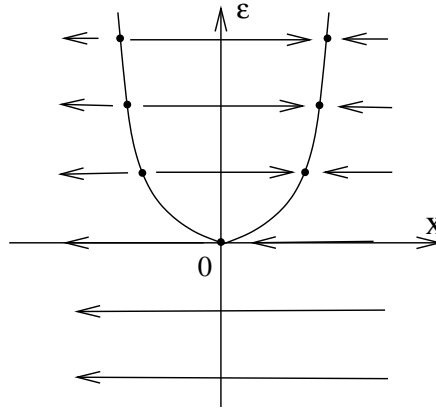
Rysunek 12.1:

•

$$\dot{x} = \epsilon - x^2$$

zera w  $x = \pm\sqrt{\epsilon}$

Obie deformacje  $\dot{x} = \epsilon + x^2$  i  $\dot{x} = \epsilon - x^2$  są równoważne, trzeba wziąć  $\epsilon \mapsto -\epsilon$  i  $x \mapsto -x$  jeśli chcemy zachowania czasu.



Rysunek 12.2:

*Dowód.* Ogólna postać deformacji to

$$\dot{x} = b(\epsilon) + c(\epsilon)x + x^2d(\epsilon, x), \quad (12.1)$$

gdzie  $d(0, 0) \neq 0$  i  $b, c, d$  to funkcje gładkie.

Różniczkujemy prawą stronę po  $x$ , żeby  $\forall \epsilon$  znaleźć ekstremum po  $x$ .

$$\phi(\epsilon, x) = c(\epsilon) + 2xd(\epsilon, x) + x^2 \frac{\partial d(\epsilon, x)}{\partial x}$$

Liczymy

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, 0) = 2d(0, 0) \neq 0,$$

więc można równanie  $\phi(\epsilon, x) = 0$  rozwikłać,  $\phi(\epsilon, x(\epsilon)) = 0$  dla odpowiedniej funkcji  $x(\epsilon)$ .

Przesuńmy współrzędne tak, żeby  $\forall \epsilon$  punkt krytyczny po  $x$  prawej strony (12.1) był w 0, to znaczy podstawmy  $y = x - x(\epsilon)$ .

W nowych współrzędnych (12.1) przyjmuje postać

$$\dot{x} = b(\epsilon) + x^2d(\epsilon, x), \quad d(0, 0) \neq 0 \quad (12.2)$$

dla nowych funkcji  $b, d$ .

Założmy, że  $d(0, 0) > 0$ , przypadek  $d(0, 0) < 0$  bada się analogicznie.

Oznaczmy prawą stronę (12.2) przez  $W(\epsilon, x)$ .

Przekształcenie  $h(\cdot, \epsilon): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, \forall \epsilon$ , homeomorfizm zachowujący orientację, przeprowadzający zera  $W(\epsilon, x)$  dla  $b(\epsilon) \leq 0$  w punkty  $\pm\sqrt{-b(\epsilon)}$ , afiniczne między zerami, afiniczne z pochodną 1 po zewnętrznych stronach zer oraz afiniczne na  $\mathbb{R}^1$ , zachowujące 0, przy  $b(\epsilon) > 0$ . Homeomorfizm  $(x, \epsilon) \mapsto (h(x, \epsilon), b(\epsilon))$  przeprowadzający trajektorie  $W(\epsilon, x)$  na trajektorie pola  $b(\epsilon) + x^2$  □

*Uwaga 12.2.* Można łatwo uzyskać wyżej  $h$  zachowujące czas wzdłuż trajektorii.

*Ćwiczenie 12.3.* Czy  $\dot{x} = \epsilon x + x^2$  jest deformacją wersalną ?

*Ćwiczenie 12.4.* Czy można uzyskać wyżej  $h$  zachowujące czas i klasy  $C^1$  ?

Tw.12.1 ma swój odpowiednik w dowolnym wymiarze

**Twierdzenie 12.5.** W rodzinie kielków równań (pól  $W$ ) w  $0 \in \mathbb{R}^m$ , których część liniowa ma jedną jednokrotną wartość własną równą 0, a pozostałe wartości własne ( $s$  spośród nich  $< 0$ ,  $u$  spośród nich  $> 0$ ) mają niezerowe części rzeczywiste (to znaczy operator im odpowiadający jest hiperboliczny), oraz takich, że  $|W(x)| \geq \text{Const}|x|^2$ ,  $\text{Const} > 0$ , rodzina wersalna to

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon + x^2 & x \in \mathbb{R}^1 \\ \dot{y} = y & y \in \mathbb{R}^u \\ \dot{z} = -z & z \in \mathbb{R}^s \end{cases}$$

Analogicznie sytuacja wygląda przy przejściu pary sprzężonych nierzeczywistych wartości własnych przez oś urojoną (bifurkacja Hopfa).

**Twierdzenie 12.6.** Wersalną deformacją kielków pól wektorowych w  $0 \in \mathbb{R}^m$ , typowych, z jedną parą czysto urojonych sprzężonych wartości własnych części liniowej,  $s$  wartościami własnymi (z uwzględnieniem krotności) o części rzeczywistej  $< 0$ ,  $u$  o części rzeczywistej  $> 0$  jest deformacja

$$\begin{cases} \dot{x} = z(i + \epsilon \pm |z|^2) & z \in \mathbb{C} \\ \dot{v}_1 = v_1 & v_1 \in \mathbb{R}^u \\ \dot{v}_2 = -v_2 & v_2 \in \mathbb{R}^s \\ 2 + u + s = m \end{cases}$$

Oba twierdzenia wynikają z Tw.12.1 i odpowiedniego Tw.11.3 z poprzedniego wykładu o bifurkacji Hopfa, oraz następującego

**Twierdzenie 12.7.** (o redukcji do części centralnej)

Niech  $\dot{x} = F(x, \epsilon)$  będzie kielkiem równania różniczkowego (to znaczy  $F$  kielkiem funkcji gładkiej),  $x, F(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^m$  z parametrem  $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ , w  $(0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ . Niech  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^c$  będzie rozkładem  $\mathbb{R}^m$  na sumę prostą podprzestrzeni, które są niezmiennicze dla różniczkowej  $D_x F(0, 0)$  i  $D_x F|_{\mathbb{R}^s}$  ma wartości własne o częściach rzeczywistych ujemnych,  $D_x F|_{\mathbb{R}^u}$  - dodatnich,  $D_x F|_{\mathbb{R}^c}$  ma wszystkie wartości własne czysto urojone.

Wtedy istnieje na otoczeniu  $(0, 0) \in \mathbb{R}^m + k$  ciągła funkcja  $h(x, \epsilon)$  o wartościach w  $\mathbb{R}^m$ , homeomorfizm dla każdego ustalonego  $\epsilon$  i równanie różniczkowe

$$\dot{v}_1 = G(v_1, \epsilon),$$

$G$  gładkie,  $v_1 \in \mathbb{R}^c$  takie, że  $\forall \epsilon$   $h$  przeprowadza orbity  $\dot{x} = F(x, \epsilon)$  na orbity dla równania:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = G(v_1, \epsilon) & v_1 \in \mathbb{R}^c \\ \dot{v}_2 = v_1 & v_2 \in \mathbb{R}^u \\ \dot{v}_3 = -v_3 & v_3 \in \mathbb{R}^s \end{cases} \quad (12.3)$$

*Uwaga 12.8.* Proszę zauważyć, że w szczególności niezmiennicza jest rozmaitość  $\{v_2 = v_3 = 0\}$ , a jej otoczenie rozbite jest na foliację rozmaitościami  $v_1 = \text{Const}$ ,  $\epsilon = \text{Const}$  tak, że potok pola (12.3) przeprowadza każdą taką rozmaitość na taką rozmaitość (być może inną).

*Uwaga 12.9.* Wygodnie do (12.3) dołożyć równanie  $\dot{\epsilon} = 0$  i podobnie rozważać  $\dot{x} = F(x, \epsilon)$ ,  $\dot{\epsilon} = 0$ . Wtedy  $\mathbb{R}^k$  można dołączyć do  $\mathbb{R}^c$  w założeniach, bo w rozkładzie  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^u \oplus (\mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^k)$  mamy dla  $\overline{F} = (F, 0)$

$$D\overline{F} = \begin{pmatrix} D_x F|_{\mathbb{R}^s} & 0 & 0 \\ 0 & D_x F|_{\mathbb{R}^u} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} D_x F|_{\mathbb{R}^c} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

wartości własne w kierunku  $\epsilon$  są 0. Możemy więc zapomnieć o parametrze.

Tw.(12.7) zawiera w sobie następujące

**Twierdzenie 12.10.** *Jeśli dla  $\dot{x} = F(x)$  mamy jak wyżej rozkład  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^c$ , to istnieją rozmaitości niezmiennicze dla potoku pola  $F$ , gładkie  $W_{loc}^s, W_{loc}^u, W_{loc}^c, W_{loc}^{cs}, W_{loc}^{cu}$  styczne w 0 odpowiednio do  $\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^u, \mathbb{R}^c, \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s, \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^u$ . Te rozmaitości nazywają się odpowiednio: **stabilna, niestabilna, centralna, centralno-stabilna, centralno-niestabilna**. Dla  $F$  klasy  $C^r, r \leq 2, W^s, W^u$  są klasy  $C^{r-m}, W^c, W^{cs}, W^{cu}$  klasy  $C^{r-1}$ . Dla  $r = \infty, W^{s(u)}$  są klasy  $C^\infty$ , ale  $W^c, W^{cs}, W^{cu}$  skończonej gładkości, tym większej im mniejsze otoczenie 0 bierzemy.*

*Uwaga 12.11.*  $W_{loc}^s$  i  $W_{loc}^u$  są wyznaczone jednoznacznie jako

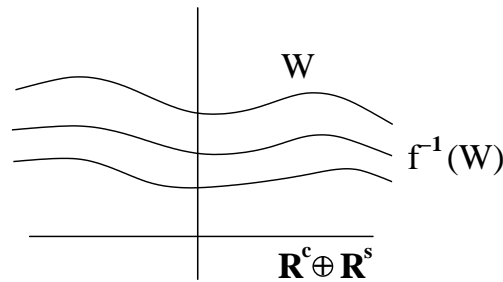
$$W^s = \{x \in U \mid \phi^t(x) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0 \text{ wykładniczo}\}$$

$$W^u = \{x \in U \mid \phi^t(x) \rightarrow_{t \rightarrow -\infty} 0 \text{ wykładniczo}\}$$

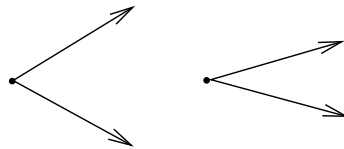
$U$  to otoczenie  $0 \in \mathbb{R}^m, \phi^t$  potok pola  $F$ .

$W^{cs}$  (i  $W^{cu}$ ) uzyskuje się jako punkty stałe na przestrzeni wykresów funkcji  $\mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^u$  i przekształcenia  $f = \phi^1$ . Iterowanie  $f^{-1}$  jest kontrakcją (porównaj Tw.Hadamarda-Perrona).

Gdyby nie było  $\mathbb{R}^c$  to rzut  $f^{-1}(W)$  na  $\mathbb{R}^s$  zawierałby rzut  $W$  i przekształcenie  $f^{-1}$  byłoby



Rysunek 12.3:



Rysunek 12.4:  $Df^{-1}$  zmniejsza kąt

dobrze zdefiniowane na przestrzeni wykresów nad ustaloną dziedziną  $U^s \in \mathbb{R}^s$ . Istnienie  $\mathbb{R}^c$  powoduje, że dziedzina może powoli maleć i nic w granicy nie dostaniemy.

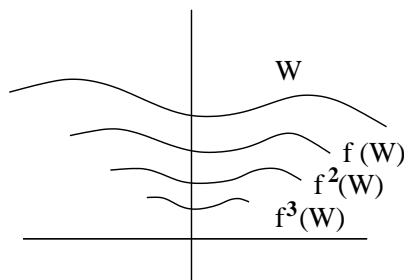
Należy więc rozszerzyć  $f$  na całe  $\mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^c$  jak w dowodzie Tw.Grobmana-Hartmana i rozważać przestrzeń wykresów funkcji na całym  $\mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^s$  w  $\mathbb{R}^u$ . Wtedy jednak  $W^{cs}$  zależy od rozszerzenia.

Definiujemy w końcu  $W^c = W^{cs} \cap W^{cu}$ .

*Przykład 12.12.* (niejednoznaczność  $W^c$ )

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$





Rysunek 12.5:

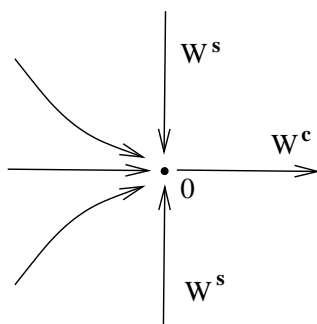
Rozwiązania są postaci

$$x(t) = \frac{1}{C_1 - t}, \quad C_1^{-1} = x(0),$$

$$y(t) = e^{-t} C_2, \quad C_2 = y(0).$$

$W^c$  może być zbudowane z trajektorii  $x(t)$  dla  $x(0) > 0$ ,  $y(t) \equiv 0$ , trajektorii  $x(t) = y(t) = 0$  i dowolnej trajektorii  $x(0) < 0$ .

Każde  $W^c$  jest klasy  $C^\infty$ .



Rysunek 12.6:

*Uwaga 12.13.* Wystarczy zakładać w Tw.12.10, że wartości własne spełniają  $\text{Re } \lambda \leq a_1$  na  $\mathbb{R}^s$ ,  $\text{Re } \lambda \geq a_2$  na  $\mathbb{R}^u$ ,  $b_1 \leq \text{Re } \lambda \leq b_2$  na  $\mathbb{R}^c$  dla pewnych  $a_1 < b_1 \leq 0 \leq b_2 < a_2$ . Wtedy okazuje się, że gładkości  $W^s$ ,  $W^u$ ,  $W^c$  są co najmniej takie jak  $\left| \frac{a_1}{b_1} \right|$ ,  $\left| \frac{a_2}{b_2} \right|$ ,  $\min_{i=1,2} \left| \frac{a_i}{b_i} \right|$ .

