

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Karol Strzałkowski

Nr albumu: 262973

Zgrubne Grafy i Kompleksy Symplicjalne

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. Sławomira Nowaka

Maj 2010

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W poniższej pracy definiuję oraz opisuję podstawowe własności grafów zgrubnych i zgrubnych kompleksów symplecjialnych. W szczególności konstruję graf zgrubny dla dowolnej przestrzeni metrycznej oraz dowodzę równoważności grafów zgrubnych odpowiadających zgrubnie równoważnym przestrzeniom metrycznym. Przedstawiam też analogiczne twierdzenia dla kompleksów zgrubnych, oraz opisuję własności wymiaru asymptotycznego i zgrubnej n -spójności w terminach kompleksów zgrubnych.

Słowa kluczowe

graf, kompleks symplecjialny, spójność, wymiar asymptotyczny, zgrubna geometria

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

57-xx Manifolds and cell complexes

57M-xx Low-dimensional topology

57M15 Relations with graph theory

54-xx General topology

54F-xx Special properties

54F45 Dimension theory

Tytuł pracy w języku angielskim

Coarse Graphs and Simplicial Complexes

Spis treści

Wprowadzenie	5
1. Podstawowe pojęcia	7
1.1. Zgrubne przestrzenie metryczne	7
1.2. Grafy	8
1.3. Kompleksy symplecjonalne	9
2. Grafy zgrubne	13
2.1. Grafy Ripsa	13
2.2. Zgrubne grafy, zgrubne grafy przestrzeni metrycznych	14
2.3. Morfizmy grafów zgrubnych	17
3. Zgrubne kompleksy symplecjonalne	25
3.1. Kompleksy zgrubne	25
3.2. Wymiar asymptotyczny kompleksów zgrubnych	31
3.3. Spójność kompleksów zgrubnych i zgrubna geodezyjność	33
3.4. Zgrubna jednospójność	37
3.5. Zgrubna spójność w wyższych wymiarach	40
Bibliografia	43

Wprowadzenie

Zgrubna geometria jest dziedziną stosunkowo młodą w matematyce. Zastosowanie zaś do jej badania nieskończonych systemów grafów lub kompleksów symplecjonalnych jest pomysłem jeszcze nowszym. W poniższej pracy postaram się przedstawić podstawowe konstrukcje zgrubnych grafów i kompleksów symplecjonalnych. Spróbuję też pokazać ich powiązania z przestrzeniami metrycznymi, oraz płynące z tego wnioski.

Pierwszy rozdział poświęcony jest przypomnieniu podstawowych pojęć wykorzystywanych w dalszych częściach pracy. Na początku omawiane są własności i definicje dotyczące zgrubnej geometrii. Tematy te opisane są bardziej szczegółowo w [Roe] oraz [Bedl]. Następnie przypominane są pojęcia dotyczące grafów i kompleksów symplecjonalnych, oraz ustalane są pewne konwencje. Dokładniejsze informacje na ich temat można znaleźć między innymi w [Eng].

W drugim rozdziale opisywana jest konstrukcja grafów Ripsa i grafów zgrubnych odpowiadających danej przestrzeni metrycznej oraz dowód faktu, iż przekształcenia bornologiczne między przestrzeniami metrycznymi są w naturalnej bijekcji z morfizmami odpowiadających im grafów zgrubnych. Przedstawione definicje oraz wyniki są zaczerpnięte z pracy [Comb]. Mój wkład polegał na sprawdzeniu, iż morfizmy w kategorii grafów zgrubnych są dobrze zdefiniowane, uporządkowaniu dowodu twierdzenia 2.3.5, prezentacji przykładu 2.3.8 oraz przedstawieniu alternatywnego dowodu twierdzenia 2.3.9.

W rozdziale trzecim omawiane jest pojęcie zgrubnego kompleksu odpowiadającego danej przestrzeni metrycznej. W szczególności pokazane jest, że zachodzą analogiczne twierdzenia, jak w przypadku grafów zgrubnych. Pewne pojęcia dotyczące przestrzeni metrycznych, takie jak wymiar asymptotyczny, zgrubna geodezyjność czy zgrubna n -spójność są opisywane ponadto w terminach odpowiednich własności kompleksów zgrubnych. W końcu prezentowane jest twierdzenie o warunkach dostatecznych i wystarczających na to, by dana przestrzeń metryczna była zgrubnie równoważna z drzewem. Definicje i twierdzenia w tym rozdziale wzięte są z pracy [Comb]. Mój wkład polegał na podaniu wszystkich przykładów w sekcji 3.5 pokazujących, że udowodnionych wcześniej twierdzeń dla zgrubnej jednospójności na ogół nie da się uogólnić na wyższe wymiary.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

W rozdziale tym omówimy pewne podstawowe pojęcia, które będą używane w dalszej pracy. Przypomnimy podstawowe pojęcia dotyczące kategorii zgrubnych przestrzeni metrycznych, następnie wprowadzimy pojęcie grafu oraz jego geometrycznej realizacji. Na koniec przypomnimy pojęcie kompleksu sympleksyjnego.

1.1. Zgrubne przestrzenie metryczne

Przypomnijmy kilka definicji dotyczących zgrubnego patrzenia na przestrzenie metryczne:

Definicja 1.1.1. Niech X oraz Y będą przestrzeniami metrycznymi. Wówczas $f : X \rightarrow Y$ jest *bornologiczna*, jeżeli $\forall R < \infty \exists S_{R < \infty} \forall x, y \in X d(x, y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S$

Definicja 1.1.2. Niech $f, g : X \rightarrow Y$. Mówimy, że f, g są *bliskie*, jeżeli:

$$\exists d < \infty \forall x \in X d(f(x), g(x)) < d$$

Oznaczamy to $f \sim_{ls} g$. Możemy wówczas również powiedzieć, że f i g są *d-bliskie*.

Spostrzeżenie 1.1.3. *Funkcja bliska funkcji bornologicznej również jest bornologiczna. Ponadto, relacja bliskości funkcji jest relacją równoważności wśród funkcji bornologicznych $f : X \rightarrow Y$.*

W pracy tej będziemy zajmować się kategorią przestrzeni metrycznych (z metryką mogącą przyjmować również wartości nieskończone) z funkcjami bornologicznymi jako morfizmami, gdzie utożsamiamy funkcje sobie bliskie. Funkcje bornologiczne są to funkcje 'nie rozrywające zanedo punktów', widziane z dużej odległości wydają się więc ciągle. Patrząc z odpowiedniej odległości nie rozróżniamy ponadto funkcji, które niewiele się od siebie różnią, stąd utożsamienie funkcji bliskich. Przestrzenie izomorficzne w sensie tej kategorii nazywać będziemy *zgrubnie równoważnymi*. Zbiór morfizmów w tej kategorii z X do Y oznaczać będziemy $[X; Y]$.

U przestrzeni metrycznych ze zgrubnego punktu widzenia jesteśmy w stanie wyodrębnić kilka własności, będących niezmiennikami zgrubnej równoważności. Jedną z nich jest zgrubna spójność:

Definicja 1.1.4. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *zgrubnie spójna*, jeżeli metryka na X przyjmuje tylko skończone wartości

Oczywiście, podobnie jak w zwykłych przestrzeniach topologicznych, również tutaj jesteśmy w stanie mówić o *zgrubnych spójnych składowych* przestrzeni metrycznej. Inną ważną własnością będącą niezmiennikiem zgrubnej równoważności przestrzeni metrycznych jest *wymiar asymptotyczny*. Istnieje wiele równoważnych definicji dla tego pojęcia, zwłaszcza w wypadku przestrzeni metrycznych, nam jednak wystarczy jedna, bezpośrednio nawiązująca do wymiaru pokryciowego Lebesgue'a przestrzeni topologicznych. Najpierw podamy jednak kilka definicji pomocniczych:

Definicja 1.1.5. Mówimy, iż pokrycie \mathcal{U} przestrzeni metrycznej X ma *krotność* $\leq n$, jeżeli dla dowolnych istotnie różnych elementów $U_0, U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ zachodzi $U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n = \emptyset$. Mówimy przy tym, że ma *krotność* n , jeżeli ma *krotność* $\leq n$, ale nie ma *krotności* $\leq n - 1$.

Definicja 1.1.6. Rodzinę podzbiorów \mathcal{U} przestrzeni metrycznej X nazywamy *jednostajnie ograniczoną* (przez B), jeżeli $\exists B < \infty \forall U \in \mathcal{U} \text{diam}(U) < B$.

Definicja 1.1.7. Niech \mathcal{V}, \mathcal{U} będą pokryciami przestrzeni metrycznej X . Pokrycie \mathcal{V} nazywamy *wpisany* w pokrycie \mathcal{U} , jeżeli $\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} V \subset U$.

Definicja 1.1.8. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że:

- X ma *wymiar asymptotyczny* $\leq n$, jeżeli dla każdego jej jednostajnie ograniczonego pokrycia \mathcal{V} istnieje jednostajnie ograniczone pokrycie \mathcal{U} o *krotności* $\leq n + 1$ takie, że \mathcal{V} jest wpisane w \mathcal{U} . Oznaczamy to $\text{Asdim}(X) \leq n$.
- X ma *wymiar asymptotyczny* równy n , jeżeli $\text{Asdim}(X) \leq n$, ale nieprawdą jest, że $\text{Asdim}(X) \leq n - 1$. Oznaczamy to wówczas $\text{Asdim}(X) = n$.
- X ma *wymiar asymptotyczny* ∞ , jeżeli dla dowolnego $n < \infty$ nieprawdą jest, że $\text{Asdim}(X) \leq n$. Oznaczamy to $\text{Asdim}(X) = \infty$.

1.2. Grafy

Stosując kombinatoryczne podejście do problemów wielkiej skali, istotną rolę odgrywają między innymi grafy. Graf $G = (V(G), E(G))$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, zaś E to zbiór krawędzi, będziemy utożsamiać z przestrzenią metryczną $(V(G), d)$, w której punktami są wierzchołki grafu, zaś metryka jest wyznaczona przez długości najkrótszych ścieżek między wierzchołkami:

$$d(x, y) = \min n : \exists_{x=x_0, x_1, \dots, x_n=y} (x_{i-1}, x_i) \in E(G), i = 1, 2, \dots, n$$

Jeżeli dane dwa wierzchołki nie są połączone żadną ścieżką, będziemy przyjmować $d(x, y) = \infty$. Metrykę taką będziemy czasem nazywali *metryką krawędziową*.

Czasami jednak geometryczna realizacja grafu pod postacią jedynie zbioru wierzchołków nie jest wystarczająca. Z tego względu jako $|G|$ oznaczać będziemy *realizację geometryczną* grafu G . Przestrzeń ta, poza wierzchołkami $V(G)$ składa się też z odcinków izometrycznych z przedziałem $[0; 1]$, łączących wierzchołki $x, y \Leftrightarrow (x, y) \in E(G)$. Jako metrykę na całym $|G|$ przyjmujemy metrykę geodezyjną generowaną przez metryki na odpowiednich odcinkach. Łatwo zauważyć, że metryka ta obcięta do $V(G)$ pokrywa się z uprzednio ustaloną metryką na G .

Podamy teraz kilka uwag dotyczących przekształceń z grafów w przestrzenie metryczne. Mamy następujące:

Stwierdzenie 1.2.1. *Niech G będzie grafem, zaś X - przestrzenią metryczną. Wówczas funkcja $f : G \rightarrow X$ jest bornologiczna \Leftrightarrow jest Lipschitzowska.*

Dowód. (\Leftarrow) Ponieważ każda funkcja Lipschitzowska jest bornologiczna, dowód jest natychmiastowy.

(\Rightarrow) Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie funkcją bornologiczną, i niech $d(x, y) \leq 1 \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq S_1$. Pokażemy, że f jest Lipschitzowska ze stałą S_1 . Niech $d(x, y) = k$ (zauważmy, że metryka w grafie przyjmuje jedynie wartości całkowite). Wówczas istnieją $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ takie, że $(x_{i-1}, x_i) \in E(G), i = 1, 2, \dots, k$. Zatem:

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x_0), f(x_1)) + \dots + d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq kS_1$$

Zatem f jest Lipschitzowska, q.e.d. □

Widać zatem, iż badając przekształcenia bornologiczne z grafu, badamy w istocie przekształcenia Lipschitzowskie. Szczególną rolę wśród takich przekształceń odgrywają tzw. *funkcje krótkie*:

Definicja 1.2.2. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy *krótką*, jeżeli jest Lipschitzowska ze stałą 1.

Zauważmy w szczególności, iż jeżeli X i Y są grafami, to f jest krótka wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje krawędzie. Są to więc przekształcenia symplecjalne między grafami, gdzie graf traktujemy jako 1-wymiarowy kompleks symplecjalny.