*Przykład 12.14.* (Węzeł)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = by \end{cases}$$

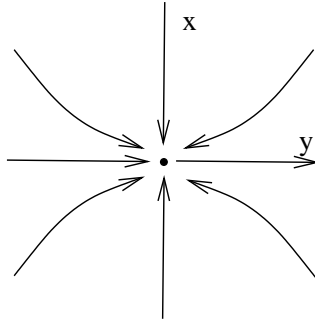
$$a < b < 0$$

$$\mathbb{R}^s = \text{span} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbb{R}^c = \text{span} \frac{\partial}{\partial y}, \quad s = c = 1$$

Za rozmierność niezmienniczą  $W^c$  styczną do  $\mathbb{R}^c$  można wziąć sumę trajektorii  $(C_1 e^{at}, -e^{bt})$  dla dowolnych  $C_1, C_2 < 0$  ( $C_2 e^{at}, e^{bt}$ ) dla dowolnych  $C_1, C_2$  i trajektorii stałej  $x(t) = y(t) = 0$ . Mamy  $x(t) = C_i |y(t)|^{\frac{a}{b}}$ .

Z wyjątkiem  $C_1 = C_2$ ,  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$  oraz  $x \equiv 0$  wszystkie rozmierności  $W^c$  są klasy  $\frac{a}{b}$ , ale nie gładsze.

Klasy  $\frac{a}{b}$  jeśli  $\frac{a}{b}$  nie jest całkowite oznacza klasy  $\left[ \frac{a}{b} \right]$ , gdzie  $[\alpha]$  oznacza największą liczbę całkowitą  $\leq \alpha$ , a  $\left[ \frac{a}{b} \right]$  pochodna Holdera z wykładnikiem  $\frac{a}{b} - \left[ \frac{a}{b} \right]$ .



Rysunek 12.7:

*Ćwiczenie 12.15.* Podać przykład z tą samą częścią liniową, żeby żadna  $W^c$  nie była gładzsza niż klasy  $\frac{a}{b}$ .

*Uwaga 12.16.* (do Tw.(12.6)) Słowo typowych oznacza, że na rozmaitości centralnej, w postaci normalnej

$$\dot{z} = i\omega z + az|z|^2 + \dots,$$

mamy  $a \neq 0$ .

*Ćwiczenie 12.17.*  $a \neq 0$  nie zależy od rozmaitości centralnej ani od postaci normalnej.

Tw.(12.7) ma swój odpowiednik globalny

**Twierdzenie 12.18.** (o normalnej hiperboliczności)

Niech  $N \subset M$  będzie zwartą podrozmaitością i pole  $V(x)$  styczne do  $M$  określone w otoczeniu  $N$ , na  $N$  styczne do  $N$ . Załóżmy, że istnieje na  $N$  rozkład wiązki stycznej do  $M$

$$T_N M = T_N N \oplus E^s \oplus E^u$$

na wiązki niezmiennicze dla  $D\phi^t$ ,  $\phi^t$  to potok pola  $V$ , takie, że dla pewnych liczb

$$0 < \lambda_1 < \mu_1 \leq 1 \leq \mu_2 < \lambda_2$$

i każdego  $t \geq 0$  mamy dla pewnej metryki Riemanna

$$\frac{\|D\phi^t(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda_1^t \text{ dla } v \in E^s,$$

$$\frac{\|D\phi^t(v)\|}{\|v\|} \geq \lambda_2^t \text{ dla } v \in E^u,$$

$$\mu_1^t \leq \frac{\|D\phi^t(v)\|}{\|v\|} \leq \mu_2^t \text{ dla } v \in T_N.$$

Wtedy istnieje dla  $x \in N$  rodzina rozmaitości lokalnie stabilnych  $W^s(x)$  i  $W^u(x)$ , stycznych do  $E^s$ ,  $E^u$  niezmiennicza, to znaczy  $\phi^t(W^s(x)) \subset W^s(\phi^t(x))$ ,  $\phi^{-t}(W^u(x)) \subset W^u(\phi^{-t}(x))$ .

*Uwaga 12.19.* Założenie zwartości  $N$  wustarczy zastąpić ograniczonością różniczki potrzebnego rzędu w otoczeniu  $N$ .

To Tw.(12.18) jest uogólnieniem Tw. Hadamarda-Perrona, gdzie  $N$  jest jednym punktem lub trajektorią okresową dla potoku. Jest wariantem twierdzenia o istnieniu lokalnie stabilnych i niestabilnych rozmaitości dla zbioru hiperbolicznego, patrz Wykład 8, definicja 2.

*Uwaga 12.20.* Dla pola  $W$  będącego małym  $C^1$ -zaburzeniem  $V$  istnieje  $C^1$ -rozmaitość  $N_W$  bliska  $N$ , niezmiennicza dla potoku pola  $W$  (to znaczy styczna do  $W$ ), **normalnie hiperboliczna**, to znaczy taka, że istnieje rozkład  $T_N M = TN_W \oplus E^u \oplus E^s$  o własnościach jak dla  $V$ .

*Uwaga 12.21.* Ta teoria dla potoków pól wektorowych ma odpowiednik dla dyfeomorfizmów. Badanie pola w otoczeniu **orbity okresowej** i deformacji, sprowadza się do badania deformacji dyfeomorfizmu, przekształcenia pierwszego powrotu do małego cięcia transwersalnego (inne nazwy: **cięcie Poincare'go**), odwzorowanie Poincare'go).

Będziemy badać kielki dyfeomorfizmów  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  w  $0$ ,  $f(0) = 0$  i ich deformacje  $f(x, \epsilon)$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ .

Analogicznie do Tw. 12.5 mamy następujące

**Twierdzenie 12.22.** *Dla kielków dyfeomorfizmów  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  w  $0$ , takich, że  $f(0) = 0$  i  $Df(0)$  ma jedną jednokrotną wartość własną równą  $1$ , a pozostałe mają moduły  $\neq 1$  oraz  $|f(v)| \geq \text{Const} \cdot |v|^2$ ,  $\text{Const} > 0$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$  **wersalną deformacją** jest*

$$(x, y, z, u, v) \mapsto (x + x^2 + \epsilon, 2y, -2z, \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}v),$$

gdzie  $x \in \mathbb{R}^1$ .

*Uwaga 12.23.* Dokładniej trzeba w sformułowaniu powyższego twierdzenia ustalić dla kielków, których deformację badamy, wymiary  $s, u$  przestrzeni  $E^{s(u)}$  odpowiadających wartościom własnym o module  $> 1$  i  $< 1$ , oraz to czy  $Df(0)$  obcięte do nich zachowuje orientację. Wtedy  $y \in \mathbb{R}^u$  lub  $y \in \mathbb{R}^{u-1}$ , zależnie od zachowania lub zmiany orientacji przez  $Df|_{E^u}$ , i odpowiednio  $z \in \mathbb{R}^0$ ,  $z \in \mathbb{R}^1$ . Analogicznie  $u \in \mathbb{R}^s$  lub  $\mathbb{R}^{s-1}$  i odpowiednio  $v \in \mathbb{R}^0$  lub  $v \in \mathbb{R}^1$ .

*Ćwiczenie 12.24.* Sprawdzić, że dla punktu stałego hiperbolicznego  $u$ ,  $s$  i to co się dzieje z orientacją (jak wyżej) to pełny niezmiennik topologicznego sprzężenia.

*Dowód.* (Szkic dowodu)

Prawdziwe jest twierdzenie analogiczne do Tw.12.7 (o redukcji do rozmaitości centralnej). Wystarczy więc badać deformację w wymiarze 1. Jest ona postaci

$$f(x, \epsilon) = x \cdot c(\epsilon) + x^2 \cdot d(x, \epsilon) + b(\epsilon), \quad d(0, 0) \neq 0.$$

Dalej możemy postępować jak w dowodzie Tw.12.1 uzyskując

$$f(z, \epsilon) = b(\epsilon) + x^2 \cdot d(x, \epsilon) + x, \quad \text{powiedzmy } d(0, 0) > 0.$$

Nie możemy jednak dalej wziąć  $h$  kawałkami afinicznymi, bo mogą nie być sprzężeniami. Zamiast tego postępujemy następująco:

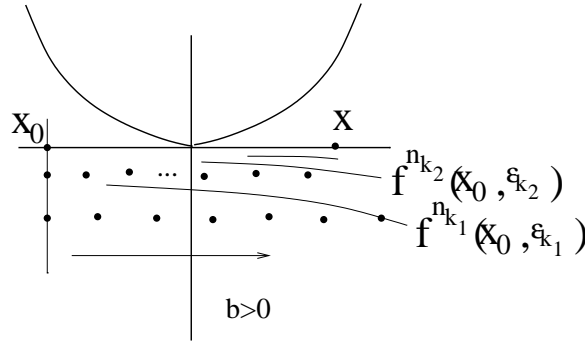
Oznaczmy  $g(x, b) = x^2 + b + x$ . Ustalmy  $x_0 < 0$

1. Dla  $b(\epsilon) > 0$  definiujemy

$$hf^n(x_0, \epsilon) = g^n(x_0, b), \quad n \geq 0.$$

Okazuje się, że w granicy to definiuje jednoznacznie  $h(x, \epsilon)$  dla  $b(\epsilon) = 0$ ,  $\epsilon \in \{b(\epsilon) > 0\}$ . (Załóżmy, że wtedy  $\epsilon$  osiągany jest łukiem z  $\{b(\epsilon) > 0\}$ ).  $\forall x > 0$  bierzemy ciąg  $\epsilon_k \rightarrow \epsilon$ , taki, że istnieje ciąg  $n_k$  spełniający  $f^{n_k}(x_0, \epsilon_k) \rightarrow x$ . Wtedy definiujemy

$$h(x, \epsilon) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} g^{n_k}(x_0, \epsilon_k)$$



Rysunek 12.8:

2. Niech  $W_\epsilon$  będzie polem takim, że jego potok po czasie 1 daje dyfeomorfizm  $\phi^1 = f(\cdot, 0)$ , dla  $b(\epsilon) = 0$ , a  $V$  daje po czasie 1 dyfeomorfizm  $g(x) = x + x^2$ . Wtedy dla  $b(\epsilon) = 0$   $h$  sprzęga, z zachowaniem czasu, potoki dla  $W_\epsilon$  i  $V$ . Te pola  $W_\epsilon$  i  $V$ , gładkie, są wyznaczone jednoznacznie,  $W_\epsilon$  gładko zależy od  $\epsilon$ . Zatem dla  $b(\epsilon) = 0$   $h$  nie zależy od  $\epsilon_k \rightarrow \epsilon$ .
3. Rozszerzamy  $h$  dla  $b(\epsilon) > 0$  na odcinki  $y \in (x_0, f(x_0, \epsilon))$  dowolnie tak, żeby rozszerzało  $h$  dla  $b(\epsilon) = 0$ , a dalej  $h(f^n(y, \epsilon) = g^n(h(y), b(\epsilon)))$ . Rozszerzenie na  $b(\epsilon) < 0$  jest też łatwe.

□

Zanim przejdę do badania innych deformacji podam twierdzenie dotyczące postaci normalnej i rezonansów dla kielków dyfeomorfizmów, analogicznej do teorii dotyczącej pól wektorowych z Wykładu 10.

Zobaczmy jak zmienia się liniowe przekształcenie  $x \mapsto Ax$ , jeśli zmienimy współrzędne przekształceniem  $H(x) = x + h(x)$ , gdzie  $h \in J^r$ ,  $r \geq 2$ , to znaczy  $h = (h_1, \dots, h_m)$ , gdzie  $h_i$  to wielomiany jednorodnego stopnia  $r$ .

$$\begin{aligned} H(A(H^{-1}(x))) &= (Id + h) \circ A \circ (Id - h)x + \dots \\ &= Ax - Ah(x) + h(A(x)) + \dots \end{aligned}$$

(wielokropek oznacza wyrazy rzędu wyższego niż  $r$ )

Przekształcenie

$$M_A^r(h) = hA - Ah$$

jest operatorem liniowym  $J^r$  w  $J^r$ .

Założmy, że

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

w odpowiedniej (zespolonej) bazie. Wtedy dla

$$h = (0, \dots, x^{r_1} \cdot \dots \cdot x^{r_m}, \dots, 0), \quad r_1 + \dots + r_m = r$$

$$M_A^r(h) = (0, \dots, \lambda_1^{r_1} x^{r_1} \cdot \dots \cdot \lambda_m^{r_m} - \lambda_j x^{r_1} \cdot \dots \cdot x^{r_m}).$$

Zatem wektorami własnymi są jednomiany  $(0, \dots, x^{r_1} \cdot \dots \cdot x^{r_m}, \dots, 0)$ , a odpowiednimi wartościami własnymi  $\prod_{i=1}^m \lambda_i^{r_i} - \lambda_j$ ,  $\sum r_i \geq 2$ ,  $r_i \geq 0$ . Podobnie jak dla pól wektorowych przez zmienny współrzędnych można pozbyć się wszystkich wyrażen  $x^{r_1} \dots x^{r_m}$  z wyjątkiem być może tych, dla których jest **rezonans**

$$\prod_{i=1}^m \lambda_i^{r_i} = \lambda_j, \quad \sum r_i \geq 2, \quad r_i \geq 0.$$

**Twierdzenie 12.25. Deformacja**

$$x \mapsto -(\epsilon + 1)x \pm x^3$$

jest wersalna dla kielków dyfeomorfizmów w  $0 \in \mathbb{R}^1$ , dla których  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = -1$  i mających następującą postać normalną

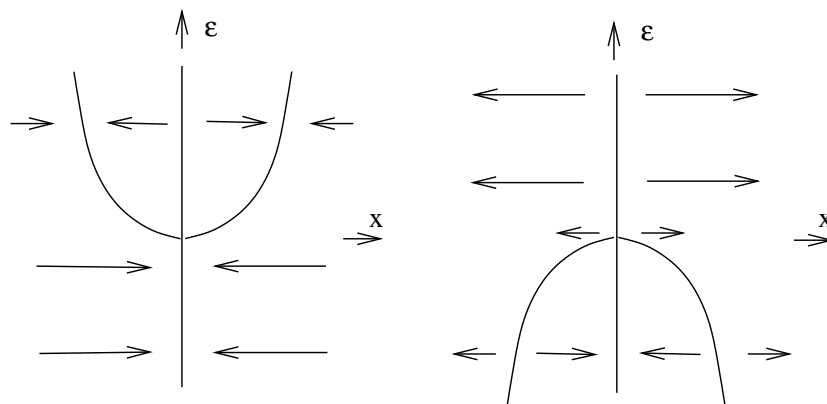
$$x \mapsto -x + ax^3 + \dots, \quad a \neq 0.$$

Analogiczna wersja jest prawdziwa w  $\mathbb{R}^m$ , gdzie jedna wartość własna części liniowej jest równa 1, inne mają moduły  $\neq 1$  (jak w Tw. 12.22).

*Dowód.* Zauważmy, że dla  $\lambda = -1$ , mamy rezonanse  $\lambda^n = \lambda$  dla  $n$  nieparzystych, więc wyżej rzeczywiście jest podana postać normalna ( $x \mapsto -x + a_1x^3 + a_2x^5 + \dots$ ). Dla deformacji postać normalna to

$$f(x, \epsilon) = \lambda(\epsilon)x + a(\epsilon)x^3 + \dots, \quad \lambda(0) = -1, a(0) \neq 0.$$

**Rysunek:** Punkty stałe dla  $f \circ f$



Rysunek 12.9:  $a(0) > 0$ ,  $\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} > 0$ , **miękką** utratę stabilności oraz  $a(0) < 0$ ,  $\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} > 0$  **ostra** utratę stabilności

$$\begin{aligned} f \circ f(x, \epsilon) &= \lambda(\lambda x + ax^3) + a(\lambda x + ax^3)^3 + \dots \\ &= \lambda^2 x + 2a\lambda x^3 + \dots \end{aligned}$$

Topologiczna równoważność  $f(x, \epsilon)$  i  $x \mapsto g(x, \epsilon) - \lambda(\epsilon)x \pm x^3$  gdzie

$$\lambda(\epsilon) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, \epsilon)|_{x=0} - 1,$$

jest łatwa do pokazania: na przykład  $h(x_i, \epsilon) = (y_i, \lambda(\epsilon))$ , gdzie  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (lub  $i = 1$ ) to punkty stałe  $f$ ,  $y_i$  punkty stałe  $g$ ,  $h(2x_i) = 2y_i$ ,  $h(\frac{1}{2}x_i) = \frac{1}{2}y_i$ ,  $h(f^n(x)) = g^n(h(y))$ , gdzie  $h$  na  $x \in (x_i, f(x_i))$  zdefiniowane jakkolwiek tak by zgadzało się z  $h(x_i) = y_i$ ,  $h(f(x_i)) = g(y_i)$ . (Tu jest o wiele łatwiej niż w Tw. 12.22.)  $\square$

*Uwaga 12.26.* W sytuacji Tw.12.22 mamy bifurkację siodło-węzeł dla orbity okresowej. W szczególności dwie orbity okresowe, przyciągająca i odpychająca w  $\mathbb{R}^2$  mogą się zlać i zniknąć. W Tw.12.25 orbita okresowa nie może zniknąć. Może się od niej odłączyć orbita okresu 2 razy dłuższego, a wyjściowa orbita zmienia się ze stabilnej na niestabilną lub odwrotnie. W wymiarze 2 (w rozmaitości centralnej) może się to zdarzyć tylko gdy otoczenie tej orbity to wstęga Möbiusa.

Wartości własne części liniowej przekształcenia Poincare nazywa się czasem **multiplikatorami**. Zbadaliśmy sytuację przejścia jednego multiplikatora przez 1 lub -1. Zobaczymy co się dzieje gdy para sprzężonych multiplikatorów przechodzi przez okrąg jednostkowy (ale nie przez 1, -1).

Sprawdźmy najpierw rezonanse:

$$\text{Mamy } \lambda^n \bar{\lambda}^{n+1} = \bar{\lambda}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda^{n+1} \bar{\lambda}^n = \lambda.$$

Zatem nie znikają jednomiany  $z^{n+1} \cdot \bar{z}^n$ . Jeśli  $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ , gdzie  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , to więcej rezonansów nie ma. Jeśli  $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ , względnie pierwsze to mamy rezonanse

$$\lambda^{q+1} = \lambda, \quad \lambda^{q-1} = \bar{\lambda}$$

$$\bar{\lambda}^{q+1} = \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda}^{q-1} = \lambda,$$

nie znikają więc  $z^{q+1}$  i  $\bar{z}^{q-1}$ .

**Twierdzenie 12.27.** *Przy przejściu pary multiplikatorów przez  $S^1$ , ale nie przez pierwiastki z 1 stopnia  $\leq 4$  od 0 oddziela się (lub niknie w nim) niezmiennicza krzywa zamknięta.*

*Dowód.* Postać normalna to

$$f(z, \epsilon) = \lambda(\epsilon)z(1 + a(\epsilon)|z|^2 + O(|z|^4)).$$

Gdyby nie było  $O(|z|^4)$  to dla  $r = |z|$ ,  $\phi$  kąt mielibyśmy

$$r \mapsto \lambda(\epsilon) \cdot r \cdot (1 + 2 \operatorname{Re} a(\epsilon)r^2 + |a|^2 r^4),$$

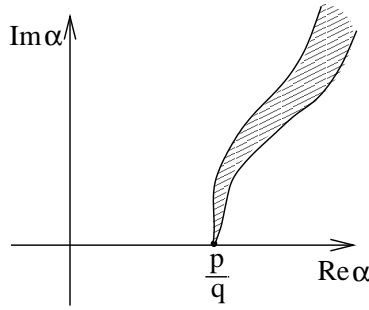
$$(\text{bo } |1 + ar^2|^2 = (1 + ar^2)(1 + \bar{a}r^2) = 1 + (a + \bar{a})r^2 + |a|^2 r^4)$$

i mielibyśmy niezmienniczy okrąg  $|z| = r$ , gdzie

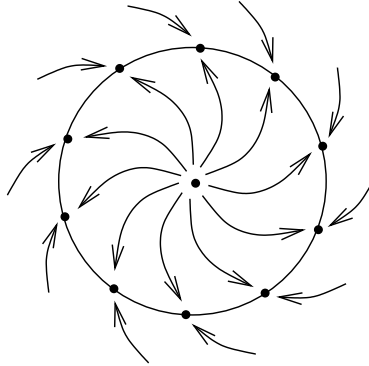
$$r = \sqrt{\frac{|\lambda| - 1}{|\operatorname{Re} a|}}.$$

Uwzględnienie ( $O(r^4)$ ) może popsuć niezmienniczość tego okręgu, ale blisko będzie istniała gładka niezmiennicza krzywa zamknięta. (Można na przykład sprawdzić, że spełnione są założenia o normalnej hiperboliczności i blisko  $N = \{|z| = r\}$  znaleźć niezmienniczą dla  $f(\cdot, \epsilon)$  krzywą  $N_\epsilon = N_{f(\cdot, \epsilon)}$ . Patrz Uwaga 6'). Można też przeprowadzić dowód tak jak dla bifurkacji Hopfa, Wykład 11.  $\square$

*Uwaga 12.28.* Przy zmianie  $\epsilon$  nie wiemy nic o  $f_\epsilon = f(\cdot, \epsilon)$  na  $N_\epsilon$ . Na przykład i  $\epsilon$  i  $O(r^4)$  mogą mieć wpływ na liczbę obrotu  $\rho(f_\epsilon)$ . Dla  $\epsilon \rightarrow 0$  mamy  $\rho(f_\epsilon) \rightarrow \alpha$ . Jeśli więc  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  to  $\rho(f_\epsilon)$  powinno przechodzić przez otoczenie  $\alpha$ , gdzie łuki parametrów  $\epsilon$  dla deformacji 1-parametrowej mają stałą wymierną liczbę obrotu, a  $f_\epsilon$  na  $N_\epsilon$  jest Morse'a-Smale'a. Daje to



Rysunek 12.10:



Rysunek 12.11:

szansę podania warunków na wersalną deformację, jednak wydaje się to trudne. Jeśli  $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $q \geq 5$  (**słaby rezonans**) to w płaszczyźnie parametrów  $\text{Re } \alpha$ ,  $\text{Im } \alpha$  istnieje “język Arnoldda”, w którym na  $N_\epsilon$ , ( $e^{2\pi i \alpha} = \lambda(\epsilon)$ ) mamy taką dynamikę Morse’a-Smale’a:

Dokładniejszy opis i bibliografię można znaleźć w książce Arnold “Teoria Równań Różniczkowych” str 271.

*Uwaga 12.29.* Postać normalna dla  $\alpha = \frac{p}{q}$  formalna i  $C^r$  to

$$f(z, \epsilon) = \lambda z + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n |z|^{2n} \right) z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{nq+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-nq-1},$$

która jest niezmiennicza ze względu na obroty  $e^{\frac{2\pi i p}{q}}$ . Takie przekształcenia można włączyć w potoki. Zatem poprawny w długim czasie obraz dynamiki iteracji  $f^n(\cdot, \epsilon)$  można uzyskać badając deformacje osobliwości pól wektorowych komutujących z obrotami o kąt  $e^{\frac{2\pi i p}{q}}$ , tak zwanych **deformacji ekwiwariantnych**, Arnold “teoria Równań Różniczkowych” str 279.

W sytuacji **silnych rezonansów**,  $q \leq 4$ , deformacje mogą być niezmiernie skomplikowane, patrz rysunki w książce Arnoldda.

*Przykład 12.30.*  $q = 4$ , czyli

$$f(z) = \lambda z + a z |z|^2 + c \bar{z}^3$$

Oba wyrazy po prawej stronie są stopnia 3. Dla słabych rezonansów tego nie było. (Arnold, str 273-279).

### Drgania relaksacyjne

Rozważmy równanie **Van der Pola**

$$\begin{cases} \dot{x} = y\frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} = -\epsilon x \end{cases} \quad \epsilon > 0 \quad (12.4)$$

Po zróżniczkowaniu pierwszego i podstawieniach drugiego uzyskamy

$$\ddot{x} = \dot{y} - x^2\dot{x} + \dot{x} = -\epsilon x - x^2\dot{x} + \dot{x}$$

czyli

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = -\epsilon x + z(1 - x^2) \end{cases} \quad (12.5)$$

Mamy dla trajektorii  $(x(t), y(t))$  równania (12.4) odpowiadającą jej trajektorię równania (12.5):

$$x(t), z(t) = \dot{x}(x) = y(t) - \frac{1}{3}x^3(t) + x(t).$$

Zatem trajektoria (12.4) przechodzi w trajektorię (12.5) przy zamianie współrzędnych

$$(x, y) \mapsto (x, y - \frac{1}{3}x^3 + x).$$

Zamieńmy jeszcze w (12.5) czas, mnożąc prawą stronę przez  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ , oraz podstawmy  $v = \frac{z}{\sqrt{\epsilon}}$ . Otrzymamy

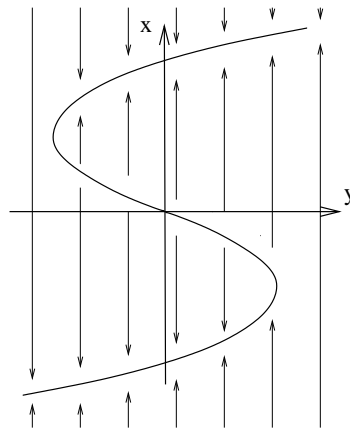
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x + v\sqrt{\epsilon}(1 - x^2) \end{cases} \quad (12.6)$$

To jest **równanie Van der Pola** z Wykładu 11, tylko zamiast  $\epsilon$  mamy  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ . Będziemy badać (12.4) gdy  $\epsilon \rightarrow 0$ , to znaczy gdy dla starego Van der Pola  $\epsilon \rightarrow \infty$ .

Ponieważ obrazy fazowe (12.4) i (12.5) są homeomorficzne, to (12.4) ma także orbitę okresową przyciągającą i punkt stały w  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

Można patrzeć na (12.4) jak na równanie zaburzone; porównaj Wykład 11.

Dla  $\epsilon = 0$ , dla równania niezaburzonego mamy następujący obraz fazowy: Równanie Van

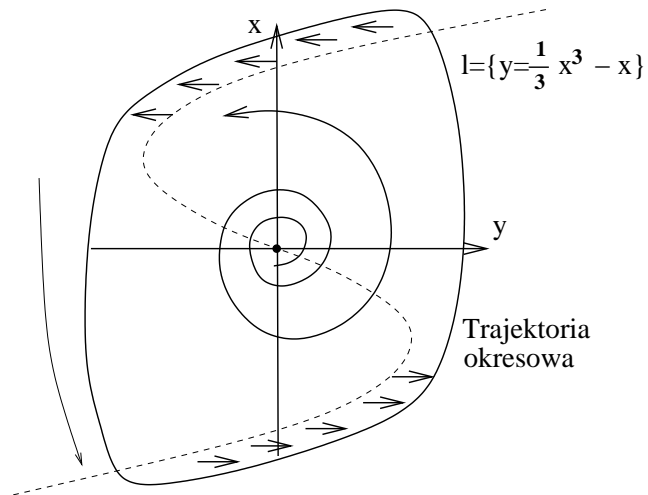


Rysunek 12.12:

der Pola niezaburzone,  $\epsilon = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y\frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (12.7)$$





Rysunek 12.13: Równanie Van der Pola zaburzone,  $\epsilon > 0$

Cała krzywa  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  składa się z punktów stałych. Dla  $\epsilon = 0$  mamy jedynie **ruch szybki** w kierunku  $x$ , “Przyciągający do  $\{y = \frac{1}{3}x^3 - x\} = l$ . Dla  $\epsilon > 0$  dochodzi **powolny ruch** wzdłuż krzywej  $l$ . Punkt na trajektorii okresowej porusza się wzdłuż  $l$  powoli w lewo, gdy dojdzie do końca gałęzi więzy puszczają (*relaxation*) i następuje “skok” na dół do dolnej gałęzi  $l$ . Potem porusza się powoli wzdłuż  $l$  w prawo przyciśnięty do  $l$  “więzami”, a gdy dojdzie do ekstremum więzy puszczają i punkt skacze do góry, do górnej gałęzi  $l$ .