1.3. Kompleksy symplecjalne

Za pomocą grafów, jak zobaczymy, daje się wyrazić dosyć dużo, nie zawsze jednak wystarczająco wiele. Dlatego czasami będziemy się zajmować kompleksami symplecjalnymi.

Zauważmy, że na danym kompleksie symplecjalnym K możemy zdefiniować metrykę krawędziową podobnie, jak dla grafów. Jeżeli jako przestrzeń metryczną weźmiemy jedynie zbiór wierzchołków kompleksu, uzyskana jak wcześniej przestrzeń nie będzie różnić się niczym od grafu będącego 1-wymiarowym szkieletem K . Graf taki oznaczać będziemy przez $G(K)$, na ogół jednakże nie będziemy rozróżniać między K i $G(K)$. Czasami

będziemy zainteresowani jednak *geometryczną realizacją* kompleksu $|K|$. Jako realizację geometryczną $|\Delta|$ pojedynczego sympleksu $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ rozumiemy zbiór formalnych kombinacji liniowych $\sum_{i=0}^n t_i v_i$, gdzie $t_i \geq 0$ oraz $\sum_{i=0}^n t_i = 1$. Jako metrykę przyjmujemy metrykę dziedziczoną z l_1 . Z kolei przez realizację geometryczną kompleksu $|K|$ będziemy rozumieć zbiór złożony z sumy wszystkich sympleksów należących do K , z metryką geodezyjną generowaną przez metryki na poszczególnych sympleksach.

Podobnie jak dla grafów, również w przypadku kompleksów symplecjalnych istnieje prosta charakteryzacja funkcji bornologicznych:

Stwierdzenie 1.3.1. *Niech $f : G(K) \rightarrow X$, gdzie K jest kompleksem symplecjalnym. Wówczas f jest bornologiczna (a więc i Lipschitzowska) \Leftrightarrow zbiór $\{f(\Delta) : \Delta \in K\}$ jest jednostajnie ograniczony.*

Dowód. (\Rightarrow) Zauważmy, że $\forall_{\Delta=[v_0, v_1, \dots, v_n] \in K} \text{diam}(\Delta) \leq 1$, zatem z bornologiczności f istnieje S_1 takie, że $\text{diam}(f(\Delta)) \leq S_1$.

(\Leftarrow) Niech rodzina $f(\Delta) : \Delta \in K$ będzie jednostajnie ograniczona przez stałą C . Niech $d(x, y) \leq k$ (b.s.o. k jest całkowite). Wówczas istnieją $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ takie, że $[x_{i-1}, x_i] \in K, i = 1, 2, \dots, k$. Wtedy:

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x_0), f(x_1)) + \dots + d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq kC$$

Zatem f jest bornologiczna, q.e.d. □

Ponieważ utożsamiamy ze sobą K i $G(K)$, możemy treść powyższego stwierdzenia przyjąć za definicję: funkcję $f : K \rightarrow X$ w przestrzeń metryczną nazywamy będziemy *bornologiczną* wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{f(\Delta) : \Delta \in K\}$ jest jednostajnie ograniczony. Podobnie w przypadku funkcji $f : |K| \rightarrow X$. Dla funkcji symplecjalnych istnieje również pojęcie będące pewnym odpowiednikiem bliskości funkcji wśród funkcji bornologicznych:

Definicja 1.3.2. Niech K oraz L będą kompleksami symplecjalnymi, zaś $f, g : K \rightarrow L$ funkcjami symplecjalnymi. Wówczas mówimy, że f i g są *sąsiednie*, jeżeli dla dowolnego sympleksu $\Delta \in K$ istnieje $\Delta' \in L$ taki, że $f(\Delta) \cup g(\Delta) \subset \Delta'$, i oznaczamy to $f \sim_c g$

Zauważmy, że powyższa relacja nie jest to na ogół relacją równoważności, nie zawsze jest bowiem przechodnia. Pozwala ona jednak na dość precyzyjne określenie, kiedy funkcje symplecjalne są do siebie 'zbliżone'. Rzeczywiście, każde dwie funkcje sąsiednie są bliskie jako funkcje bornologiczne, co więcej, zachodzi następujące:

Stwierdzenie 1.3.3. *Funkcje ciągłe $f, g : |K| \rightarrow |L|$, jeżeli są sąsiednie, to są ze sobą homotopijne.*

Dowód. Zadajmy homotopię wzorem: $H(x, t) = f(x) * t + g(x) * (1 - t)$. H jest dobrze określona, gdyż każdy punkt $x \in |K|$ zawiera się w pewnym sympleksie Δ , zaś wiemy, iż $f(\Delta)$ oraz $g(\Delta)$ zawierają się w pewnym sympleksie $\Delta' \in |L|$. H jest również oczywiście ciągłe, oraz $H(-, 0) = g, H(-, 1) = f$. □

W pracy przydatne też będzie kilka bardziej szczegółowych pojęć dotyczących kompleksów symplecjialnych, między innymi to, jak mając dany graf uzyskać możliwie duży kompleks symplecjialny:

Definicja 1.3.4. Niech G będzie grafem. Wówczas *kompleksem symplecjialnym rozpiętym przez G* nazywamy kompleks $F(G)$ taki, że $\Delta = [v_0, v_2, \dots, v_n] \in F(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(v_i, v_j) \in E(G)$ dla $i, j = 0, \dots, n$.

Spostrzeżenie 1.3.5. Niech G, H będą grafami, zaś $f : G \rightarrow H$ - funkcją krótką. Wówczas $f : F(G) \rightarrow F(H)$ jest przekształceniem symplecjialnym.

Definicja 1.3.6. Niech K będzie kompleksem symplecjialnym, zaś v - jego wierzchołkiem. Wówczas *gwiazdą domkniętą* przy wierzchołku v nazywamy zbiór $\cup\{|\Delta| : v \in \Delta\} \subset |K|$ i oznaczamy go $\overline{St}(v)$.

Definicja 1.3.7. Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś \mathcal{U} - jej pokryciem. Wówczas dla $U \in \mathcal{U}$ *gwiazdą U w pokryciu \mathcal{U}* nazywamy zbiór $\cup\{U' \in \mathcal{U} : U \cap U' \neq \emptyset\}$. Gwiazdę U oznaczamy $St(U, \mathcal{U})$.

Gwiazda opisuje więc pewne najbliższe sąsiedztwo danego wierzchołka w kompleksie, zaś dla pokrycia - najbliższe otoczenie danego zbioru. Ostatnim pojęciem, jakie przypomnimy, jest nerw pokrycia przestrzeni. Jest to kompleks utworzony ze zbiorów tworzących pokrycie danej przestrzeni, pamiętający strukturę tego pokrycia, a więc mówiący trochę o samej przestrzeni. W nerwie pokrycia zbiory są wierzchołkami, zaś każde niepuste przecięcie zbiorów reprezentowane jest jako pewien sympleks. Łatwo można zauważyć, że gwiazdom danych zbiorów w pokryciu odpowiadać będą gwiazdy odpowiedniego wierzchołka w otrzymanym kompleksie:

Definicja 1.3.8. Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ jej pokryciem. Wówczas *nerwem pokrycia \mathcal{U}* nazywamy kompleks symplecjialny $N_X(\mathcal{U})$ o wierzchołkach $N(\mathcal{U}) = \{U_i : i \in I\}$ takim, że $[U_{i_0}, \dots, U_{i_n}] \in N(\mathcal{U}) \Leftrightarrow U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$. Jeżeli wiemy, do jakiej przestrzeni metrycznej odnosi się nerw, oznaczamy go po prostu $N(\mathcal{U})$.

Rozdział 2

Grafy zgrubne

Okazuje się, że przestrzenie metryczne można w pewien sposób 'przybliżyć' grafami. Zazwyczaj nie są to przybliżenia zbyt dobre, gdyż nie każda przestrzeń metryczna jest zgrubnie równoważna z grafem. Można jednak skonstruować skierowany ciąg grafów 'co-raz lepiej' przybliżających daną przestrzeń metryczną, które to ciągi są w pewnym sensie równoważne przestrzeniom metrycznym: ciągi grafów odpowiadające danym przestrzeniom są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie te są zgrubnie równoważne, podobnie każdej funkcji bornologicznej między przestrzeniami metrycznymi odpowiada dokładnie jedno przekształcenie między odpowiadającymi im ciągami grafów i na odwrót. W ciągu tym jest więc w istocie zapisana cała informacja o danej przestrzeni ze zgrubnego punktu widzenia.

W rozdziale tym omówimy na początku grafy Ripsa, następnie zdefiniujemy zgrubne grafy odpowiadające przestrzeniom metrycznym, oraz morfizmy między nimi. Udowodnimy między innymi twierdzenie, iż istnieje naturalna bijekcja między funkcjami bornologicznymi między przestrzeniami metrycznymi, a morfizmami odpowiadających im grafów zgrubnych.

2.1. Grafy Ripsa

Jednym z najważniejszych przykładów grafu przybliżającego daną przestrzeń metryczną jest tzw. graf Ripsa (zwany też grafem Ripsa-Vietorisa). Idea przyświecająca konstrukcji tego grafu jest dosyć prosta: niech wierzchołkami grafu będą wszystkie punkty danej przestrzeni metrycznej, punkty zaś są połączone krawędzią, gdy znajdują się dostatecznie blisko siebie. Oczywiście dla przestrzeni, które nie są dyskretne, otrzymany graf jest dość monstrualny, dlatego lepiej jako przykłady patrzeć na grafy zbudowane dla przestrzeni dyskretnych.

Definicja 2.1.1. Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś \mathcal{U} jej jednostajnie ograniczonym pokryciem. *Grafem Ripsa* przestrzeni X (odpowiadającym pokryciu \mathcal{U}) nazywamy graf $RipsG_{\mathcal{U}}(X)$, w którym:

- $V(RipsG_{\mathcal{U}}(X)) = X$

$$\bullet (x, y) \in E(\text{Rips}G_{\mathcal{U}}(X)) \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U} x, y \in U$$

Szczególnym przypadkiem grafu Ripsa jest graf odpowiadający pokryciu kulami domkniętymi o średnicy t . Graf taki oznaczamy $\text{Rips}G_t(X)$.

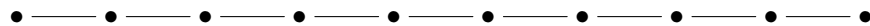
Można zauważyć, że graf Ripsa daje się równie dobrze zdefiniować bez założenia o jednostajnej ograniczoności pokrycia \mathcal{U} . Istnieje jednak naturalne rzutowanie $p : \text{Rips}G_{\mathcal{U}}(X) \rightarrow X$ które każdemu wierzchołkowi przyporządkowuje punkt jemu odpowiadający. Założenie o jednostajnej ograniczoności pokrycia \mathcal{U} jest równoważne bornologiczności tego rzutowania, a tylko taki przypadek będzie nas interesować.

Przykład 2.1.2. Niech \mathbb{Z} będzie zbiorem liczb całkowitych ze standardową metryką. Rozważamy $\text{Rips}G_t(X)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Wówczas:

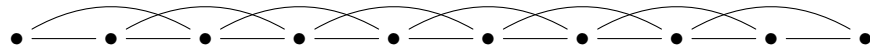
1. $t < 1$. Wtedy żadne dwa punkty nie są połączone, otrzymujemy zatem graf dyskretny:



2. $t = 1$. Wówczas połączone będą każde dwa sąsiednie punkty:



3. $t = 2$. Wówczas krawędzie łączące będą nie tylko sąsiednie wierzchołki, ale również punkty będące w odległości o 2 od siebie:



4. itd.

Można w powyższym przykładzie zobaczyć, że jeżeli bierzemy pokrycie przestrzeni większymi zbiorami, punkty w otrzymanym grafie są bliżej siebie (według metryki krawędziowej). Wzięcie pokrycia większymi zbiorami odpowiada więc spojrzeniu na tę samą przestrzeń metryczną, lecz z większej odległości; to, co dotychczas było od siebie dość odległe, po dokonaniu 'kroku w tył' wygląda na bliższe sobie.

2.2. Zgrubne grafy, zgrubne grafy przestrzeni metrycznych

Jak zostało powiedziane we wstępie do tego rozdziału, pojedynczy graf może okazać się niewystarczający, by dobrze przybliżyć daną przestrzeń metryczną - można zbudować graf odpowiadający patrzeniu na przestrzeń z dowolnie dużej odległości, zawsze jednak można się trochę oddalić. Sposobem na tę niedogodność okazuje się konstrukcja ciągu grafów, które kolejno przybliżają przestrzeń metryczną tak, jakbyśmy coraz bardziej się od niej oddalali. W ten sposób dla dowolnej odległości obserwacji danej przestrzeni jesteśmy w stanie znaleźć stosowne przybliżenie grafem.