Drgania relaksacyjne pojawiają się w teorii obwodów elektrycznych. Palczewski “Równania Różniczkowe Zwyczajne”.



# Wykład 13

## Atraktor Lorenza

Będziemy badać układ równań różniczkowych w  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) & (i) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz & (ii) \\ \dot{z} = -\beta z + xy & (iii) \end{cases}, \quad (13.1)$$

gdzie  $\sigma, \rho, \beta > 0$  to parametry.

Ustalmy  $\beta, \sigma$  powiedzmy  $\beta = \frac{8}{3}, \sigma = 10$  (parametry Lorenza) i będziemy badali portret fazowy i jego zmiany gdy  $\rho$  rośnie. Oznaczmy pole wektorowe z prawej strony (13) przez  $F = (F_1, F_2, F_3)$ . Dywergencja  $F$  jest równa  $-\sigma - 1 - \beta < 0$  więc Jakobiany przekształceń potoku  $\phi^t$  są mniejsze niż 1 dla  $t > 0$  (Tw. Liouville'a):

$$\det(D\phi^t(x)) = e^{\int_0^t \text{tr} DF(\phi^s(x)) ds} = e^{\int_0^t \text{div} F(\phi^s) ds} < 1$$

więc  $\phi^t$  dla  $t > 0$  zmniejszają miarę Lebesgue'a (wykładniczo dla  $t$ ). Jeżeli znajdziemy  $\mathcal{U}$  taki, że  $\phi^t(\text{cl}\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$  to

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi^t(\mathcal{U})$$

jest **atraktorem** o mierze równej 0.

Napiszmy

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix},$$

a w  $0 \in \mathbb{R}^3$

$$Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny dla lewej górnej klatki  $2 \times 2$  t

$$\lambda^2 - (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho).$$

Zatem wartości własne w 0 to

$$-\beta, \lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \rho)}}{2}$$

Dla  $\rho < 1$  mamy  $\lambda_{1,2} < 0$  więc 0 jest ściekiem.

Ćwiczenie 13.1.

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad \phi^t(v) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0.$$

Dla  $\rho = 1$  mamy  $-\beta$ ,  $\lambda_2 < 0$ , ale  $\lambda_1 = 0$ . Przez 0 przechodzi 1-wymiarowa rozmaitość centralna  $W_{loc}^c$  niezmiennicza dla  $\phi^t$ , styczna do wektora własnego  $(1, 1, 0)$  odpowiadającego wartości własnej  $\lambda_1 = 0$  (patrz Wykład 12).

Policzmy gdzie są zera pola  $F$ . Równania

$$\begin{cases} \sigma(y-x) = 0 \\ \rho x - y - xz = 0 \\ -\beta z + xy = 0 \end{cases}$$

dają  $x = y$ ,  $z = \frac{x^2}{\beta}$  i w końcu  $x = 0$ , lub  $\rho - 1 - \frac{x^2}{\beta} = 0$ , czyli  $x = y = \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}$ ,  $z = \rho - 1$ . Dla  $\rho \leq 1$  jedyne zero jest w  $0 \in \mathbb{R}^3$ . Stąd wynika, że jeśli 0 przyciąga (słabo) otoczenie w  $W_{loc}^c$ , to można rozważyć rozmaitość centralną dla równania z parametrem  $\rho \approx 1$   $V(\rho)$ ,  $W_{loc}^c(\rho)$ , która jest gładka ( $C^r$ ). Dla  $\rho < 1$  na  $W_{loc}^c$  jest przyciąganie do 0 więc z ciągłości jest przyciąganie na  $W_{loc}^c(1)$  (bo na  $W^c(1)$  oprócz 0, nie ma punktów stałych  $\phi^t$ , zer  $V(\rho)$ ,  $\rho = 1$ ). Wzdłuż  $W_{loc}^c$  mamy

$$|F_3| = O(|F_{1,2}|^2) \cdot \dots \quad (13.2)$$

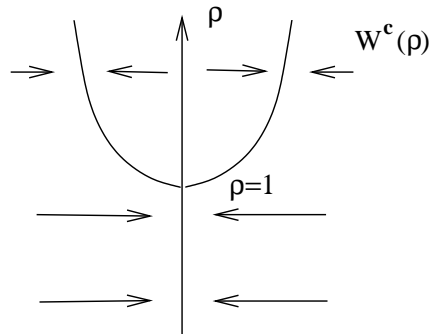
gdymy na  $W_{loc}^c$   $z \leq 0$ , lub nawet tylko  $\beta z \leq \epsilon xy$ ,  $F_3 \geq (1 - \epsilon)x^2$  co przeczy (13.2) bo  $|F_{1,2}| = O(x^2)$ ,  $|F_{1,2}|^2 = O(x^4)$ .

Zatem  $W_{loc}^c$  zawarte jest w górnej półprzestrzeni  $z \geq 0$ , a nawet  $z \geq \epsilon xy$ ,  $\epsilon < 1$ .

Ćwiczenie 13.2. Pokazać używając argumentu o ciągłości  $V(\rho)$ , że dla  $\rho = 1$ , 0 jest (słabym) ściekiem na  $W_{loc}^c$ .

Dokładniejsze rachunki można znaleźć w książce Guckenheimer, Holmes str. 129.

Dla  $\rho > 1$  na  $W_{loc}^c(\rho)$  pojawiają się 2 ścieki, 0 staje się źródłem w  $W_{loc}^c(\rho)$ . (Porównaj Wykład 12, bifurkacja dyfeomorfizmu z multiplikatorem -1). Dla



Rysunek 13.1: Bifurkacja "widły"(pitchfork)

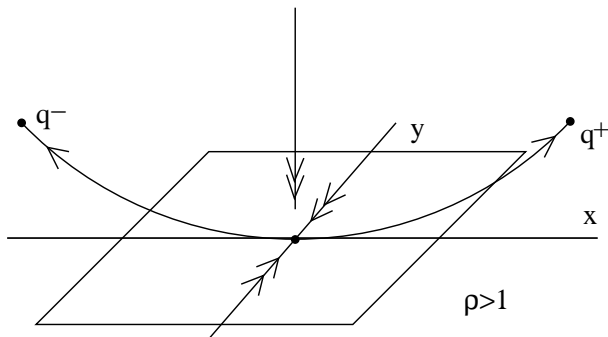
$$\rho = \rho_h = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1} \approx 24,74$$

wartości własne  $DF(q^\pm)$ , to

$$\lambda = -(\sigma + \beta + 1) \text{ i}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{2\sigma(\sigma + 1)(\sigma - \beta - 1)}.$$

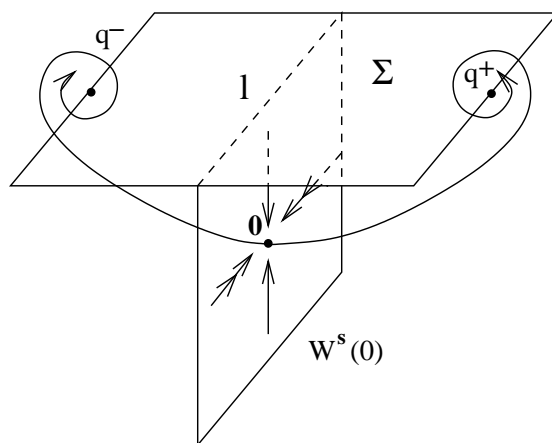
Przy naszym założeniu, że  $\sigma > \beta + 1$   $\lambda_{1,2}$  to para sprzężonych urojonych wartości własnych.



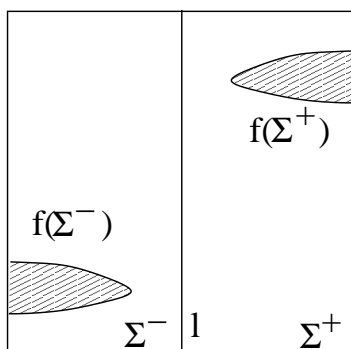
Można by myśleć, że w  $\rho = \rho_h$  następuje bifurkacja Hopfa w  $q^\pm$ , miękka utrata stabilności, od  $q^\pm$  oddzielają się w 2-wymiarowych centralnych rozmiarowościach przyciągające orbity okresowe. **To jednak nie jest prawdą. Bifurkacje Hopfa dają dla  $\rho_h$  ostre utraty stabilności !**

*Ćwiczenie 13.3.* Sprawdzić to numerycznie.

Spróbujemy prześledzić co naprawdę dzieje się między parametrami  $\rho = 1$  i  $\rho = \rho_h$ . Weźmy

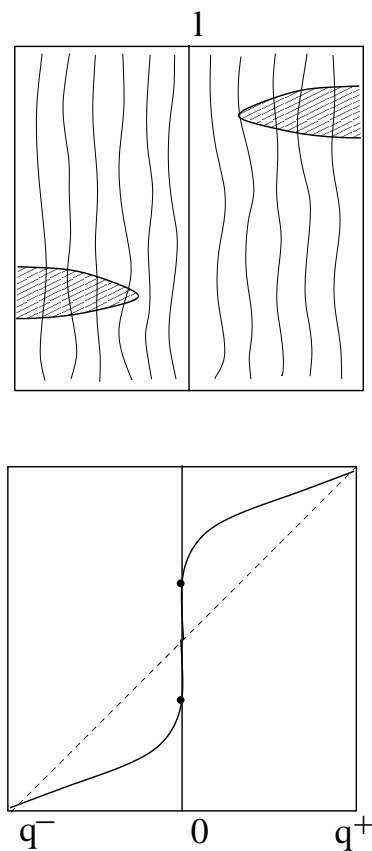


cięcie transwersalne  $\Sigma$  orbity zbiegającej do 0 wzdłuż osi  $z$  ( $x = y = 0$ ). Przekształcenie pierwszego powrotu do  $\Sigma$  wygląda następująco



Trajektorie punktów z  $l$  dążą do 0 i nigdy nie wracają do  $\Sigma$ . Odcinek równoległy do  $l$  bliski  $l$  podchodzi blisko 0 i zostaje bardzo skrócony. Dlatego obrazy  $f(\Sigma^-)$ ,  $f(\Sigma^+)$  mają na rysunku ostrza.

Dalej będziemy badać  $f$  przy założeniu, że zachowuje foliację  $\Sigma$  na liście (rozbiecie na liście) prawie równoległe do  $l$ , to znaczy liście przechodzą w liście. Wtedy  $f$  faktoryzuje się do przekształcenia  $\tilde{f}$  na zbiorze tych linii (który można utożsamić z odcinkiem poziomym).

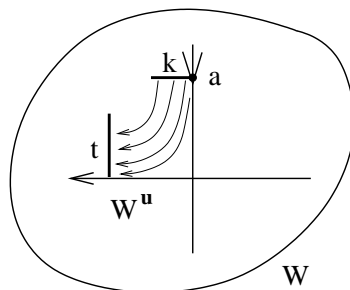


Rysunek 13.2: Wykres  $\tilde{f}$ . 0 odpowiada linii  $l$ .

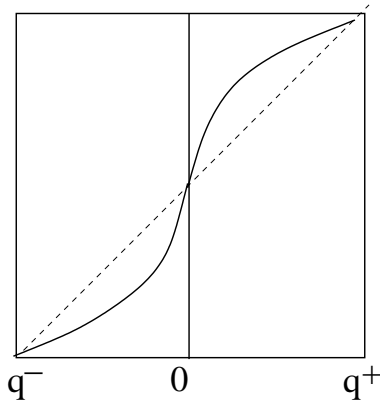
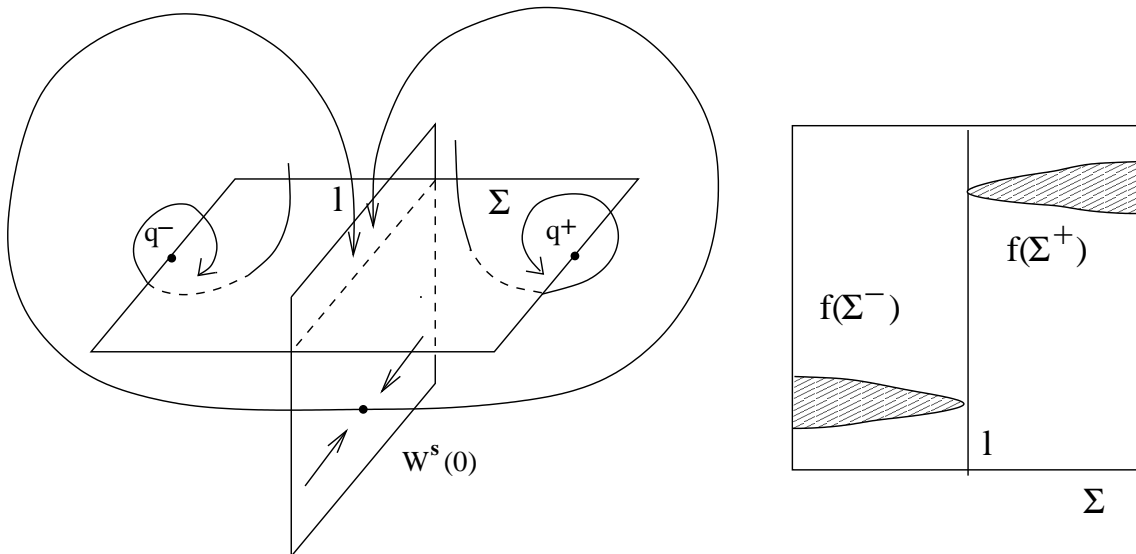
Dla  $\rho \geq 10$   $f'(0) = \infty$  (pochodne prawostronna i lewostronna). Wynika to z

$$\frac{8}{3} = \beta < \lambda_1(0) = \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \sigma)}}{2} \approx \frac{11}{2}.$$

Wynika to stąd, że na powierzchni  $W$  niezmienniczej stycznej do wektorów odpowiadających wartościom własnym  $-\beta, \lambda_1$  przekształcenie między cięciami Poincaré'go  $k, t$  w punkcie  $a$  ma pochodną  $\infty$ .