Definicja 2.2.1. Niech G będzie grafem (z metryką krawędziową). Jako $A(G)$ oznaczamy graf o tych samych wierzchołkach, co G , za to taki, że $(x, y) \in E(A(G)) \Leftrightarrow \exists z \in G(x, z), (z, y) \in E(G)$. Innymi słowy mówiąc, $A(G) = RipsG_2(G)$.

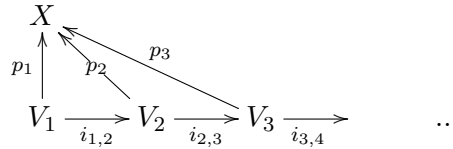
Definicja 2.2.2. *Grafem zgrubnym* nazywamy skierowany ciąg grafów $\{V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots\}$ wraz z krótkimi funkcjami $i_{n,m} : V_n \rightarrow V_m, n \leq m$ takimi, że:

1. $\forall n \geq 1 i_{n,n} = id_{V_n}$
2. $\forall n \leq k \leq m i_{k,m} \circ i_{n,k} = i_{n,m}$
3. $\forall n \geq 1 \exists m > n$ takie, że $i_{n,m} : A(V_n) \rightarrow V_m$ jest krótkie.

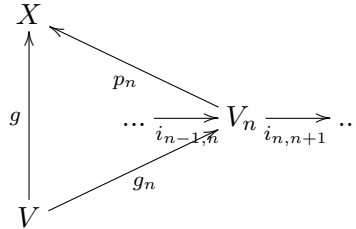
Graf zgrubny to zatem ciąg grafów takich, że każdy z nich 'zawiera się' w jednym z kolejnych, o ile patrzy się na nie z dostatecznie dużej odległości. Ciekawsza sytuacja zachodzi, gdy dany graf zgrubny chcemy powiązać z jakąś przestrzenią metryczną:

Definicja 2.2.3. *Grafem zgrubnym przestrzeni metrycznej X* nazywamy zgrubny graf $\{V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots\}$ wraz z Lipschitzowskimi rzutowaniami $p_n : V_n \rightarrow X, n \geq 1$ takimi, że:

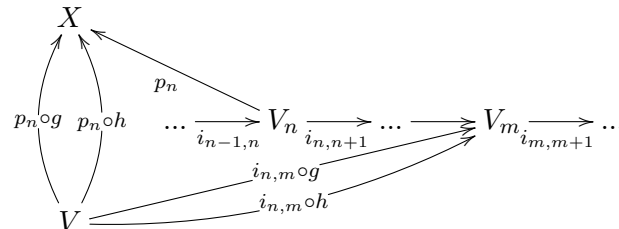
1. $\forall n \geq 1 p_n \sim_{ls} p_{n+1} \circ i_{n,n+1}$, czyli przemienny jest diagram:



2. dla dowolnej funkcji Lipschitzowskiej $g : V \rightarrow X$ z grafu V istnieje $n \geq 1$ oraz funkcja krótka $g_n : V \rightarrow V_n$ taka, że $g \sim_{ls} p_n \circ g_n$:



3. jeżeli V jest grafem oraz $g, h : V \rightarrow V_n$ są funkcjami krótkimi takimi, że $p_n \circ g \sim_{ls} p_n \circ h$, to istnieje $m \geq n$ takie, że $i_{n,m} \circ g \sim_{ls} i_{n,m} \circ h$:



Pojęcie zgrubnego grafu przestrzeni metrycznej pokazuje, iż za pomocą grafów daje się wyrazić rzeczywiście dużo. Wszystkie rzutowania na przestrzeń metryczną X (z warunku 1) są zgodne; z warunku 2 wynika, iż każde przekształcenie z grafu daje się przybliżyć za pomocą funkcji w graf zgrubny danej przestrzeni; warunek 3 zaś mówi, iż odpowiednie przybliżenia dwóch funkcji są praktycznie równoważne (zgrubnie), o ile funkcje były takie pierwotnie. Co więcej, każda przestrzeń metryczna posiada odpowiadający jej graf zgrubny:

Stwierdzenie 2.2.4. Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ ciągiem jej pokryć jednostajnie ograniczonych takich, że \mathcal{U}_n jest wpisane w \mathcal{U}_{n+1} dla $n \geq 1$, oraz takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\mathcal{U}_n) = \infty$, gdzie $\lambda(\mathcal{U})$ to liczba Lebesgue'a pokrycia \mathcal{U} . Wówczas ciąg:

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & & & & \\ & & \uparrow & \swarrow & \searrow & & \\ & & p_1 & & p_2 & & p_3 \\ RipsG_{\mathcal{U}_1}(X) & \xrightarrow{i_{1,2}} & RipsG_{\mathcal{U}_2}(X) & \xrightarrow{i_{2,3}} & RipsG_{\mathcal{U}_3}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

gdzie $p_n : RipsG_{\mathcal{U}_n}(X) \rightarrow X, n \geq 1$ są standardowymi rzutowaniami na X , zaś $i_{n,m} : RipsG_{\mathcal{U}_n}(X) \rightarrow RipsG_{\mathcal{U}_m}(X), 1 \leq n \leq m$ są identycznościami, tworzy graf zgrubny przestrzeni metrycznej X .

Dowód. Pokażemy najpierw, iż $\{RipsG_{\mathcal{U}_1}(X) \rightarrow RipsG_{\mathcal{U}_2}(X) \rightarrow \dots\}$ tworzy graf zgrubny. Każda funkcja $i_{n,m}, 1 \leq n \leq m$ jest krótka, gdyż pokrycie \mathcal{U}_n jest wpisane we wszystkie pokrycia $\mathcal{U}_m, m \geq n$, zatem $(x, y) \in E(RipsG_{\mathcal{U}_n}(X)) \Rightarrow (x, y) \in E(RipsG_{\mathcal{U}_m}(X))$. Warunki 1. i 2. definicji 2.2.2 grafu zgrubnego są spełnione w oczywisty sposób. Żeby pokazać spełnienie warunku 3., ustalmy $n \geq 1$ i niech pokrycie \mathcal{U}_n będzie jednostajnie ograniczone przez $C < \infty$. Weźmy $m \geq n$ takie, żeby $\lambda(\mathcal{U}_m) > 2C$. Wówczas $(x, y) \in E(A(RipsG_{\mathcal{U}_n}(X))) \Leftrightarrow$ istnieją $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_n$ oraz $z \in X$ takie, że $x \in U_1, y \in U_2, z \in U_1 \cap U_2$. Wówczas $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2C$, czyli istnieje $U \in \mathcal{U}_m$ takie, że $(x, y) \in U$. Zatem przekształcenie $i_{n,m} : RipsG_{\mathcal{U}_n} \rightarrow RipsG_{\mathcal{U}_m}$ jest krótkie.

Pokażemy teraz, że zgrubny graf $\{RipsG_{\mathcal{U}_1}(X) \rightarrow RipsG_{\mathcal{U}_2}(X) \rightarrow \dots\}$ odpowiada przestrzeni metrycznej X . Warunek 1. definicji 2.2.3 jest spełniony natychmiastowo. Aby pokazać spełnienie warunku 2., weźmy graf V oraz funkcję Lipschitzowską $g : V \rightarrow X$ ze stałą C . Niech $n \geq 1$ będzie takie, że $\lambda(\mathcal{U}_n) \geq C$. Wówczas widać, iż $g : V \rightarrow RipsG_{\mathcal{U}_n}(X)$, traktowane jako przekształcenie w odpowiedni graf Ripsa, jest krótkie: jeżeli $(x, y) \in E(V)$, to $d(g(x), g(y)) \leq C$, zatem $d(g(x), g(y)) \in E(RipsG_{\mathcal{U}_n}(X))$. Pozostał nam do pokazania warunek 3. Niech $g, h : V \rightarrow RipsG_{\mathcal{U}_n}(X)$ będą funkcjami krótkimi takimi, że $p_n \circ g$ oraz $p_n \circ h$ są d -bliskie. Wówczas niech $m \geq n$ będzie takie, że $\lambda(\mathcal{U}_m) > d$. Wtedy funkcje $i_{n,m} \circ g$ oraz $i_{n,m} \circ h$ są krótkie (jako złożenia funkcji krótkich), oraz $\forall_{x \in X} d_X(g(x), h(x)) < d$, gdzie g i h traktujemy jako funkcje w X , zatem $(g(x), h(x)) \in E(RipsG_{\mathcal{U}_m}(X))$. Funkcje $i_{n,m} \circ g$ oraz $i_{n,m} \circ h$ są więc 1-bliskie, q.e.d. \square

Przykład 2.2.5. Rozważmy pokrycia przestrzeni metrycznej X kulami o promieniach będących dodatnimi liczbami całkowitymi. Wówczas otrzymujemy następujący odpowia-

dający jej graf zgrubny:

$$RipsG_1(X) \xrightarrow{i_{1,2}} RipsG_2(X) \xrightarrow{i_{2,3}} RipsG_3(X) \xrightarrow{i_{3,4}} \dots$$

Graf ten oznaczają będziemy $RipsG_*(X)$.

2.3. Morfizmy grafów zgrubnych

Tak jak między przestrzeniami metrycznymi, między zgrubnymi grafami również można rozpatrywać pewne przekształcenia. Jako że zgrubne grafy są skierowanym ciągiem grafów, przekształcenia są po prostu zgodną rodziną przekształceń z każdego grafu w grafie zgrubnym. Ponieważ jednak interesuje nas spojrzenie z dużej odległości, będziemy utożsamiać przekształcenia, które obserwowane z odpowiedniej odległości są bliskie.

Definicja 2.3.1. *Pre-morfizmem* grafów zgrubnych $\mathcal{V} = \{V_1 \xrightarrow{i_{1,2}} V_2 \xrightarrow{i_{2,3}} \dots\}$ oraz $\mathcal{W} = \{W_1 \xrightarrow{j_{1,2}} W_2 \xrightarrow{j_{2,3}} \dots\}$ nazywamy zbiór krótkich przekształceń $F = \{f_i : V_i \rightarrow W_{n_F(i)}, i \geq 1\}$ takich, że dla każdego $k \geq 1$ istnieje $m \geq n_F(k+1)$ takie, że $j_{n_F(k),m} \circ f_k \sim_{ls} j_{n_F(k+1),m} \circ f_{k+1} \circ i_{k,k+1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} W_1 & \xrightarrow{j_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{j} & W_{n_F(1)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & W_{n_F(2)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & W_{n_F(3)} & \xrightarrow{j} & \dots \\ & & & \nearrow f_1 & & & & \nearrow f_2 & & & & \nearrow f_3 & & & \\ V_1 & \xrightarrow{i_{1,2}} & V_2 & \xrightarrow{i_{2,3}} & V_3 & \xrightarrow{i_{3,4}} & \dots & & & & & & & & \end{array}$$

Zauważmy, że powyższy diagram nie musi być przemienny, ważne, by stawał się taki, jeśli spojrzemy na odpowiednio daleki graf w grafie zgrubnym \mathcal{W} . Żeby otrzymać zbiór morfizmów między danymi grafami zgrubnymi, powinniśmy utożsamiać jeszcze te pre-morfizmy, które widziane z dostatecznej odległości (czyli patrząc na odpowiednio daleki graf w grafie zgrubnym) są bliskie siebie:

Definicja 2.3.2. *Zbiorem morfizmów* między grafami zgrubnymi \mathcal{V} i \mathcal{W} nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji \sim_{ls} na zbiorze pre-morfizmów z \mathcal{V} do \mathcal{W} , gdzie dwa pre-morfizmy $F, G : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ uznajemy za równoważne ($F \sim_{ls} G$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \geq 1$ istnieje $m \geq \max\{n_F(k), n_G(k)\}$ takie, że $j_{n_F(k),m} \circ f_k \sim_{ls} j_{n_G(k),m} \circ g_k$:

$$\begin{array}{ccccccc} W_1 & \xrightarrow{j_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{j} & W_{n_F(k)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & W_{n_G(k)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & W_m & \xrightarrow{j} & \dots \\ & & & \nearrow f_k & & & & \nearrow g_k & & & & \nearrow j \circ f_k & & & \\ \dots & \xrightarrow{i} & V_k & \xrightarrow{i} & \dots & & & \nearrow j \circ g_k & & & & & & & \end{array}$$

Pre-morfizmy równoważne w sensie powyższej relacji nazywamy *zgrubnie równoważnymi*. Jak się okazuje, pre-morfizmy oraz morfizmy grafów zgrubnych zachowują się dosyć porządnie, co pokazuje następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 2.3.3. *Złożenie pre-morfizmów jest pre-morfizmem. Co więcej, jeżeli $F, F' : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ oraz $G, G' : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Z}$ są pre-morfizmami takimi, że $F \sim_{ls} F'$ oraz $G \sim_{ls} G'$, to również $G \circ F \sim_{ls} G' \circ F'$.*

Dowód. Niech $\mathcal{V} = \{V_1 \xrightarrow{i} V_2 \xrightarrow{i} \dots\}$, $\mathcal{W} = \{W_1 \xrightarrow{j} W_2 \xrightarrow{j} \dots\}$ oraz $\mathcal{Z} = \{Z_1 \xrightarrow{l} Z_2 \xrightarrow{l} \dots\}$ będą grafami zgrubnymi, zaś $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ oraz $G : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Z}$. Chcemy pokazać, że dla $k \geq 1$ istnieje $m \geq n_{G \circ F}(k+1)$ takie, że $l_{n_{G \circ F}(k), m} \circ g_{n_F(k)} \circ f_k \sim_{ls} l_{n_{G \circ F}(k+1), m} \circ g_{n_F(k+1)} \circ f_{k+1} \circ i_{k, k+1}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & Z_{n_{G \circ F}(k)} & \xrightarrow{l} & Z_{n_{G \circ F}(k+1)} & \xrightarrow{l} & Z_{n_G(m_1)} & \xrightarrow{l} & Z_{m_2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow g_{n_F(k)} & & \uparrow g_{n_F(k+1)} & & \uparrow g_{m_1} & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & W_{n_F(k)} & \xrightarrow{j} & W_{n_F(k+1)} & \xrightarrow{j} & W_{m_1} & \longrightarrow & \dots & & \\
 & & \uparrow f_k & & \uparrow f_{k+1} & & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & V_k & \xrightarrow{i} & V_{k+1} & \longrightarrow & \dots & & & &
 \end{array}$$

Ponieważ F jest pre-morfizmem, istnieje $m_1 \geq n_F(k+1)$ takie, że $j_{n_F(k), m_1} \circ f_k \sim_{ls} j_{n_F(k+1), m_1} \circ f_{k+1} \circ i_{k, k+1}$. Ponadto, ponieważ G jest pre-morfizmem, istnieje $m_2 \geq n_G(m_1)$ takie, że $l_{n_{G \circ F}(k), m_2} \circ g_{n_F(k)} \sim_{ls} l_{n_G(m_1), m_2} \circ g_{m_1} \circ j_{n_F(k), m_1}$ oraz $l_{n_{G \circ F}(k+1), m_2} \circ g_{n_F(k+1)} \sim_{ls} l_{n_G(m_1), m_2} \circ g_{m_1} \circ j_{n_F(k+1), m_1}$. Mamy zatem:

$$l_{n_{G \circ F}(k), m_2} \circ g_{n_F(k)} \circ f_k \sim_{ls} l_{n_G(m_1), m_2} \circ g_{m_1} \circ j_{n_F(k), m_1} \circ f_k \sim_{ls}$$

$$\sim_{ls} l_{n_G(m_1), m_2} \circ g_{m_1} \circ j_{n_F(k+1), m_1} \circ f_{k+1} \circ i_{k, k+1} \sim_{ls} l_{n_{G \circ F}(k+1), m_2} \circ g_{n_F(k+1)} \circ f_{k+1} \circ i_{k, k+1}$$

Biorąc $m = m_2$ otrzymujemy tezę.

Niech teraz $F, F' : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ oraz $G, G' : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Z}$ będą pre-morfizmami takimi, że $F \sim_{ls} F'$ oraz $G \sim_{ls} G'$. Pokażemy, że złożenia $G \circ F$ oraz $G' \circ F'$ są zgrubnie równoważne, czyli biorąc dowolne $k \geq 1$ istnieje dla niego m takie, że $l_{n_{G \circ F}(k), m} \circ g_{n_F(k)} \circ f_k \sim_{ls} l_{n_{G' \circ F'}(k), m} \circ g'_{n_{F'}(k)} \circ f'_k$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & Z_{n_{G \circ F}(k)} & \xrightarrow{l} & Z_{n_{G' \circ F'}(k)} & \xrightarrow{l} & Z_{n_G(m_1)} & \xrightarrow{l} & Z_{n'_G(m_1)} & \longrightarrow & Z_{m_2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow g_{n_F(k)} & & \uparrow g'_{n_{F'}(k)} & & \uparrow g_{m_1} & & \nearrow g'_{m_1} & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & W_{n_F(k)} & \xrightarrow{j} & W_{n_{F'}(k)} & \xrightarrow{j} & W_{m_1} & \longrightarrow & \dots & & & & \\
 & & \uparrow f_k & & \nearrow f'_k & & & & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & V_k & \longrightarrow & \dots & & & & & & & &
 \end{array}$$

Ponieważ $F \sim_{ls} F'$, istnieje m_1 takie, że $j_{n_F(k), m_1} \circ f_k \sim_{ls} j_{n_{F'}(k), m_1} \circ f'_k$. Ponadto, ponieważ G, G' są pre-morfizmami oraz $G \sim_{ls} G'$, więc istnieje m_2 takie, że:

- $l_{n_G(m_1), m_2} \circ g_{m_1} \sim_{ls} l_{n'_G(m_1), m_2} \circ g'_{m_1}$
- $l_{n_{G \circ F}(k), m_2} \circ g_{n_F(k)} \sim_{ls} l_{n_G(m_1), m_2} \circ g_{m_1} \circ j_{n_F(k), m_1}$

$$\bullet l_{n_{G' \circ F'}(k), m_2} \circ g'_{n_{F'}(k)} \sim_{ls} l_{n_{G'}(m_1), m_2} \circ g'_{m_1} \circ j_{n_{F'}(k), m_1}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} l_{n_{G \circ F}(k), m_2} \circ g_{n_F(k)} \circ f_k &\sim_{ls} l_{n_G(m_1), m_2} \circ g_{m_1} \circ j_{n_F(k), m_1} \circ f_k \sim_{ls} \\ &\sim_{ls} l_{n_{G'}(m_1), m_2} \circ g'_{m_1} \circ j_{n_F(k), m_1} \circ f_k \sim_{ls} l_{n_{G'}(m_1), m_2} \circ g'_{m_1} \circ j_{n_{F'}(k), m_1} \circ f'_k \sim_{ls} \\ &\sim_{ls} l_{n_{G' \circ F'}(k), m_2} \circ g'_{n_{F'}(k)} \circ f'_k \end{aligned}$$

Biorąc zatem $m = m_2$ dowodzimy całości stwierdzenia. \square

Wniosek 2.3.4. *Złożenie dwóch morfizmów $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, $G : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Z}$ jest dobrze określonym morfizmem $G \circ F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z}$.*

Z powyższego wniosku oraz tego, że w grafie zgrubnym zawsze istnieje morfizm identyfikacyjny $Id : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ wynika, że grafy zgrubne tworzą kategorię. Jak się okazuje, kategoria ta ma dość rozległe powiązania z kategorią przestrzeni metrycznych i funkcji bornologicznych:

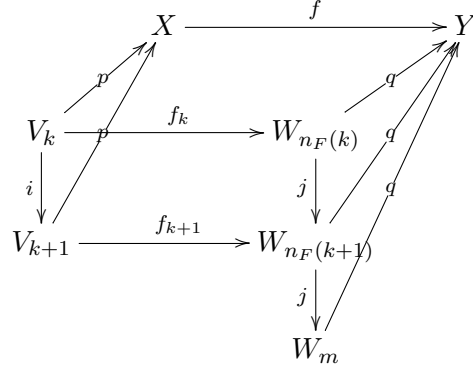
Twierdzenie 2.3.5. *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, zaś \mathcal{V}, \mathcal{W} - odpowiadającymi im zgrubnymi grafami z rzutowaniami: $p_* : \mathcal{V} \rightarrow X$ oraz $q_* : \mathcal{W} \rightarrow Y$. Wówczas istnieje naturalna bijekcja między bornologicznymi funkcjami $X \rightarrow Y$ (z dokładnością do zgrubnej równoważności), a morfizmami $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, tzn. mając daną funkcję bornologiczną $f : X \rightarrow Y$, istnieje dokładnie jeden morfizm $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ taki, że poniższy diagram jest przemienny w wielkiej skali:*

$$\begin{array}{ccc} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_* \nearrow & & & \nearrow q_* \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{F} & \mathcal{W} & \end{array} \quad (2.1)$$

i na odwrót: dla każdego morfizmu $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ istnieje dokładnie jedno (z dokładnością do zgrubnej równoważności) przekształcenie bornologiczne $f : X \rightarrow Y$ uprzemienniające powyższy diagram.

Dowód. Zaczniemy od dowodu pierwszej części twierdzenia. Załóżmy, że $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją bornologiczną. Wówczas przekształcenia $f \circ p_k : V_k \rightarrow Y, k \geq 1$ są bornologiczne, zatem Lipschitzowskie (bo $V_k, k \geq 1$ są grafami). Z definicji grafu zgrubnego przestrzeni metrycznej istnieje zbiór przekształceń krótkich $F = \{f_k : V_k \rightarrow W_{n_F(k)}, k \geq 1\}$, takich, że dla każdego $k \geq 1$: $q_{n_F(k)} \circ f_k \sim_{ls} f \circ p_k$. Mamy zatem przekształcenie $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ uprzemienniające zadany diagram, wystarczy pokazać, że jest ono pre-morfizmem i jest wyznaczone (z dokładnością do zgrubnej równoważności) jednoznacznie. Ustalmy $k \geq 1$ i zauważmy, że z definicji zgrubnego grafu przestrzeni metrycznej oraz określenia F mamy:

$$\begin{aligned} q_{n_F(k+1)} \circ j_{n_F(k), n_F(k+1)} \circ f_k &\sim_{ls} q_{n_F(k)} \circ f_k \sim_{ls} f \circ p_k \sim_{ls} \\ &\sim_{ls} f \circ p_{k+1} \circ i_{k, k+1} \sim_{ls} q_{n_F(k+1)} \circ f_{k+1} \circ i_{k, k+1} \end{aligned}$$



Mamy więc dwa przekształcenia: $j_{n_F(k), n_F(k+1)} \circ f_k, f_{k+1} \circ i_{k, k+1} : V_k \rightarrow W_{n_F(k+1)}$ takie, że po złożeniu z $q_{n_F(k+1)}$ są zgrubnie równoważne. Ponownie korzystając z definicji zgrubnego grafu przestrzeni metrycznej widzimy, że istnieje $m \geq n_F(k+1)$ takie, że $j_{n_F(k), m} \circ f_k \sim_{ls} j_{n_F(k+1), m} \circ f_{k+1} \circ i_{k, k+1}$. F jest zatem pre-morfizmem.

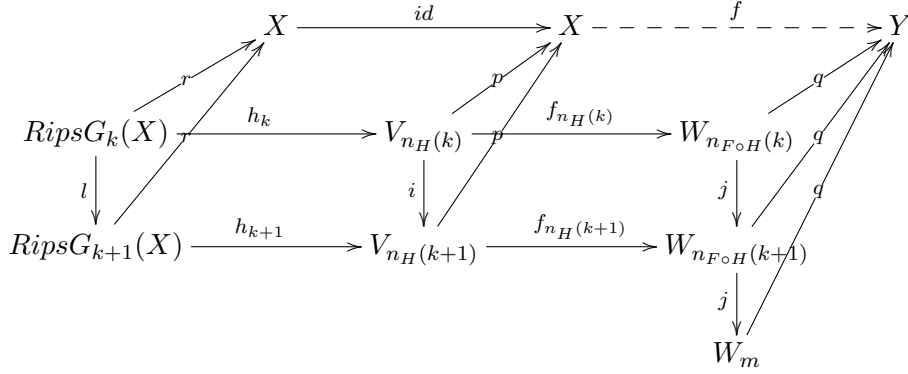
Załóżmy teraz, że mamy dwa pre-morfizmy $F, G : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ takie, że $q_* \circ F \sim_{ls} q_* \circ G \sim_{ls} f \circ p_*$, czyli dla każdego $i \geq 1$ mamy $q_{n_F(k)} \circ f_k \sim_{ls} q_{n_G(k)} \circ g_k$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $n_F(k) \leq n_G(k)$. Wówczas oczywiście $q_{n_G(k)} \circ g_k \sim_{ls} q_{n_F(k)} \circ f_k \sim_{ls} q_{n_G(k)} \circ j_{n_G(k), n_F(k)} \circ f_k$. Z definicji grafu zgrubnego przestrzeni metrycznej istnieje zatem $m \geq 1$ takie, że $j_{n_F(k), m} \circ f_k \sim_{ls} j_{n_G(k), m} \circ g_k$. Pre-morfizmy F i G są zatem równoważne, q.e.d.