Ćwiczenie 13.4. Pokazać, że jest to funkcja Holdera z wykładnikiem  $\frac{\beta}{\lambda_1(0)}$ .



Dla pewnej liczby  $\rho_t \approx 13.926$  mamy  $W^u(0) \setminus 0 \subset W^s(0)$  ( $\tilde{f}(l) \subset l$ ). Kiedy robi się  $\rho > \rho_t$  mamy

Dla  $\tilde{f}$  powstały dwa nowe punkty stałe  $r^\mp$ , źródła. Dla  $f$  daje to w odpowiednich liściach dwa siodła, a dla potoku pola  $V(\rho)$  dwie orbity okresowe, siodłowe (wymiarzy rozmaitości stabilnej i niestabilnej = 2). Oznaczając  $\tilde{f}^-$ ,  $\tilde{f}^+$  odpowiednio lewą i prawą gałąź  $\tilde{f}$  rozszerzoną ciągle do 0 mamy

$$\tilde{f}^- > r^+, \quad \tilde{f}^+ < r^-, \quad \text{bo } \tilde{f}'(0) = \infty.$$

Zatem

$$\left\{ \tau \mid \tilde{f}^n(\tau) \in [r^-, r^+]; \forall n \geq 0 \right\}$$

to zbiór Cantora. To dla potoku pola  $V(\rho)$  daje **niezmienniczy zbiór hiperboliczny** (na  $[r^-, r^+]$   $\tilde{f}$  jest rozciągające;  $|\tilde{f}'| > 1$ , w kierunku włókien jest kontrakcją.)

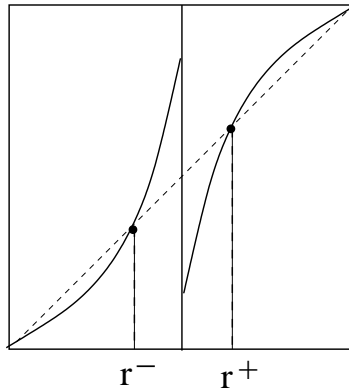
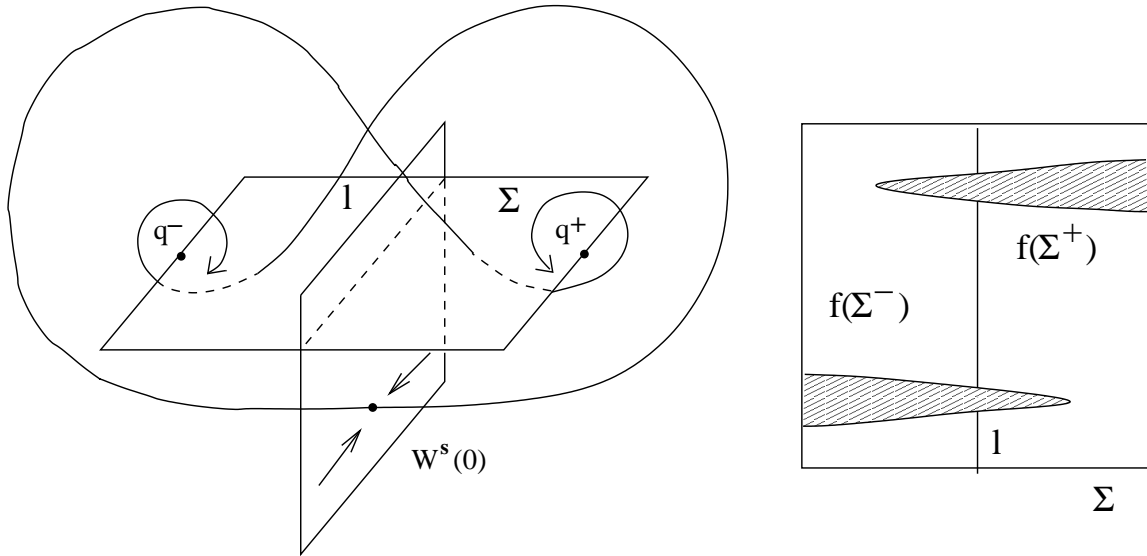
Dla pewnej liczby  $\rho = \rho_a \approx 24.06$  mamy

$$\tilde{f}^- = r^+, \quad \tilde{f}^+ = r^-,$$

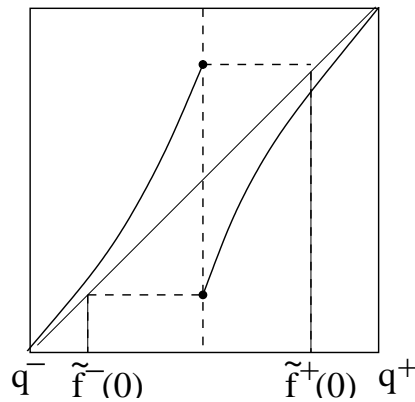
zatem  $\tilde{f}([r^-, r^+]) \subset [r^-, r^+]$ .

Dla  $\rho > \rho_a$  nawet  $\tilde{f}([r^-, r^+]) \subset (r^-, r^+)$ . Mamy atraktor

$$\tilde{L}_\rho = \bigcap_{n \geq 0} \tilde{f}^n([r^-, r^+])$$



zawarty w  $[\tilde{f}^-(0), \tilde{f}^+(0)] \subset (r^-, r^+)$ . Ten atraktor istnieje nadal, gdy staje się  $\rho > \rho_h$ . Bifurkacja Hopfa, która wtedy zachodzi pochłania  $r^-, r^+$ , ale nie wpływa na odsunięty od  $r^-, r^+$  atraktor  $\tilde{L}$ . Dla potoku pola  $V(\rho)$  daje to atraktor  $L_\rho$ , 2-wymiarowy chaotyczny (to

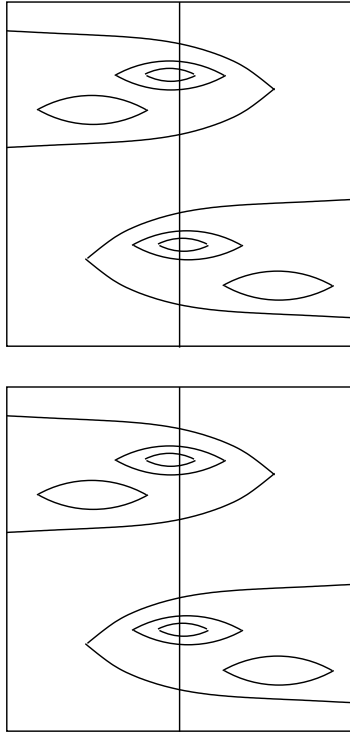


znaczy taki, że “prawie każda” trajektoria jest w nim gęsta).

*Ćwiczenie 13.5.* Pokazać, że dla  $\tilde{f}$  prawie każdy punkt w  $[\tilde{f}^-(0), \tilde{f}^+(0)]$  ma trajektorię gęstą. Pokazać, że punkty okresowe są gęste w  $\tilde{L}_\rho$ .

*Uwaga 13.6.* Atraktor  $\tilde{L}_\rho$  nazywa się **geometrycznym atraktorem Lorenza**, a badany





potok **geometrycznym potokiem Lorenza**.

Rzecz w tym, że założyliśmy istnienie niezmienniczej foliacji dla  $f$ . Nie wiadomo czy ten model odpowiada rzeczywistości, to znaczy czy zawsze, lub dla jakich parametrów  $\rho$ , taka foliacja istnieje.

Obecnie trwają intensywne badania dotyczące tego jakie zjawiska dla geometrycznego potoku Lorenza i dla jakich  $\rho$  zachodzą dla prawdziwego potoku Lorenza (to znaczy spełniającego 13).

Przypomnę jeszcze parametry:

- $\rho = 1$   
0 staje się źródłem, powstają dwa ścieki  $q^\pm$ .
- $\rho = \rho_t \approx 13.926$   
Powstają orbity okresowe (nawet zbiór hiperboliczny, więc nieskończenie wiele orbit okresowych).
- $\rho = \rho_a \approx 24.06$   
Powstaje geometryczny atraktor Lorenza.
- $\rho = \rho_h = 24.74$   
Bifurkacja Hopfa w  $q^\pm$ , ostra utrata stabilności, atraktor Lorenza nadal istnieje.

*Uwaga 13.7.* Dla geometrycznego potoku sytuacja jest podobna, chociaż trudniejsza niż dla *expanding* atraktorów Williamsa (solenoid, DA-atraktor, atraktor Plykina - Wykład 9), gdzie także  $f$  zachowuje niezmienniczą foliację, na której jest kontrakcja, a  $\tilde{f}$  rozciąga na rozgałęzionej rozmaitości (krzywej)  $N$ . Atraktor był wtedy granicą odwrotną

$$\dots \rightarrow^{\tilde{f}} N \rightarrow^{\tilde{f}} N \rightarrow^{\tilde{f}} \dots$$

Ćwiczenie 13.8. Czy atraktor Lorenza jest też granicą odwrotną  $\tilde{f}$ ?

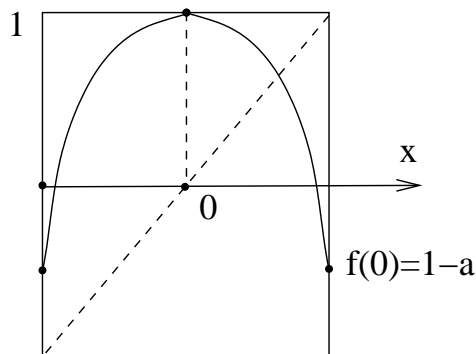
Trudniejsza sytuacja niż dla geometrycznego potoku Lorenza pojawia się dla tak zwanego atraktora Henona.

$$f_a(x, y) = (1 - ax^2 + by, x), \quad a, b > 0.$$

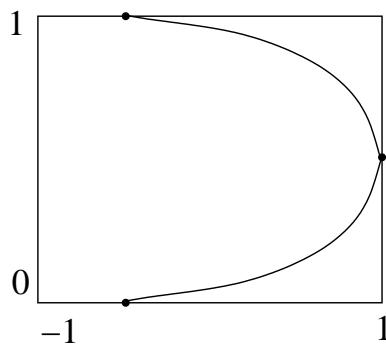
Policzmy

$$Df_a(x, y) = \begin{pmatrix} -a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det Df_a = b.$$

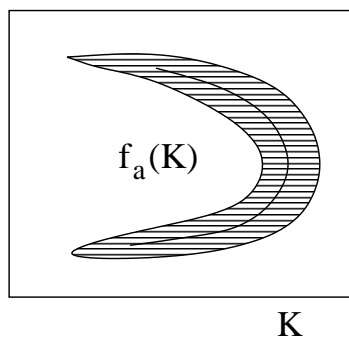
Przyjmuje się  $b < 1$  i ustala. Wtedy rozważa się rodzinę  $f_a$  z parametrem  $a$ .  $f_a$  zmniejsza miarę Lebesgue'a (o czynnik  $b$ ). Dla  $y = 0$ ,  $0 \leq a \leq 2$ , odcinek  $[-1, 1]$  przechodzi w siebie przy funkcji  $1 - ax^2$ . Oto wykres



Obraz  $[-1, 1] \times \{0\}$  przy  $f_a$  wygląda następująco Obraz  $K = [-1 - 2b, 1 + 2b] \times [-b, 1 + b]$



jest zawarty we wnętrzu  $K$  dla  $a \geq \frac{1}{2}$ ,  $b \leq \frac{1}{2}$ . Poziome kreski to obrazy pionowych odcinków  $x = \text{const}$ . **Pytanie** (Problem) Dla jak wielu parametrów  $a$  istnieje



$$K_1 \subset K, \quad f(K_1) \subset \text{int } K_1,$$

taki, że atraktor

$$\Lambda_a = \bigcap f_a^n(K_1)$$

jest **chaotyczny** (to znaczy na przykład zawiera orbitę gęstą). ( $\Lambda_a = \bigcap f_a^n(K)$  na ogół nie jest chaotyczny, zawiera siodła, w których  $W^u$  zbiega do mniejszego atraktora  $\Lambda_a = \bigcap f_a^n(K_1)$  jak dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a.) Na ogół (czy zawsze?) ten atraktor nie jest hiperboliczny. Udowodniono jednak (Benedicks, Carleson), że dla bardzo małych  $b$  zbiór takich parametrów  $a$ , że  $\Lambda_a$  jest chaotyczny niejednostajnie hiperboliczny, ma dodatnią miarę Lebesgue'a.

**Niejednostajnie hiperboliczny** oznacza istnienie rozkładu  $T_\Lambda \mathbb{R}^2$  na mierzalne podwiązki  $E^s \oplus E^u$  i liczby  $\lambda > 1$ , mierzalnej funkcji  $C > 0$  **prawie wszędzie** takich, że

$$\|Df_a^n(v)\| \geq C(x)\lambda^n \text{ dla } v \in E^u(x),$$

$$\|Df_a^n(v)\| \leq C^{-1}(x)\lambda^{-n} \text{ dla } v \in E^s(x).$$

**Prawie wszędzie** względem tak zwanej **miary Sinaja-Bowena-Ruelle'a** na  $\Lambda_a$

$$\mu_{SBR} = \lim \frac{1}{n} \sum f_*^n(\delta_y),$$

$\delta_y$  to delta Diraca,  $y$  Lebesgue'a prawie każdy punkt w  $K$  (zamiast  $\delta_y$  można wziąć po prostu miarę Lebesgue'a na  $K$ ). Trzeba zamiast  $Leb_2$  brać miarę  $\mu_{SBR}$  bo miara Lebesgue'a  $Leb_2(\Lambda_a) = 0$ . Miara  $\mu_{SBR}$  zastępuje nam miarę Lebesgue'a, miary warunkowe na rozmaitościach niestabilnych

$$\{ \mu_{SBR} |_{W_{loc}^u} \}$$

w  $\Lambda_a$  są równoważne miarom Lebesgue'a jednowymiarowych, na liściach  $W_{loc}^u$ , to znaczy miarom długości, przy tym  $W_{loc}^{u(s)}$  istnieją dla prawie wszystkich punktów w  $\Lambda_a$  i  $W_{loc}^u \subset \Lambda_a$  (analogicznie dla *expanding*-atraktorów, Wykład 9).