Załóżmy teraz, że mamy dany pre-morfizm $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$. Zauważmy, że zgodnie z przykładem 2.2.5 mamy odpowiadający X graf zgrubny $RipsG_*(X) = \{RipsG_1(X) \xrightarrow{l_{1,2}} RipsG_2(X) \xrightarrow{l_{2,3}} \dots\}$, wraz z rzutowaniem $r_* : RipsG_*(X) \rightarrow X$. Stosując pierwszą, udowodnioną już część twierdzenia do przekształcenia identycznościowego $X \xrightarrow{id} X$ otrzymujemy pre-morfizm $H : RipsG_*(X) \rightarrow \mathcal{V}$ taki, że $p_* \circ H \sim_{ls} id \circ r_*$. Ponieważ wierzchołki $RipsG_t(X)$ pokrywają się z punktami X , możemy wybrać jeden z grafów $RipsG_k(X), k \geq 1$ i określić przekształcenie $f : X \rightarrow Y$ jako: $f = q_{n_F(n_H(k))} \circ f_{n_H(k)} \circ h_k$. Pokażemy, że tak określone przekształcenie nie zależy w istocie od wyboru k (z dokładnością do równoważności w wielkiej skali), oraz że jest bornologiczne.

Niech $k \geq 1$, pokażemy, że $q_{n_{F \circ H}(k)} \circ (f \circ h)_k \sim_{ls} q_{n_{F \circ H}(k+1)} \circ (f \circ h)_{k+1} \circ l_{k, k+1}$. Ponieważ przekształcenia l są identycznościowe, możemy je później w praktyce pominąć. Na początku zauważmy, że ponieważ $F \circ H$ jest pre-morfizmem, to istnieje m takie, że $j_{n_{F \circ H}(k), m} \circ (f \circ h)_k \sim_{ls} j_{n_{F \circ H}(k+1), m} \circ (f \circ h)_{k+1} \circ l_{k, k+1}$. Oczywiście $q_{n_{F \circ H}(k)} \sim_{ls} q_m \circ j_{n_{F \circ H}(k), m}$ oraz $q_{n_{F \circ H}(k+1)} \sim_{ls} q_m \circ j_{n_{F \circ H}(k+1), m}$. Stąd:

$$q_{n_{F \circ H}(k)} \circ (f \circ h)_k \sim_{ls} q_m \circ j_{n_{F \circ H}(k), m} \circ (f \circ h)_k \sim_{ls}$$

$$\sim_{ls} q_m \circ j_{n_{F \circ H}(k+1), m} \circ (f \circ h)_{k+1} \circ l_{k, k+1} \sim_{ls} q_{n_{F \circ H}(k+1)} \circ (f \circ h)_{k+1} \circ l_{k, k+1}$$

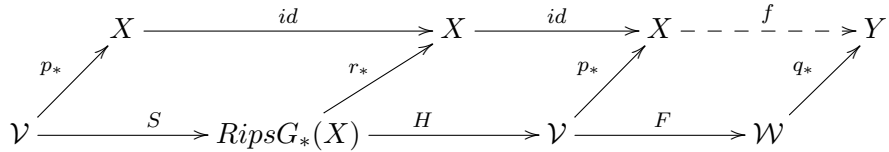


Widzimy, że ustalone wcześniej $f = q_{n_{F \circ H}(k)} \circ (f \circ h)_k$ nie zależy w wielkiej skali od wyboru k , zatem możemy bez straty ogólności przyjąć $k = 1$. Żeby pokazać, że f jest bornologiczne, weźmy $R < \infty$, możemy założyć, że R jest całkowite. Oznaczmy $g = q_{n_{F \circ H}(R)} \circ (f \circ h)_R$. Wówczas $g : RipsG_R(X) \rightarrow Y$ jest Lipschitzowska, więc istnieje $C < \infty$ taka, że $d(x, y) < R \Rightarrow d(g(x), g(y)) < C$. Ponadto, $g \sim_{ls} f$, zatem istnieje $d < \infty$ takie, że $d(f(x), g(x)) < d$ dla dowolnego $x \in X$. Stąd jeżeli $d(x, y) < R$, to:

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(y)) + d(g(y), f(y)) < 2d + C$$

f jest zatem bornologiczna.

By pokazać przemienność diagramu (1) zauważmy, że ponieważ zarówno \mathcal{V} jak i $RipsG_*(X)$ są grafami zgrubnymi dla X , więc dla przekształcenia identyficznego $X \xrightarrow{id} X$ istnieje dokładnie jeden morfizm grafów $\mathcal{V} \xrightarrow{S} RipsG_*(X)$ uprzemienniający diagram:



Zauważmy ponadto, że morfizm identyficznym $Id : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ma tę własność, że $id_X \circ p_* \sim_{ls} p_* \circ Id_{\mathcal{V}}$, a ponieważ (korzystając z pierwszej części twierdzenia) istnieje dokładnie jeden taki morfizm, więc $H \circ S \sim_{ls} Id_{\mathcal{V}}$. Mamy zatem:

$$f \circ p_* \sim_{ls} q_* \circ F \circ H \circ S \sim_{ls} q_* \circ F \circ Id_{\mathcal{V}} \sim_{ls} q_* \circ F$$

Pozostaje wykazać, iż f jest z dokładnością do równoważności w wielkiej skali jedyne, tzn. mając dwie funkcje bornologiczne $f, g : X \rightarrow Y$ takie, że $f \circ p_* \sim_{ls} q_* \circ F \sim_{ls} g \circ p_*$, to $f \sim_{ls} g$. Jeżeli jednak ponownie rozpatrzmy zgrubny graf Ripsa $RipsG_*(X)$ oraz morfizm $RipsG_*(X) \xrightarrow{H} \mathcal{V}$ przemienny z identyfnością $X \xrightarrow{id} X$, to widzimy, że ponieważ

rzutowanie $RipsG_*(X) \xrightarrow{r_*} X$ jest identycznością na wierzchołkach, utożsamiając X i $RipsG_*(X)$ mamy:

$$f \sim_{ls} f \circ id_X \circ r_* \sim_{ls} f \circ p_* \circ H \sim_{ls} g \circ p_* \circ H \sim_{ls} g \circ id_X \circ r_* \sim_{ls} g$$

□

Wniosek 2.3.6. *Dowolne dwa grafy zgrubne przestrzeni metrycznej X są zgrubnie równoważne.*

Wniosek 2.3.7. *Jeżeli przestrzeń metryczna X jest zgrubnie równoważna przestrzeni Y , to odpowiadające im grafy zgrubne również są sobie zgrubnie równoważne.*

Wnioski te pokazują, iż nie jest właściwie istotne, jaki graf zgrubny przestrzeni metrycznej X rozpatrujemy. Patrząc w szczególności na zgrubne grafy Ripsa, nie jest istotne, względem jakiej dokładnie rodziny pokryć je rozpatrujemy. Powyższe twierdzenie pozwala nam w istocie uzyskać functor wierny i pełny, przyporządkowujący każdej przestrzeni metrycznej jej zgrubny graf Ripsa. Można by się zastanowić, czy functor ten może być równoważnością tych kategorii. Żeby tak jednak było, każdemu grafowi zgrubnemu musielibyśmy umieć przypisać jakąś przestrzeń metryczną, co nie zawsze daje się zrobić. Jeden z dość prostych przykładów jest zamieszczony poniżej:

Przykład 2.3.8. Niech D_n będzie grafem dyskretnym z ponumerowanymi n wierzchołkami. Dla $n \leq m$ mamy zanurzenie $i_{n,m} : D_n \rightarrow D_m$, każdemu wierzchołkowi przyporządkowujące wierzchołek o tym samym numerze. Wówczas $\mathcal{D} = \{D_1 \xrightarrow{i} D_2 \xrightarrow{i} \dots\}$ jest grafem zgrubnym. Rzeczywiście, wszystkie trzy warunki definicji są spełnione w oczywisty sposób. Pokażemy jednak, że nie jest on grafem zgrubnym dla żadnej przestrzeni metrycznej.

Założmy nie wprost, że istnieje przestrzeń metryczna X taka, że \mathcal{D} wraz z pewnymi rzutowaniami $p_* : \mathcal{D} \rightarrow X$ jest jej grafem zgrubnym. Wówczas zauważmy, że biorąc dowolne $n \geq 2$ obrazy różnych wierzchołków D_n przy rzutowaniu p_n leżą w innych zgrubnych spójnych składowych X . Założmy bowiem, że istnieje $n \geq 2$ takie, że dla pewnych różnych $k, l \leq n : d(p_n(v_k), p_n(v_l)) < \infty$. Niech $f : D_2 \rightarrow D_n$ będzie takie, że $f(v_1) = v_k, f(v_2) = v_l$, oraz $g : D_2 \rightarrow D_k$ będzie takie, że $g(v_i) = v_k, i = 1, 2$. Wówczas oczywiście $p_n \circ f \sim_{ls} p_n \circ g$, nie istnieje jednak $m \geq n$ takie, że $i_{n,m} \circ f \sim_{ls} i_{n,m} \circ g$. Zatem rzeczywiście dla $k \neq l$ mamy $d(p_n(v_k), p_n(v_l)) = \infty$.

Z powyższych rozważań płynie wniosek, iż X ma nieskończenie wiele zgrubnych spójnych składowych, gdyż ma ich więcej od n dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy jednak graf dyskretny D_∞ o przeliczalnej nieskończonej liczbie wierzchołków. Wówczas $f : D_\infty \rightarrow X$ przyporządkowujące każdemu wierzchołkowi punkt z innej zgrubnej składowej jest oczywiście bornologiczne, zatem istnieje $n \geq 1$ oraz $f_n : D_\infty \rightarrow D_n$ takie, że $f \sim_{ls} p_n \circ f_n$. Zauważmy jednak, że muszą wtedy istnieć dwa różne wierzchołki $v_k, v_l \in D_\infty$ takie, że $f_n(v_k) = f_n(v_l)$. Wtedy jednak $d(f(v_k), p_n \circ f_n(v_k)) = \infty$ lub $d(f(v_l), p_n \circ f_n(v_l)) = \infty$, co prowadzi do sprzeczności. Grafowi \mathcal{D} nie da się więc sensownie przypisać żadnej przestrzeni metrycznej.

Na koniec tego rozdziału podamy jeszcze jedno twierdzenie, wskazujące na ważność grafów wśród przestrzeni metrycznych:

Twierdzenie 2.3.9. *Funkcja bornologiczna $f : X \rightarrow Y$ jest zgrubną równoważnością \Leftrightarrow dla dowolnego grafu G odwzorowanie $g \mapsto f \circ g$ wyznacza bijekcję zbiorów $[G; X]$ oraz $[G; Y]$*

Dowód. (\Rightarrow) ponieważ f jest zgrubną równoważnością, istnieje $h : Y \rightarrow X$ takie, że $h \circ f \sim_{ls} id_X$, $f \circ h \sim_{ls} id_Y$. Rozpatrując funkcję $g' \mapsto h \circ g'$ z $[G; Y]$ do $[G; X]$, dla $g : G \rightarrow X$ mamy:

$$g \mapsto f \circ g \mapsto h \circ f \circ g \sim_{ls} g$$

zatem przyporządkowanie $g \mapsto f \circ g$ jest różnowartościowe. Patrząc na podobne złożenie dla $g' : G \rightarrow Y$ otrzymujemy wniosek, że f jest również 'na', więc f jest bijekcją, q.e.d.