Częścią twierdzenia jest istnienie  $\mu_{SBR}$  i niezależność granicy od  $y$ , dla dodatniej miary zbiotu parametrów  $a$ .

Rozważa się  $b$  bardzo małe po to, żeby można było zastosować teorię iteracji przekształceń odcinka (to odpowiada  $b = 0$ )

$$g_a(x) = 1 - ax^2, \quad g_a: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$

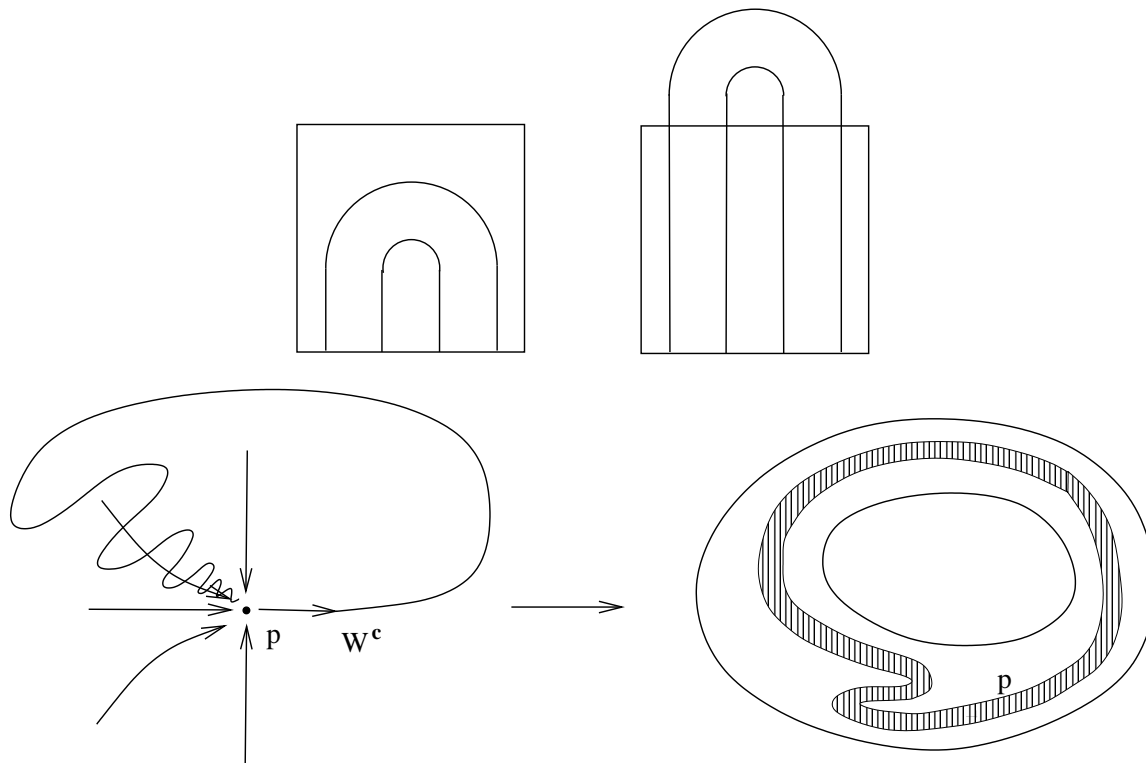
(Świątek, Lyubich, Nowicki, Martens)

**Twierdzenie 13.9.** *W rodzinie  $g_a$ ,  $0 \leq a \leq 2$  zbiór  $\mathcal{A}$  parametrów  $a$  takich, że istnieje orbita okresowa przyciągająca, a w uzupełnieniu zbiór na którym  $g > 1$ , skończony lub Cantora, jest gęsty w  $[0, 2]$ .  $[0, 2] \setminus \mathcal{A}$  ma dodatnią miarę Lebesgue'a i dla prawie wszystkich  $a \in [0, 2] \setminus \mathcal{A}$  istnieje miara  $\mu_{SBR}$ , niezmiennicza dla  $g_a$ , równoważna mierze Lebesgue'a na  $\Lambda_g$ . Dla dodatniej miary zbioru parametrów  $a$  zachodzi **niejednostajne rozciąganie** na atraktorze  $\Lambda_a$ , nośniku miary  $\mu_{SBR}$  (nie wiadomo czy dla prawie wszystkich)  $a \in [0, 2] \setminus \mathcal{A}$ . Dla prawie wszystkich  $a \in [0, 2] \setminus \mathcal{A}$ ,  $\Lambda_a$  jest chaotyczny.*

Niejednostajne rozciąganie oznacza

$$|(g_a^n)'(x)| \geq C(x)\lambda^n, \quad \lambda > 1, \quad C - \mu_{SBR}\text{-mierzalna}, \quad C > 0.$$

Zjawiska prowadzące do pojawiania się straktorów Henona, lub podobnych często występują dla ogólnych 1-parametrowych rodzin dyfeomorfizmów (lub równań różniczkowych).



*Przykład 13.10.* Atraktor Henona pojawia się “po drodze” do podkowy Smale’a.

*Przykład 13.11.* Bifurkacja siodło-węzeł w  $\mathbb{R}^2$  przy istnieniu krytycznego cyklu Po pchnięciu w prawo w punkcie  $p$  otrzymujemy atraktor Henona.

### Uzupełnienie Wykładu 12. Kaczki.

W równaniu Van der Pola

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \frac{1}{3}x^3 + x = F_1(x, y) = y - f(x) \\ \dot{y} = -\epsilon x = F_2(x) \end{cases} \quad F = (F_1, F_2),$$

dla  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ , zero  $F_2$  leży blisko jednego z punktów krytycznych  $f$ . Zbadajmy więc następującą 2-parametrową rodzinę równań różniczkowych (parametry to  $\epsilon, a$ ):

$$\dot{x} = y - f(x)$$

$$\dot{y} = \epsilon(a - x),$$

gdzie  $f$  ma minimum lokalna w 0 i maksimum lokalne w punkcie  $x_{max} < 0$  i są to jedyne ekstrema  $f$ . Będziemy badać dwa przypadki

1.  $f'''(0) > 0$ , na przykład  $f(x) = x^3 + x^2$  (jak w równaniu Van der Pola, po afinicznej zmianie współrzędnych  $x, y$ ). Ogólnie  $f(x) = x^2 + x^3 + \dots$  w otoczeniu 0. Ustalmy małe  $\epsilon > 0$  i zmieńmy  $a$ . Zero pola przesunie się po krzywej  $y = f(x)$  i jest w  $x = a$ . Mamy

$$DF = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & 1 \\ -\epsilon x & 0 \end{pmatrix},$$

a w zerze  $p(a)$

$$DF = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(a) & 1 \\ -\epsilon a & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{tr } DF(p(a)) = 0,$$

gdy  $a$  jest punktem krytycznym  $f$ , czyli dla  $a \approx 0$ , dokładnie gdy  $a = 0$ . Wtedy mamy parę urojonych sprzężonych wartości własnych. Sprawdzimy, że jest to bifurkacja Hopfa. Można policzyć postać normalną, ale jest to dość kłopotliwe. Można też postąpić następująco: Układ

$$\dot{x} = y - x^2, \quad \dot{y} = -\epsilon x \quad \} = F_x(x, y)$$

daje dla różniczki  $\epsilon x dx + (y - x^2) dy = 0$ . To nie jest różniczka zupełna, ale ma **czynnik całkujący** postaci  $\phi(y)$ . Otrzymujemy bowiem równanie różniczkowe

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \epsilon x + \phi(y) \cdot 2x = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{\epsilon} \phi(y),$$

na przykład  $\phi(y) = \cosh(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} y)$ . Otrzymujemy całkę pierwszą  $H = \frac{1}{2} \epsilon x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \dots$  (część wyższego stopnia). Obszary ograniczone krzywymi  $H = \text{const}$  dla  $x, y \approx 0$  są więc wypukłe i pole  $G = (-x^3, 0)$  zaburzające  $(y - x^2, -\epsilon x)$  jest skierowane do środka. Mamy  $\forall h > 0$  i stałej  $C > 0$

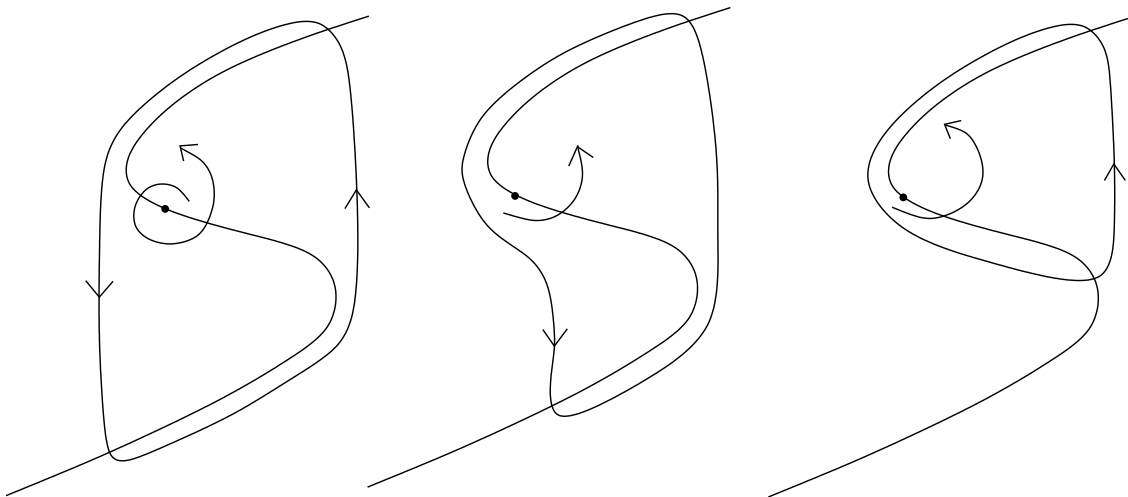
$$\int_{H=h^2, 0 \leq t \leq t_1} dH(G) dt \leq -Ch^4.$$

To szacuje ubytek  $H$  po czasie  $t_1$  wzdłuż trajektorii pola  $F_0 + G$  (Porównaj Wykład 11). Zatem

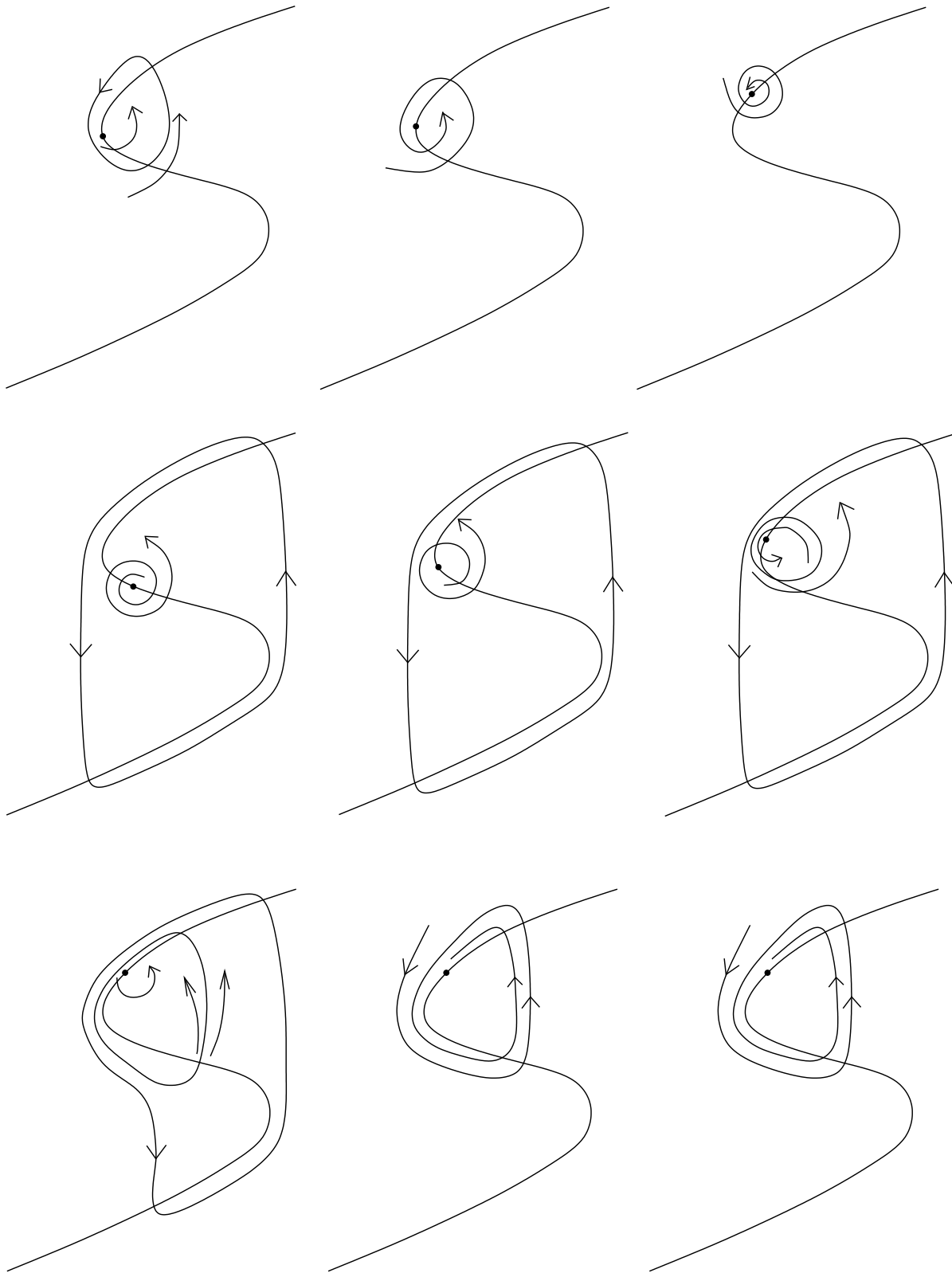
$$|h^2(t_1) - h^2| \geq Ch^4, \quad \text{więc } h - h(t_1) \geq Ch^3.$$

Jest to więc **bifurkacja Hopfa**, miękka utrata stabilności gdy  $a$  przechodzi od  $a > 0$  do  $a < 0$  ( $\text{tr } Df(pa) = -2a + o(a)$ ).

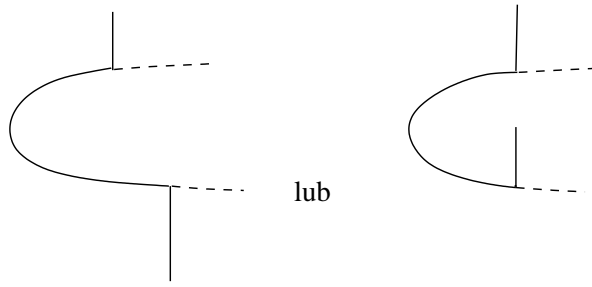
Dla  $a \ll 0$  mamy sytuację taką jak dla drgań relaksacyjnych (Wykład 12).



2. Dla  $f'''(0) < 0$ , na przykład  $f(x) = x^3 + x^2 + x^5$  mamy dla  $a = 0$   $G$  skierowane na zewnątrz krzywych całkowych  $H = \text{const}$  i bifurkacją Hopfa z ostrą utratą stabilności gdy  $a$  przechodzi od liczb dodatnich do ujemnych. Widocznie coś musiało się stać już dla  $a > 0$ . Prześledźmy bifurkację zaczynając od  $a \ll 0$ . Wybierzmy dwie dowolne



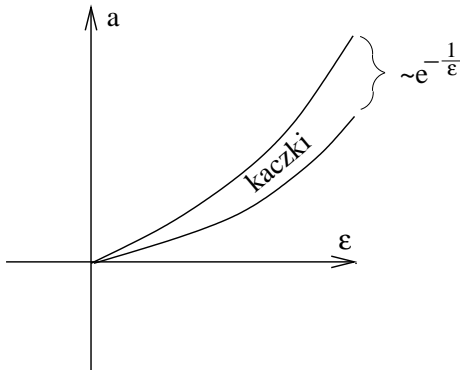
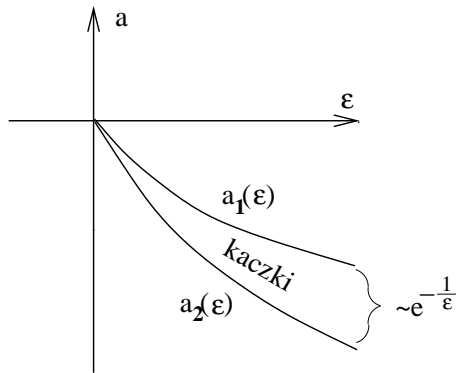
krzywe  $a(\epsilon)$  takie, że gdy  $\epsilon \rightarrow 0$  mamy  $a \rightarrow 0$  a i dla  $\epsilon$ ,  $a(\epsilon)$  istnieją rozwiązania, które w granicy zawierają krzywą  $W$  wtedy dla dwóch takich  $a_1(\epsilon)$ ,  $a_2(\epsilon)$  mamy



$$a_1(\epsilon) - a_2(\epsilon) \leq e^{-\frac{1}{c\epsilon}}$$

dla stałej  $c > 0$ . Ten fakt to

**Twierdzenie 13.12.** *Życie kaczek jest krótkie.*







# Wykład 14

Zajmiemy się kaskadami i potokami zachowującymi miarę Lebesgue'a, w przypadku wymiaru 2, lub **formą symplektyczną**

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

w przypadku wymiaru  $2n$ , współrzędne to  $q_i, p_i, i = 1, \dots, n$ . Potok dla równań hamiltonowskich

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

spełnia tę własność. Zachowanie  $\omega$  implikuje zachowanie miary Lebesgue'a, bo

$$\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n = n! dp_1 \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_n$$

Forma symplektyczna to 2-forma zamknięta  $\omega$  taka, że  $X \rightarrow \omega(X, \cdot)$  w każdym punkcie  $x$  jest izomorfizmem  $T_x \rightarrow T_x^*$  (przestrzeni stycznej w kostkę). Tw. Darboux mówi, że lokalnie, w odpowiednich współrzędnych forma symplektyczna ma postać  $\sum dq_i \wedge dp_i$ .

Na ostatnim wykładzie z Równań Różniczkowych Zwyczajnych mówiłem o równaniu wahadła

$$\ddot{x} = -a \sin x, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \quad (14.1)$$

Obraz fazowy  $y = \dot{x}$  na  $S^1 \times \mathbb{R}$

$p = (0, 0)$  centrum (nieliniowe),

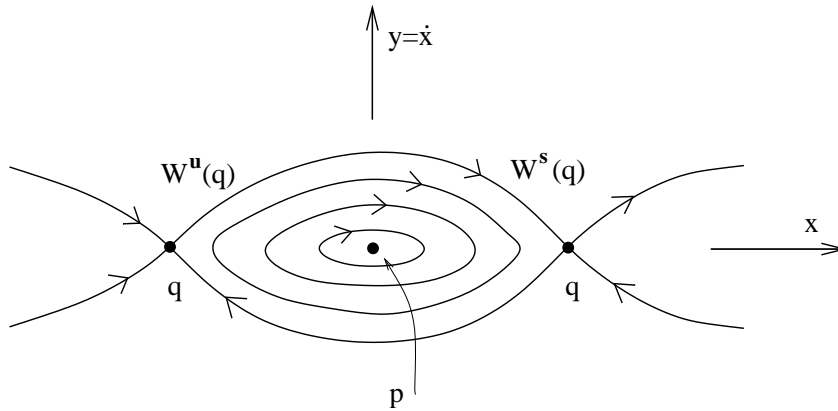
$q = (\pi, 0)$  siodło. Jeśli do prawej strony dodamy funkcję zależną okresowo od czasu to otrzymamy nadal równanie hamiltonowskie (nieautonomiczne). Oznaczając okres przez  $T$  otrzymamy dyfeomorfizm  $S^1 \times \mathbb{R}$  zachowujący miarę  $f = \phi^T$ . Separatrysy  $W^u(q)$  i  $W^s(q)$  mogą przecinać się transversalnie. Może powstać słynny obrazek:

z wieloma krzywymi zamkniętymi niezmienniczymi i okresowymi orbitami **eliptycznymi** (para sprzężonych urojonych wartości własnych części liniowej) i siodłami z homoklinicznymi punktami przecięcia (co implikuje istnienie podków Smale'a i hiperboliczność zbiorów niezmienniczych; Wykład 8, przykład 1).

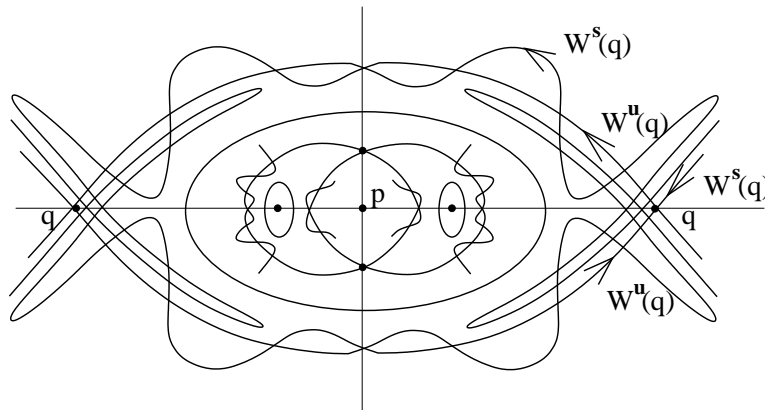
Podam podstawowe fakty opisujące zachodzące tu zjawiska w wymiarze 2 i dla wyższych wymiarów.

Teoria **KAM** (Kolmogorov, Arnold, Moser) mówi, że po zaburzeniu dodaniem funkcji do siły  $-a \sin x$  w 14.1 wiele niezmienniczych okręgów pozostanie niezmienniczymi krzywymi zamkniętymi (mogą nieco zmienić położenie).

Teoria **Birkhoffa** mówi, że powstanie między nimi wiele orbit okresowych.



Rysunek 14.1:



Rysunek 14.2:

Teoria **Aubry'ego-Mathera** mówi, że chociaż niektóre okręgi znikną, pozostaną w ich miejscu zbiory Cantora z przekształceniem obrotu na nich.

Wiele spośród powstałych orbit okresowych to orbity **eliptyczne** wokół których znowu wiele miejsca jest zajętego przez krzywe zamknięte niezmiennicze, ale w szczelinach między nimi są siodła i punkty homokliniczne, są też orbity okresowe, eliptyczne itd.

**Problem:** Czy uzupełnienie zbioru wszystkich krzywych zamkniętych wokół punktów eliptycznych wszystkich rzędów w powyższym opisie ma dodatnią miarę? Czy istnieje dodatniej miary **niezmienniczy zbiór chaotyczny**?

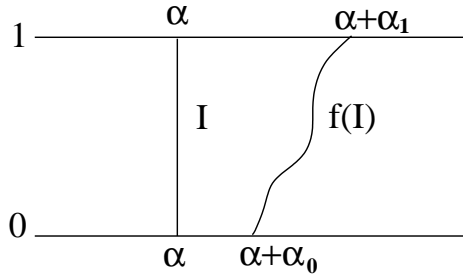
Zbadajmy najprostszy model dyfeomorfizmu:

$$f: S^1 \times [0, 1]$$

zachowuje miarę Lebesgue'a, jest obrotem na  $S^1 \times \{0\}$  i  $S^1 \times \{1\}$  i spełnia warunek **skręcenia** (*twistu*):

$$\text{dla } f = (f_1(\alpha, r), f_2(\alpha, r)) \quad \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} > 0.$$

**Twierdzenie 14.1.** (*Birkhoff*) *Jeśli na  $S^1 \times \{0\}$  i  $S^1 \times \{1\}$   $f$  jest obrotem odpowiednio o kąty  $\alpha_0 < \alpha_1$  i jeśli ułamek  $\frac{p}{q}$  spełnia  $\alpha_0 < \frac{p}{q} < \alpha_1$  to istnieją co najmniej 2 orbity okresu  $q$ . Każda z tych orbit jest tak zwaną  $(p, q)$ -orbitą Birkhoffa, to znaczy wszystkie punkty orbity*



Rysunek 14.3:

mają parami różne współrzędne  $\alpha$  i jeśli je uporządkować jako  $(\alpha_1, r_1), \dots, (\alpha_{q-1}, r_{q-1})$  tak, żeby na  $S^1$   $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{q-1} < \alpha_1$  to

$$f(\alpha_i, r_i) = (\alpha_{(i+p) \bmod q}, r_{(i+p) \bmod q}).$$

Funkcja  $\alpha_i \rightarrow r_i$  jest funkcją Lipschitza, ze stałą Lipschitza zależną od  $\inf \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}$ .



Rysunek 14.4:

*Dowód.* na ćwiczeniach. □

*Uwaga 14.2.* Analogiczne twierdzenie było na ćwiczeniach udowodnione dla przekształcenia okręgu stopnia 1, gdzie  $[\alpha_0, \alpha_1]$  to odcinek obrotu.

*Uwaga 14.3.* Jeśli  $\alpha_0 < 0 < \alpha_1$ ,  $f$  homeomorfizm, to nawet bez założenia “twistu” można udowodnić istnienie dwóch punktów stałych. Ten fakt to **Geometryczne Twierdzenie Poincaré’go** (zwane też: Ostatnie Tw. Poincaré’go; Poincaré udowodnił je niedługo przed śmiercią). Precyzyjny dowód podał dopiero Birkhoff: George D. Birkhoff “Dynamical Systems”, 1927 r.)

**Twierdzenie 14.4.** (Aubry, Mather)

Jeśli  $f$  spełnia założenia **twistu**, jak wyżej i  $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , to istnieje funkcja Lipschitza  $\phi: S^1 \rightarrow [0, 1]$  taka, że jej wykres zawiera zbiór  $X$  niezmienniczy dla  $f$ , zwarty, minimalny,  $f$  zachowuje na nim porządek (w sensie porządku w  $S^1$ ) i liczba obrotu jest równa  $\alpha$ . Zbiór  $X$  to albo zbiór Cantora, nazywa się wtedy zbiorem Aubry’ego-Mathera albo (topologicznie) okrąg.

*Dowód.* (idea, książka Katok, Hasselblatt)

$\alpha = \lim \frac{p_n}{q_n}$ . Znajdujemy  $(p_n, q_n)$  orbity Birkhoffa  $X_n$ , łączymy punkty każdej z nich łamaną jak na rysunku (??). Ze wspólnej Lipschitzowości wynika istnienie podciągu zbieżnego. W wykresie granicy jako  $X$  bierzemy granicę podciągu  $X_n$  (w metryce Hausdorffa między zbiorami zwartymi). □

**Twierdzenie 14.5.** (KAM)

Niech dla  $\lambda, h_1, h_2 \in C^r$  ( $r \geq 5$ )

$$f_\epsilon(\alpha, r) = (\alpha + \lambda(r) + \epsilon h_1(\alpha, r, \epsilon), r + \epsilon h_2(\alpha, r, \epsilon)), \quad (14.2)$$

gdzie  $\frac{\partial \lambda}{\partial r} > 0$  i  $f_\epsilon$  zachowuje miarę Lebesgue'a  $Leb_2$ . Wtedy dla  $\epsilon$  dostatecznie małego istnieje zbiór  $f_\epsilon$ -niezmienniczych minimalnych krzywych zamkniętych (wykresów funkcji z  $S^1$  do  $[0, 1]$ )  $\gamma_\rho^\epsilon$  (liczba obrotu na  $\gamma_\rho^\epsilon$  jest równa  $\rho$ ) i

$$Leb_2 \left( \bigcup \gamma_\rho^\epsilon \right) / Leb_2 (S^1 \times [0, 1]) \rightarrow 1, \text{ gdy } \epsilon \rightarrow 0.$$

Jeśli także  $\lambda$  zależy od  $\epsilon$ ,  $\lambda = \lambda(r, \epsilon)$ , to należy założyć, że

$$\frac{\epsilon}{\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}} \rightarrow 0, \text{ gdy } \epsilon \rightarrow 0.$$

*Uwaga 14.6.* Dla każdego  $\rho$  może istnieć co najwyżej jedna krzywa  $\gamma_\rho$  (warunek **twistu**  $\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}$  powoduje, że na nią liczba obrotu na takich krzywych jest  $> \rho$ , pod nią  $< \rho$ ). Dla  $\epsilon = 0$  układ jest całkowalny, to znaczy istnieje funkcja,  $r$ , niezmiennicza wzdłuż trajektorii,  $\gamma_\rho$  to okrąg  $\lambda(r) = \rho$ . Gdy zaburzamy  $f_0$ ,  $\epsilon$  oddala się od 0, część okręgów, dla  $\rho$  wymiernych lub szybko aproksymowalnych liczbami wymiernymi rozsypuje się dając  $(p, q)$ -orbity Birkhoffa lub zbiory Aubry'ego-Mathera. Najdłużej pozostają  $\gamma_\rho^\epsilon$  takie, że  $|q\rho - p| \geq \frac{\epsilon}{q}$ .