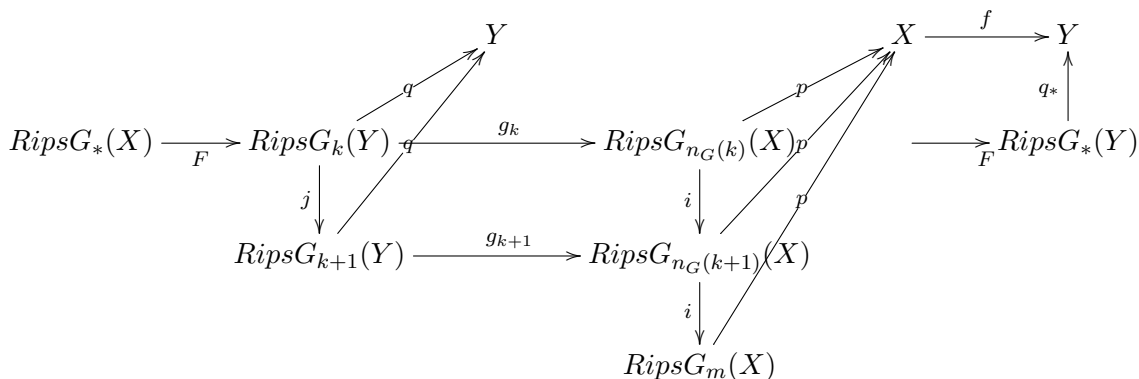
(\Leftarrow) Załóżmy, że f wyznacza w określony wyżej sposób bijekcję między $[G; X]$ a $[G; Y]$ dla każdego grafu G . Biorąc za G grafy Ripsa $RipsG_t(Y)$, $t = 1, 2, \dots$ oraz rzutowania $q_t : RipsG_t(Y) \rightarrow Y$, otrzymujemy ciąg przekształceń Lipschitzowskich $r_t : RipsG_t(Y) \rightarrow X$ takich, że $f \circ r_t \sim_{ls} q_t$ dla $t \geq 1$. Ponieważ są to przekształcenia z grafów, rozważając graf zgrubny $RipsG_*(X)$ przestrzeni X z rzutowaniami p_* , otrzymujemy ciąg przekształceń krótkich $g_t : RipsG_t(Y) \rightarrow RipsG_{n_F(t)}(X)$. Pokażemy, że ciąg ten definiuje zgrubny izomorfizm grafów $G : RipsG_*(Y) \rightarrow RipsG_*(X)$, z odwrotnością $F : RipsG_*(X) \rightarrow RipsG_*(Y)$, gdzie F odpowiada $f : X \rightarrow Y$.

Na początek pokażemy, że G istotnie jest pre-morfizmem. Oznaczmy przekształcenia wewnątrz grafu $RipsG_*(Y)$ jako j_* , zaś $RipsG_*(X)$ jako i_* . Oczywiście dla $k \geq 1$ mamy $q_k \sim_{ls} q_{k+1} \circ j_{k,k+1}$, skąd $f \circ r_k \sim_{ls} f \circ r_{k+1} \circ j_{k,k+1}$, zatem:

$$f \circ p_{n_G(k)} \circ g_k \sim_{ls} f \circ p_{n_G(k+1)} \circ g_{k+1} \circ j_{k,k+1}$$

Ponieważ, z definicji f , istnieje dokładnie jedno (z dokładnością do zgrubnej równoważności) przekształcenie $RipsG_k(Y) \rightarrow X$ takie, że po złożeniu z f daje q_k , więc musi być $p_{n_G(k)} \circ g_k \sim_{ls} p_{n_F(k+1)} \circ g_{k+1} \circ j_{k,k+1}$. Zastępując $p_{n_G(k)}$ przez $p_{n_G(k+1)} \circ i_{n_G(k), n_G(k+1)}$ otrzymujemy dwa przekształcenia krótkie $RipsG_k(Y) \rightarrow RipsG_{n_G(k+1)}(X)$ takie, że po złożeniu z $p_{n_G(k+1)}$ stają się one równoważne. Z definicji grafu zgrubnego istnieje więc m takie, że:

$$i_{n_G(k), m} \circ g_k \sim_{ls} i_{n_G(k+1), m} \circ g_{k+1} \circ j_{k,k+1}$$



Zatem G istotnie jest pre-morfizmem. Widać też, że $q_* \circ F \circ G \sim_{ls} f \circ p_* \circ G \sim_{ls} q_*$, czyli $F \circ G \sim_{ls} Id_{RipsG_*(Y)}$. Pozostaje pokazać, że również $G \circ F \sim_{ls} Id_{RipsG_*(X)}$. Zauważmy jednak, że:

$$f \circ p_* \circ G \circ F \sim_{ls} q_* \circ F \circ G \circ F \sim_{ls} q_* \circ F \sim_{ls} f \circ p_*$$

Ponieważ jednak z definicji f istnieje dokładnie jedno przekształcenie $RipsG_*(X) \rightarrow X$ takie, że po złożeniu z f daje $f \circ p_*$, więc $p_* \circ G \circ F \sim_{ls} p_*$, skąd $G \circ F \sim_{ls} Id_{RipsG_*(X)}$, q.e.d. \square

Rozdział 3

Zgrubne kompleksy symplecjialne

W poprzednim rozdziale mogliśmy się przekonać, że w grafie zgrubnym odpowiadającym przestrzeni metrycznej zapisana jest w istocie cała informacja o tej przestrzeni ze zgrubnego punktu widzenia. Istnieje jednak wiele niezmienników zgrubnej równoważności, które łatwo dają się wyrazić w przestrzeniach metrycznych, często zaś trudno powiedzieć, jak własności te przenoszą się na strukturę odpowiednich grafów zgrubnych. Dlatego też bardziej owocne okazuje się badanie odpowiednich ciągów kompleksów symplecjialnych odpowiadających danej przestrzeni metrycznej. Jak się okazuje, dodanie tej dodatkowej struktury pozwala wyrazić zaskakująco wiele.

W rozdziale tym na początku podamy definicję zgrubnego kompleksu symplecjialnego, a następnie przedstawimy ważne przykłady: zgrubny kompleks Ripsa i kompleks Čecha. Później zajmiemy się definiowaniem pewnych własności przestrzeni metrycznych w języku kompleksów zgrubnych: wymiaru asymptotycznego oraz zgrubnej n -spójności.

3.1. Kompleksy zgrubne

Zgrubne kompleksy symplecjialne oraz kompleksy odpowiadające danym przestrzeniom metrycznym jesteśmy w stanie skonstruować niemal tak samo, jak w przypadku grafów, zastępując jedynie grafy kompleksami symplecjialnymi, oraz funkcje krótkie - symplecjialnymi:

Definicja 3.1.1. Niech K będzie kompleksem symplecjialnym (z metryką krawędziową). Jako $A(K)$ oznaczamy kompleks o tych samych wierzchołkach, co K , w którym $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n] \in A(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wierzchołek $w \in K$ taki, że $v_i \in \overline{St(w)}$ dla $i = 0, \dots, n$ (czyli innymi słowy: istnieje w taki, że $[v_i, w] \in K$ dla $i = 0, \dots, n$).

Definicja 3.1.2. *Zgrubnym kompleksem symplecjialnym* nazywamy skierowany ciąg kompleksów symplecjialnych $\{K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots\}$ wraz z funkcjami symplecjialnymi $i_{n,m} : K_n \rightarrow K_m, n \leq m$ takimi, że:

1. $\forall_{n \geq 1} i_{n,n} = id_{K_n}$

2. $\forall n \leq k \leq m \ i_{k,m} \circ i_{n,k} = i_{n,m}$
3. $\forall n \geq 1 \exists m > n$ takie, że $i_{n,m} : A(K_n) \rightarrow K_m$ jest symplecjajalne.

Definicja 3.1.3. *Zgrubnym kompleksem symplecjajalnym przestrzeni metrycznej X nazywamy zgrubny kompleks symplecjajalny $\{K_1 \xrightarrow{i_{1,2}} K_2 \xrightarrow{i_{2,3}} \dots\}$ wraz z bornologicznymi rzutowaniami $p_n : K_n \rightarrow X, n \geq 1$ takimi, że:*

1. $\forall n \geq 1 p_n \sim_{ls} p_{n+1} \circ i_{n,n+1}$
2. dla dowolnej funkcji bornologicznej $g : K \rightarrow X$ z kompleksu symplecjajalnego K istnieje $n \geq 1$ oraz funkcja symplecjajalna $g_n : K \rightarrow K_n$ taka, że $g \sim_{ls} p_n \circ g_n$.
3. jeżeli K jest kompleksem symplecjajalnym oraz $g, h : K \rightarrow K_n$ są funkcjami symplecjajalnymi takimi, że $p_n \circ g \sim_{ls} p_n \circ h$, to istnieje $m \geq n$ takie, że $i_{n,m} \circ g$ oraz $i_{n,m} \circ h$ są sąsiednie ($i_{n,m} \circ g \sim_c i_{n,m} \circ h$).

Jak widać, powyższe pojęcia są prostym przeniesieniem pojęć poznanych przez nas wcześniej do świata symplecjajalnego. Zauważmy jednak, iż rozpatrując przekształcenia z kompleksu symplecjajalnego w kompleks symplecjajalny, zamiast o funkcjach bliskich mówimy o funkcjach sąsiednich. Jest to mocniejszy warunek, w istocie jednak, ze względu na warunek 3 definicji kompleksu zgrubnego, są one w wielkiej skali równoważne. Jeżeli mamy dwa przekształcenia bliskie sobie w kompleks zgrubny, oraz złożymy je z zanurzeniami w odpowiednio daleki kompleks w ciągu, okażą się one sąsiednie. Będziemy więc czasem posługiwali się tymi pojęciami w odniesieniu do zgrubnych kompleksów zamiennie.

Jak się również okazuje, do świata kompleksów symplecjajalnych daje się przenieść również pojęcia grafu Ripsa i zgrubnego grafu Ripsa:

Definicja 3.1.4. Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś \mathcal{U} jej jednostajnie ograniczonym pokryciem. *Kompleksem Ripsa* przestrzeni X (odpowiadającym pokryciu \mathcal{U}) nazywamy kompleks symplecjajalny $Rips_{\mathcal{U}}(X)$ rozpięty przez graf $Rips_{\mathcal{U}}(X)$:

$$Rips_{\mathcal{U}}(X) \stackrel{def}{=} F(RipsG_{\mathcal{U}}(X))$$

Szczególnym przypadkiem kompleksu Ripsa jest kompleks odpowiadający pokryciu kulanami domkniętymi o średnicy t . Graf taki oznaczamy $Rips_t(X)$.

Podobnie jak w przypadku grafów, możemy łatwo zdefiniować rzutowanie $p : Rips_{\mathcal{U}}(X) \rightarrow X$ przyporządkowujące danemu wierzchołkowi odpowiadający mu punkt. Jednostajna ograniczoność pokrycia \mathcal{U} ponownie gwarantuje nam, iż p jest bornologiczne.

Przykład 3.1.5. Niech \mathbb{Z} będzie zbiorem liczb całkowitych ze standardową metryką. Rozważamy $Rips_t(X)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Wówczas:

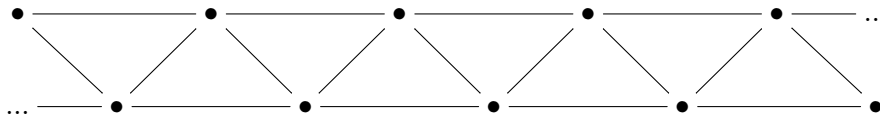
1. $t < 1$. Wtedy żadne dwa punkty nie są połączone, otrzymujemy zatem kompleks dyskretny:



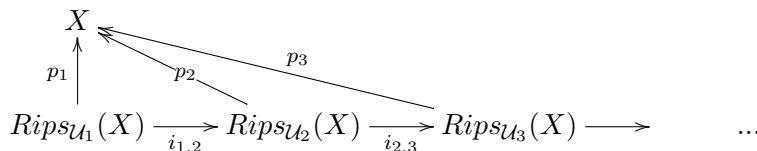
2. $t = 1$. Wówczas otrzymany kompleks jest grafem, gdzie krawędzią połączone będą każde dwa sąsiednie punkty:



3. $t = 2$. Wtedy w kompleksie Ripsa pojawiają się sympleksy wymiaru 2, rozpięte na każdych trzech sąsiadujących ze sobą wierzchołkach:



Stwierdzenie 3.1.6. Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ ciągiem jej pokryć jednostajnie ograniczonych takich, że \mathcal{U}_n jest wpisane w \mathcal{U}_{n+1} dla $n \geq 1$, oraz takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\mathcal{U}_n) = \infty$, gdzie $\lambda(\mathcal{U})$ to liczba Lebesgue'a pokrycia \mathcal{U} . Wówczas ciąg:



gdzie $p_n : Rips_{\mathcal{U}_n}(X) \rightarrow X, n \geq 1$ są standardowymi rzutowaniami na X , zaś $i_{n,m} : Rips_{\mathcal{U}_n}(X) \rightarrow Rips_{\mathcal{U}_m}(X), 1 \leq n \leq m$ są identycznościami, tworzy zgrubny kompleks symplecjalny przestrzeni metrycznej X .

Dowód. Pokażemy na początku, iż $\{Rips_{\mathcal{U}_1}(X) \rightarrow Rips_{\mathcal{U}_2}(X) \rightarrow \dots\}$ tworzy zgrubny kompleks symplecjalny. Ponieważ \mathcal{U}_n jest wpisane w \mathcal{U}_m dla $m \geq n$, każda funkcja $i_{n,m}$ jest symplecjalna. Ustalmy zatem $n \geq 1$ i niech pokrycie \mathcal{U}_n będzie jednostajnie ograniczone przez C . Weźmy $m \geq n$ takie, że $\lambda(\mathcal{U}_m) > 2C$. Wówczas jeżeli weźmiemy $\Delta \in A(Rips_{\mathcal{U}_n}(X))$, to istnieje wierzchołek $v \in Rips_{\mathcal{U}_n}(X)$ taki, że dla dowolnych dwóch wierzchołków $v_1, v_2 \in \Delta$ mamy $[v, v_1], [v, v_2] \in Rips_{\mathcal{U}_n}(X)$, zatem:

$$d_X(v_1, v_2) \leq d_X(v, v_1) + d_X(v, v_2) \leq 2C$$

Stąd wniosek, że dla $\Delta \in A(Rips_{\mathcal{U}_n}(X))$ mamy $diam_X(\Delta) < 2C$, więc przekształcenie $i_{n,m} : A(Rips_{\mathcal{U}_n}(X)) \rightarrow Rips_{\mathcal{U}_m}(X)$ jest symplecjalne.

Pokażemy teraz, że skonstruowany powyżej graf zgrubny odpowiada przestrzeni metrycznej X . Z definicji przekształceń p_* oraz i_* otrzymujemy natychmiast, że $p_n \sim_{ls} p_{n+1} \circ i_{n,n+1}$. Niech teraz $f : K \rightarrow X$ będzie funkcją bornologiczną z kompleksu symplecjalnego. Niech rodzina $\{f(\Delta) : \Delta \in K\}$ będzie jednostajnie ograniczona przez C , oraz niech $n \geq 1$ będzie takie, że $\lambda(\mathcal{U}_n) > C$. Wówczas dla dowolnego sympleksu $\Delta = [v_0, \dots, v_n] \in K$ mamy $diam(\{f(v_0), \dots, f(v_n)\}) < C$, zatem $[f(v_0), \dots, f(v_n)] \in Rips_{\mathcal{U}_n}(X)$. Funkcja $f_n : K \rightarrow Rips_{\mathcal{U}_n}(X)$, taka, że $f_n(v) = f(v)$ jest więc symplecjalna, oraz oczywiście $f \sim_{ls} p_n \circ f_n$.

Pozostaje pokazać warunek 3. definicji kompleksu zgrubnego przestrzeni metrycznej. Niech $f, g : K \rightarrow Rips_{\mathcal{U}_n}(X)$ będą takie, że $p_n \circ f$ oraz $p_n \circ g$ są d -bliskie. Oznaczmy ponadto przez C_1 ograniczenie rodziny $\{p_n \circ f(\Delta) : \Delta \in K\}$, zaś przez C_2 -ograniczenie rodziny $\{p_n \circ g(\Delta) : \Delta \in K\}$. Weźmy też $m \geq n$ takie, żeby $\lambda(\mathcal{U}_m) > d + \max\{C_1, C_2\}$. Wówczas jeśli v, w należą do pewnego sympleksu $\Delta \in K$, to:

$$d(p_n \circ f(v), p_n \circ g(w)) \leq d(p_n \circ f(v), p_n \circ g(v)) + d(p_n \circ g(v), p_n \circ g(w)) < d + \max\{C_1, C_2\}$$

Stąd już łatwo widać, iż $i_{n,m} \circ f$ oraz $i_{n,m} \circ g$ są sąsiednie, gdyż dla $\Delta = [v_0, \dots, v_n] \in K$ sympleks $[f(v_0), \dots, f(v_n), g(v_0), \dots, g(v_n)] \in Rips_{\mathcal{U}_m}(X)$. \square

Przykład 3.1.7. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Rozważmy jej pokrycia kulami domkniętymi o promieniach $t = 1, 2, \dots$. Wówczas mamy następujący kompleks zgrubny odpowiadający X :

$$Rips_1(X) \xrightarrow{i_{1,2}} Rips_2(X) \xrightarrow{i_{2,3}} Rips_3(X) \xrightarrow{i_{3,4}} \dots$$

Kompleks ten oznaczać będziemy $Rips_*(X)$.

Powyższe stwierdzenie pokazuje, iż dla każdej przestrzeni metrycznej jesteśmy w stanie skonstruować kompleks zgrubny jej odpowiadający, w sposób niemalże taki sam, w jaki konstruowaliśmy graf zgrubny. Okazuje się jednak, że nie jest to jedyny pomysł na konstrukcję kompleksu zgrubnego dla danej przestrzeni metrycznej. Innym przykładem takiego kompleksu jest *Kompleks Čecha*:

Stwierdzenie 3.1.8. Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ ciągiem jej pokryć jednostajnie ograniczonych takich, że:

- dla każdego $n \geq 1$ oraz $U \in \mathcal{U}_n$ istnieje $U' \in \mathcal{U}_{n+1}$ taki, że $St(U, \mathcal{U}_n) \subset U'$ (\mathcal{U}_n jest gwiazdowo wpisane w \mathcal{U}_{n+1})
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\mathcal{U}_n) = \infty$, gdzie $\lambda(\mathcal{U})$ to liczba Lebesgue'a pokrycia \mathcal{U} .

Mamy wtedy następujący ciąg nerwów pokryć:

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & & & & \\ & & \uparrow & \swarrow & \searrow & & \\ & & p_1 & & p_2 & & p_3 \\ N_X(\mathcal{U}_1) & \xrightarrow{i_{1,2}} & N_X(\mathcal{U}_2) & \xrightarrow{i_{2,3}} & N_X(\mathcal{U}_3) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

gdzie $p_n : N_X(\mathcal{U}_n) \rightarrow X, n \geq 1$ są funkcjami przyporządkowującymi wierzchołkowi $U_{n_i} \in \mathcal{U}_n$ dowolny punkt ze zbioru $U_{n_i} \subset X$, zaś $i_{n,n+1} : N_X(\mathcal{U}_n) \rightarrow N_X(\mathcal{U}_{n+1})$ są funkcjami przyporządkowującymi każdemu wierzchołkowi U_{n_i} wierzchołek U_{n+1_i} taki, że $St(U_{n_i}, \mathcal{U}_n) \subset U_{n+1_i}$. Wówczas powyższy ciąg tworzy zgrubny kompleks symplecjalny przestrzeni metrycznej X .

Dowód. Na początku powinniśmy pokazać, że funkcje p_* są bornologiczne, zaś i_* -symplicjalne. Weźmy $n \geq 1$ oraz $\Delta = [U_0, \dots, U_k] \in N(\mathcal{U}_n)$. Wtedy $U_0 \cap \dots \cap U_k \neq \emptyset$. Niech pokrycie \mathcal{U}_n będzie jednostajnie ograniczone przez C . Wówczas dla $l, m \in \{0, \dots, k\}$ mamy:

$$d(p_n(U_l), p_n(U_m)) < \text{diam}(U_l) + \text{diam}(U_m) < 2C$$

Rodzina $\{p_n(\Delta) : \Delta \in N(\mathcal{U}_n)\}$ jest więc jednostajnie ograniczona przez $2C$, p_n jest zatem bornologiczne. Żeby pokazać, że i_* jest symplicjalne, zauważmy, że jeżeli $\Delta = [U_0, \dots, U_k] \in N(\mathcal{U}_n)$, to $U_0 \cap \dots \cap U_k \neq \emptyset$. Stąd oczywiście $i(U_0) \cap \dots \cap i(U_k) \supset U_0 \cap \dots \cap U_k \neq \emptyset$, zatem $[i(U_0), \dots, i(U_k)] \in N(\mathcal{U}_{n+1})$. Dowodzi to symplicjalności i_* .

Pokażemy teraz, że kompleks Čecha jest kompleksem zgrubnym. Wiemy już, że i_* są symplicjalne, weźmy więc $n \geq 1$ i rozważmy $A(N(\mathcal{U}_n))$. Jeżeli $[U_0, \dots, U_k] \in A(N(\mathcal{U}_n))$, to istnieje $U \in \mathcal{U}_n$ taki, że $U_j \cap U \neq \emptyset$ dla $j = 0, \dots, k$. Wówczas oczywiście $U \subset St(U_j, \mathcal{U}_n) \subset i(U_j)$, skąd $i(U_0) \cap \dots \cap i(U_k) \neq \emptyset$. Zatem funkcja $i_{n,n+1} : A(N(\mathcal{U}_n)) \rightarrow N(\mathcal{U}_{n+1})$ jest symplicjalna.

Pozostaje pokazać, że kompleks Čecha jest kompleksem zgrubnym przestrzeni X . Weźmy $n \geq 1$ i niech pokrycie \mathcal{U}_{n+1} będzie jednostajnie ograniczone przez C . Wówczas oczywiście dla $U \in \mathcal{U}_n$ zarówno $p_n(U)$, jak i $p_{n+1} \circ i_{n,n+1}$ są zawarte w pewnym zbiorze $U' \in \mathcal{U}_{n+1}$. Stąd wniosek, że p_n oraz $p_{n+1} \circ i_{n,n+1}$ są sobie C -bliskie.

Rozważmy teraz funkcję bornologiczną $f : K \rightarrow X$ z kompleksu symplicjalnego K . Jeżeli rodzina $\{f(\Delta) : \Delta \in K\}$ jest jednostajnie ograniczona przez C , to wybierzmy n takie, że $\lambda(\mathcal{U}_n) > C$. Zdefiniujemy funkcję $f_{n+1} : K \rightarrow N(\mathcal{U}_{n+1})$ następująco: dla każdego wierzchołka $v \in K$ wybierzmy $U_v \in \mathcal{U}_n$ taki, że $f(v) \in U_v$ i określmy $f_{n+1}(v) = i_{n,n+1}(U_v)$. Z wyboru n widzimy, że dla $\Delta = [v_0, \dots, v_k] \in K$ zbiór $\{f(v_0), \dots, f(v_k)\} \subset U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}_n$. Wynika stąd, że $i_{n,n+1}(U_{v_0}) \cap \dots \cap i_{n,n+1}(U_{v_k}) \supset U \neq \emptyset$, zatem $f_{n,n+1}$ jest symplicjalne. Ponadto, jeżeli pokrycie \mathcal{U}_{n+1} jest jednostajnie ograniczone przez D , to oczywiście $d(f(v), p_{n+1} \circ f_{n+1}(v)) < D$. f oraz $p_{n+1} \circ f_{n+1}$ są więc D -bliskie.

Na koniec rozważmy dwie funkcje symplicjalne $f, g : K \rightarrow N(\mathcal{U}_n)$ takie, że $p_n \circ f$ oraz $p_n \circ g$ są d -bliskie. Niech ponadto zbiór $\{p_n \circ f(\Delta) : \Delta \in K\}$ będzie jednostajnie ograniczony przez C_1 zaś $\{p_n \circ g(\Delta) : \Delta \in K\}$ -przez C_2 . Wtedy istnieje $m \geq n$ takie, że $\lambda(\mathcal{U}_m) > d + \max\{C_1, C_2\}$. Łatwo wówczas zauważyć, że dla $\Delta = [v_0, \dots, v_k] \in K$ zbiór $p_n \circ f(\Delta) \cup p_n \circ g(\Delta)$ jest ograniczony przez $d + \max\{C_1, C_2\}$, zatem istnieje zbiór $U \in \mathcal{U}_m$ taki, że $p_n \circ f(\Delta) \cup p_n \circ g(\Delta) \subset U$. Łatwo zauważyć (jak wyżej), że:

$$[i_{n,m+1} \circ f(v_0), \dots, i_{n,m+1} \circ f(v_k), i_{n,m+1} \circ g(v_0), \dots, i_{n,m+1} \circ g(v_k)] \in N(\mathcal{U}_{m+1})$$

zatem $i_{n,m+1} \circ g$ oraz $i_{n,m+1} \circ f$ są sąsiednie, q.e.d. □

Kompleks Čecha przestrzeni X (z wybranym odpowiednim ciągiem pokryć $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots\}$) oznaczamy będziemy $\check{C}ech_{\mathcal{U}}(X)$ (lub po prostu $\check{C}ech_*(X)$).