*Przykład 14.7.* Przekształcenie standardowe

$$f_\epsilon(\alpha, r) = (\alpha + r, r + \epsilon \sin(\alpha + r)).$$

(Dla tego przykładu problem (??) jest także nierozwiązany).

**Twierdzenie 14.8.** Jeśli  $f$  jest  $C^r$ -dyfeomorfizmem otoczenia  $0 \in \mathbb{R}^2$  w  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $r \geq 5$ , punktem eliptycznym,  $Df(0)$  ma parę  $\lambda, \bar{\lambda}$  wartości własnych sprzężonych o module 1,  $\lambda^q \neq 1$   $q = 1, 2, 3, 4$  zachowującym miarę Lebesgue'a i pierwszy współczynnik Birkhoffa  $a_1$  jest niezerowy, to w otoczeniu 0 istnieją niezmiennicze krzywe zamknięte (o indeksie 1 wokół 0), których suma ma miarę dodatnią i 0 jest punktem gęstości.

**Definicja 14.9.** Postać normalna  $f$  w 0 to

$$\hat{f}(z) = \lambda z + a_1 z |z|^2 + \dots$$

**Pierwszym współczynnikiem Birkhoffa** nazywa się liczbę  $a_1$

*Dowód.* (idea)

Zauważmy, że  $\Re a_1 \neq 0$ , w przeciwnym razie  $\hat{f}$  (lub  $\hat{f}^{-1}$ ) przeprowadzałyby mały dysk w siebie. Zatem  $f$  (lub  $f^{-1}$ ) przeprowadzałyby jakieś otoczenie 0 w siebie, co przeczyłoby zachowywaniu miary Lebesgue'a przez  $f$ . Zatem część rzędu 3 dyfeomorfizmu  $\hat{f}$ ,  $j^3 \hat{f}$  zachowuje miarę Lebesgue'a, jest obrotem na każdym okręgu  $|z| = Const$ .

Można znaleźć dyfeomorfizm  $H$  taki, że  $H \circ f = \hat{f} \circ H$  zachowuje miarę Lebesgue'a. (To nie jest całkiem proste: Siegel, Moser "Lectures on Celestial Mechanics"). Wtedy także  $\hat{f}$  zachowuje miarę Lebesgue'a.

Funkcja

$$(x, y) \mapsto (Arg(x, y), \frac{1}{2}(x^2 + y^2))$$

także zachowuje miarę Lebesgue'a.

*Ćwiczenie 14.10.* Policzyc Jacobian funkcji odwrotnej.

We współrzędnych  $\alpha = Arg(x, y)$ ,  $I = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  funkcja  $g$  powstała z  $\hat{f}$  jest małym zaburzeniem  $g_0$  powstałej z  $j^3 \hat{f}$ , tym mniejszym im bliżej  $I = 0$ . Jednocześnie  $g_0(\alpha, I) = (\alpha + \Im a_1, I)$ , gdzie  $\Im a_1 \neq 0$ , spełniony jest więc warunek *twistu*. Można skorzystać z Tw. KAM.

(Dokładniej: Należy dla  $\epsilon \rightarrow 0$  wprowadzić współrzędne  $(\alpha, I) \rightarrow (\alpha, \frac{I}{\epsilon})$  i  $\forall \epsilon$  rozpatrywać  $g$  i  $g_0$  na pierścieniu  $I \leq \epsilon$ , a w nowych współrzędnych na niezależnym od  $\epsilon$  pierścieniu  $I \leq Const$ . Oznaczmy  $g$  i  $g_0$  w tych współrzędnych przez  $g^\epsilon$ ,  $g_0^\epsilon$ . Spełniają one założenia dla  $f_\epsilon$  i  $f_0$  z tw. KAM (dla  $f_0$   $\lambda$  zależy od  $\epsilon$ ). Szczegóły: Siegel, Moser.)  $\square$

**Wniosek 14.11.** *Punkt 0 jest stabilny w sensie Lyapunowa.*

*Dowód.* Trajektorie nie mogą przekroczyć krzywych zamkniętych niezmienniczych, wokół 0.  $\square$

Dla układu równań hamiltonowskich na podzbiórce  $\mathbb{R}^{2m}$  można ograniczyć się do hiperpowierzchni o stałym hamiltonianie  $H$  (bo  $H$  jest całką pierwszą). Na niej układ jest nadal **hamiltonowski**, w tym sensie, że można wziąć cięcie transwersalne wymiaru  $2(m - 1)$  i rozpatrywać układ we współrzędnych tego cięcia z **hamiltonianem zależnym od czasu** (to znaczy nieautonomicznym). Można też rozważać przekształcenie pierwszego powrotu.

Jeśli  $m = 2$  to otrzymujemy przekształcenie pierścienia jak w Tw. KAM na pierścieniu. Stąd wniosek, że jeśli układ ma dostatecznie wiele całek pierwszych (w inwolucji: będzie o tym mowa w II semestrze), że sprowadza się do układu na hiperpowierzchni wymiaru 4, to przy odpowiednich założeniach *twistu* istnieje wiele niezmienniczych torusów  $\mathbb{T}^2$  (topologicznych) niezmienniczych. W szczególności trajektoria okresowa jest stabilna w sensie Lyapunowa. Na tym opierają się tak zwane **“pułapki magnetyczne”**.

Ogólne twierdzenie można sformułować następująco:



Rysunek 14.5:

**Twierdzenie 14.12.** (KAM)

*Dla funkcji hamiltona*

$$H = H_0(I) + \epsilon H_1(\phi, I), \quad I \in G \subset \mathbb{R}^m, \quad \phi \in \mathbb{T}^m \text{ (torus),}$$

*przy założeniu, że macierz*

$$\left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right)_{i,j=1,\dots,m}$$

*ma rząd  $m$ , dla  $\epsilon$  odpowiednio małego, większość torusów niezmienniczych układu*

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

jest “zachowywana” dla układu

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \\ \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi} \end{cases}$$

(“Zachowywana” oznacza, że blisko torusów z polem  $\omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}$  istnieją torusy niezmiennicze z potokiem równoważnym topologicznie potokowi pola  $\omega(I)$ . Najtrudniej “zepsuć” torusy, na których dla  $\omega(I) = \omega_1(I), \dots, \omega_m(I)$

$$\sum_{i=1}^m r_i \omega_i \geq \frac{Const}{(|r_1| + \dots + |r_m|)^\nu}$$

dla wszystkich  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum |r_i| \neq 0$  i małych stałych liczb naturalnych  $\nu$ .)

**Twierdzenie 14.13.** (KAM w otoczeniu położenia równowagi)

Dla pola hamiltonowskiego w  $\mathbb{R}^{2m}$  dla funkcji Hamiltona  $H$  istnieje w otoczeniu 0 wiele torusów niezmienniczych wymiaru  $m$ , przy założeniu niezdegenerowania  $\det(\omega_{ij}) \neq 0$ , gdzie  $\omega_{ij}$  to współczynniki postaci normalnej hamiltonianu:

$$H = \sum \omega_k I_k + \sum \omega_{ij} I_i I_j + \dots, \quad I_k = (p_k^2 + q_k^2).$$

(Mówiąc o postaci normalnej jak wyżej zakłada się brak rezonansów  $\sum r_i \omega_i \neq 0$  dla  $r_i \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < \sum |r_i| \leq 4$ .)

*Uwaga 14.14.* Dla  $m > 1$  istnienie tych torusów nie zapewnia stabilności Lyapunowa, torusy  $\mathbb{T}^m$  nie rozcinają bowiem  $\mathbb{R}^{2m}$ . Możliwa jest ucieczka między torusami: tak zwana **dyfuzja Arnolda**.

Dalsze warianty TW. KAM można znaleźć w książce “Metody Matematyczne Mechaniki Klasycznej” Uzupełnienie 8.

## 14.1. Dodatek do wykładów o Tw. Poincare’go-Bendixsona

### XVI problem Hilberta

**Twierdzenie 14.15.** (Dulac)

Założmy, że dla rzeczywistego analitycznego pola wektorowego na  $\mathbb{R}^2$  mamy cykl separatrys.

(Na rysunku są siodła, jednak można rozważać dowolne zera pola z hiperbolicznymi sektorami.)

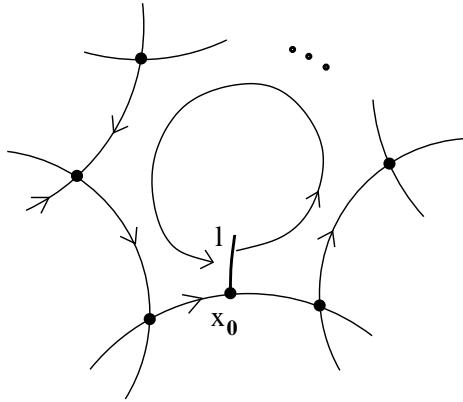
Wtedy dla dowolnego cięcia transwersalnego  $l$  przekształcenie pierwszego powrotu do  $l$  rozwija się w końcu  $l$  (punktu  $x_0$  na rysunku) w szereg Dulaca:

$$f(x) = cx^{\nu_0} + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(\log x) x^{\nu_j} + \text{część płaska.}$$

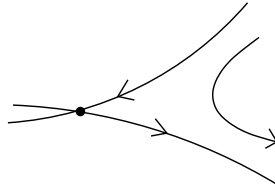
(Przyjeliśmy  $x_0 = 0$ )  $\nu_0 < \nu_1 < \dots$ ,  $P_j$  to wielomiany.

Prawdziwe jest następujące:

**Twierdzenie 14.16.** (Dulac, Ilyasenko)  $x_0$  jest punktem stałym izolowanym dla  $f$ .



Rysunek 14.6:



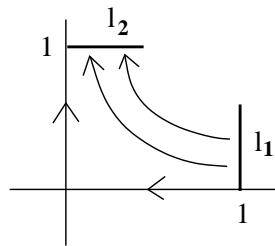
Rysunek 14.7:

*Dowód.* (idea dowodu Tw. Dulaca-Iljasenki)

Gdyby nie część płaska, można by to twierdzenie wywnioskować z rozwinięcia w szereg (podobnie jak dla funkcji analitycznych). Gdyby mogło się zdarzyć na przykład  $f(x) = x + e^{-\frac{1}{x}} \sin(\frac{1}{x})$  twierdzenie byłoby nieprawdziwe. Okazuje się jednak, że część płaska może być przedstawiona jako  $e^{-\frac{1}{f_1(x)}}$ , gdzie  $f_1$  przedstawia się jako szereg Dulaca + część płaska. Ta procedura kończy się po skończonej liczbie kroków.  $\square$

*Dowód.* (idea dowodu Tw. Dulaca)

Prześledźmy przynajmniej przekształcenie  $f$  przejścia wzdłuż trajektorii potoku od cięcia  $l_1$  do  $l_2$  dla siodła. Gdyby to było siodło liniowe z wartościami własnymi  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  to mielibyśmy



Rysunek 14.8:

oznaczając przez  $t(x)$  czas przejścia od  $x \in l_1$  do  $l_2$ ,  $f(x) = e^{t(x)\lambda_1}$  oraz  $x = e^{-t(x)\lambda_2}$ , czyli  $f(x) = x^{\nu_1}$  dla  $\nu_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ .

Wyrazy wyższego rzędu w rozwinięciu  $f$  pojawiają się w przypadku istnienia rezonansów. Pracuje się wtedy z postacią normalną.  $\square$

*Uwaga 14.17.* Tw. Dulaca-Iljasenki jest ważnym krokiem w próbach udowodnienia (rozwiąza-

nia) XVI problemu Hilberta, jego wersji dla pól wektorowych:

**Problem:** Czy  $\forall n \exists N(n)$  takie, że dla każdego równania różniczkowego w  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_1(x, y) \\ \dot{y} &= P_2(x, y) \end{aligned} ,$$

gdzie  $P_i$  to wielomiany stopnia  $\leq n$  istnieje najwyżej  $N(n)$  izolowanych trajektorii okresowych.

Na ile mi wiadomo, udało się udowodnić jedynie, że dla  $n = 2$  każde równanie różniczkowe ma skończoną liczbę izolowanych trajektorii okresowych (to nie wyklucza  $N(2) = \infty$ ). Istnieje przykład dla  $n = 2$  równania różniczkowego z czterema izolowanymi trajektoriami okresowymi.

Tw. Dulaca-Iljasenki implikuje, że w otoczeniu cyklu separatrys liczba trajektorii okresowych jest skończona.

### KONIEC

(Niektóre tematy będą kontynuowane, po przypomnieniu początków, na wykładzie z układów dynamicznych)

Uzupełnienie bibliografii:

Clark Robinson "Dynamical Systems" 2-nd edition 1999, CRC Press.