Zauważmy, że dokładnie tak samo, jak dla grafów, możemy wprowadzić pre-morfizmy i morfizmy między kompleksami zgrubnymi, zastępując jedynie w odpowiednich miejscach relację bliskości przez relację sąsiedztwa funkcji:

Definicja 3.1.9. *Pre-morfizmem* kompleksów zgrubnych $\mathcal{K} = \{K_1 \xrightarrow{i_{1,2}} K_2 \xrightarrow{i_{2,3}} \dots\}$ oraz $\mathcal{L} = \{L_1 \xrightarrow{j_{1,2}} L_2 \xrightarrow{j_{2,3}} \dots\}$ nazywamy zbiór funkcji symplecjalnych: $F = \{f_i : K_i \rightarrow L_{n_F(i)}, i \geq 1\}$ takich, że dla każdego $k \geq 1$ istnieje $m \geq n_F(k+1)$ takie, że $j_{n_F(k),m} \circ f_k \sim_c j_{n_F(k+1),m} \circ f_{k+1} \circ i_{k,k+1}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_1 & \xrightarrow{j_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{j} & L_{n_F(1)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & L_{n_F(2)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & L_{n_F(3)} & \xrightarrow{j} & \dots \\
 & & & \nearrow f_1 & & & & \nearrow f_2 & & & & \nearrow f_3 & & & \\
 K_1 & \xrightarrow{i_{1,2}} & K_2 & \xrightarrow{i_{2,3}} & K_3 & \xrightarrow{i_{3,4}} & \dots & & & & & & & &
 \end{array}$$

Definicja 3.1.10. *Zbiorem morfizmów* między kompleksami zgrubnymi \mathcal{K} i \mathcal{L} nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji \sim_{ls} na zbiorze pre-morfizmów z \mathcal{K} do \mathcal{L} , gdzie dwa pre-morfizmy $F, G : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ uznajemy za równoważne ($F \sim_{ls} G$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \geq 1$ istnieje $m \geq \max\{n_F(k), n_G(k)\}$ takie, że $j_{n_F(k),m} \circ f_k \sim_c j_{n_G(k),m} \circ g_k$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_1 & \xrightarrow{j_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{j} & L_{n_F(k)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & L_{n_G(k)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & L_m & \xrightarrow{j} & \dots \\
 & & & \nearrow f_k & & & & \nearrow g_k & & & & \nearrow j \circ f_k & & & \\
 \dots & \xrightarrow{i} & K_k & \xrightarrow{i} & \dots & & & \nearrow j \circ g_k & & & & & & &
 \end{array}$$

Podobnie jak dla grafów, możemy łatwo stwierdzić, że złożenie dwóch morfizmów jest dobrze określone. Możemy również w dokładnie analogiczny sposób wyprowadzić kilka istotnych faktów świadczących o głębokiej analogii między przestrzeniami metrycznymi i odpowiadającymi im kompleksami zgrubnymi:

Twierdzenie 3.1.11. *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, zaś \mathcal{K}, \mathcal{L} - odpowiadającymi im kompleksami zgrubnymi z rzutowaniami: $p_* : \mathcal{K} \rightarrow X$ oraz $q_* : \mathcal{L} \rightarrow Y$. Wówczas istnieje naturalna bijekcja między bornologicznymi funkcjami $X \rightarrow Y$ (z dokładnością do zgrubnej równoważności), a morfizmami $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, tzn. mając daną funkcję bornologiczną $f : X \rightarrow Y$, istnieje dokładnie jeden morfizm $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ taki, że poniższy diagram jest przemienny w wielkiej skali:*

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 p_* \nearrow & & & \nearrow q_* \\
 \mathcal{K} & \xrightarrow{F} & \mathcal{L} &
 \end{array}$$

i na odwrót: dla każdego morfizmu $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ istnieje dokładnie jedno (z dokładnością do zgrubnej równoważności) przekształcenie bornologiczne $f : X \rightarrow Y$ uprzemienniające powyższy diagram.

Wniosek 3.1.12. *Dowolne dwa zgrubne kompleksy symplecjalne przestrzeni metrycznej X są zgrubnie równoważne.*

Wniosek 3.1.13. Kompleksy Čecha i Ripsa danej przestrzeni metrycznej X są zgrubnie równoważne.

Wniosek 3.1.14. Jeżeli przestrzeń metryczna X jest zgrubnie równoważna przestrzeni Y , to odpowiadające im kompleksy zgrubne również są sobie zgrubnie równoważne.

3.2. Wymiar asymptotyczny kompleksów zgrubnych

Jak pokazaliśmy wyżej, w kompleksie zgrubnym, tak jak w grafie zgrubnym danej przestrzeni metrycznej, przechowywana jest cała informacja dotycząca danej przestrzeni ze zgrubnego punktu widzenia. Po co zatem wprowadzać kompleksy zgrubne, jeżeli grafy są obiektami dużo prostszymi? Okazuje się, iż wiele niezmienników zgrubnej równoważności daje się łatwo przetłumaczyć na pewne własności kompleksów zgrubnych. Jednym z takich pojęć jest wymiar asymptotyczny:

Definicja 3.2.1. Niech $\mathcal{K} = \{K_1 \xrightarrow{i} K_2 \xrightarrow{i} \dots\}$ będzie zgrubnym kompleksem symplecjajalnym. Wówczas mówimy, że \mathcal{K} ma wymiar asymptotyczny $\leq n$, jeżeli dla każdego $k \geq 1$ istnieje $l \geq k$, kompleks symplecjajalny L wymiaru $\leq n$ oraz przekształcenia symplecjajalne $f : K_k \rightarrow L$, $g : L \rightarrow K_l$ takie, że $g \circ f$ jest sąsiednie z $i_{k,l}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & L & & \\ & & & & \nearrow f & & \searrow g \\ \dots & \xrightarrow{i} & K_k & \xrightarrow{i} & \dots & \xrightarrow{i} & K_l \xrightarrow{i} \dots \end{array}$$

Oznaczamy to $Asdim(\mathcal{K}) \leq n$. Mówimy, że \mathcal{K} ma wymiar asymptotyczny n ($Asdim(\mathcal{K}) = n$), jeżeli $Asdim(\mathcal{K}) \leq n$ oraz nie jest prawdą, że $Asdim(\mathcal{K}) \leq n-1$. Podobnie, \mathcal{K} ma wymiar asymptotyczny ∞ , jeżeli dla dowolnego $n < \infty$ nieprawdą jest, że $Asdim(\mathcal{K}) \leq n$.

Jeżeli kompleks zgrubny jest wymiaru $\leq n$, nie mówi nam to nic o wymiarach pojedynczych kompleksów symplecjajalnych w kompleksie zgrubnym. Wiemy jednak, że odpowiednio dalekie zanurzenia jesteśmy w stanie aproksymować w wymiarze $\leq n$. Okazuje się, że powyższe pojęcie jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności zgrubnych kompleksów symplecjajalnych:

Stwierdzenie 3.2.2. Jeżeli $\mathcal{K} = \{K_1 \xrightarrow{i} K_2 \xrightarrow{i} \dots\}$ oraz $\mathcal{L} = \{L_1 \xrightarrow{j} L_2 \xrightarrow{j} \dots\}$ są zgrubnie równoważnymi kompleksami zgrubnymi, to $Asdim(\mathcal{K}) = Asdim(\mathcal{L})$.

Dowód. Niech $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ oraz $G : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ będą pre-morfizmami takimi, że $G \circ F \sim_{ls} Id_{\mathcal{K}}$ oraz $F \circ G \sim_{ls} Id_{\mathcal{L}}$. Niech $Asdim(\mathcal{L}) \leq n$, pokażemy, że $Asdim(\mathcal{K}) \leq n$. Jeżeli $n = \infty$, jest to oczywiste, załóżmy zatem, że $n < \infty$. Ustalmy $k \geq 1$, z założenia istnieją $m \geq n_F(k)$, kompleks symplecjajalny M wymiaru $\leq n$ oraz funkcje symplecjajalne $L_{n_F(k)} \xrightarrow{h_1} M \xrightarrow{h_2} L_m$ takie, że $h_2 \circ h_1 \sim_c j_{k,m}$. Ponieważ G oraz F są zgrubnymi równoważnościami

kompleksów, możemy wziąć $s \geq m$ oraz $t \geq n_G(s)$ takie, że $i_{t, n_G(s)} \circ g_s \circ j_{n_F(k), s} \circ f_k$ jest bliskie $i_{k, t}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & L & & \\
 & & & & \nearrow^{h_1} & & \searrow^{h_2} \\
 \dots & \xrightarrow{j} & L_{n_F(k)} & \xrightarrow{j} & \dots & \xrightarrow{j} & L_m & \xrightarrow{j} & L_s & \xrightarrow{j} & \dots \\
 & & \nearrow^{f_k} & & & & & & \searrow^{g_s} & & \\
 \dots & \xrightarrow{i} & K_k & \xrightarrow{i} & \dots & & \dots & \xrightarrow{i} & K_{n_G(s)} & \xrightarrow{i} & K_t & \xrightarrow{i} & \dots
 \end{array}$$

Widzimy stąd, że $i_{k, t}$ jest sąsiednie z $i_{n_G(s), t} \circ g_s \circ j_{n_F(k), s} \circ f_k$, to zaś jest sąsiednie z:

$$i_{n_G(s), t} \circ g_s \circ j_{s, m} \circ h_2 \circ h_1 \circ f_k$$

Jeżeli zatem weźmiemy (z własności kompleksu zgrubnego) $u \geq s$ takie, że funkcja $i_{t, u} : A(K_t) \rightarrow K_u$ jest symplecjalna, to okazuje się, że:

$$i_{k, u} \sim_c i_{n_G(s), u} \circ g_s \circ j_{s, m} \circ h_2 \circ h_1 \circ f_k$$

Rzeczywiście, obie funkcje (bez złożenia z $i_{t, u}$) są sąsiednie z $i_{n_G(s), t} \circ g_s \circ j_{n_F(k), s} \circ f_k$, więc dla dowolnego sympleksu $\Delta \in K_k$ istnieje taki wierzchołek $v \in K_t$, że obrazy Δ przy obu powyższych funkcjach zawierają się w $\overline{St(v)}$.

Udowodniliśmy zatem, że $Asdim(\mathcal{K}) \leq Asdim(\mathcal{L})$. Dokładnie analogiczne rozumowanie pozwala stwierdzić również, że $Asdim(\mathcal{L}) \leq Asdim(\mathcal{K})$, czyli $Asdim(\mathcal{K}) = Asdim(\mathcal{L})$, q.e.d. \square

Jeżeli dany zgrubny kompleks symplecjalny odpowiada pewnej przestrzeni metrycznej, można zauważyć dużo więcej: otóż tak zdefiniowany wymiar asymptotyczny jest w istocie przeniesieniem wymiaru asymptotycznego przestrzeni metrycznej na odpowiadającą jej kompleks:

Twierdzenie 3.2.3. *Niech X będzie przestrzenią metryczną, zaś $\mathcal{K} = \{K_1 \xrightarrow{i} K_2 \xrightarrow{i} \dots\}$ wraz z bornologicznymi rzutowaniami $p_k : K_k \rightarrow X$ odpowiadającym jej kompleksem zgrubnym. Wówczas $Asdim(X) = Asdim(\mathcal{K})$.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy pokazując nierówności $Asdim(\mathcal{K}) \leq Asdim(X)$ oraz $Asdim(X) \leq Asdim(\mathcal{K})$:

1) $Asdim(\mathcal{K}) \leq Asdim(X)$:

Jeżeli $Asdim(X) = \infty$, teza jest oczywista, niech więc $Asdim(X) = n < \infty$. Wówczas z definicji wymiaru asymptotycznego możemy wybrać wyraz po wyrazie taki ciąg pokryć $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ przestrzeni X taki, żeby \mathcal{U}_k było gwiazdowo wpisane w \mathcal{U}_{k+1} dla $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\mathcal{U}_n) = \infty$, a ponadto każde pokrycie \mathcal{U}_k miało krotność $\leq n + 1$. Wówczas oczywiście nerw każdego pokrycia $N(\mathcal{U}_k)$ ma wymiar co najwyżej n , zatem kompleks Čecha odpowiadający X i pokryciom $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ ma w oczywisty sposób wymiar asymptotyczny $\leq n$. Ponieważ kompleksy \mathcal{K} oraz $\check{C}ech_{\mathcal{U}_*}(X)$ są zgrubnie równoważne, mają ten sam wymiar asymptotyczny, więc $Asdim(\mathcal{K}) \leq Asdim(X)$, q.e.d.

2) $Asdim(X) \leq Asdim(\mathcal{K})$:

Podobnie jak wyżej, jeżeli $Asdim(\mathcal{K}) = \infty$, teza jest oczywista, zatem niech $Asdim(\mathcal{K}) = n < \infty$. Niech \mathcal{U} będzie jednostajnie ograniczonym pokryciem X . Przyjmując $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$ oraz ze względu na równoważność zgrubnych kompleksów symplecjajalnych tej samej przestrzeni metrycznej, możemy b.s.o. założyć, że $\mathcal{K} = \check{C}ech_{\mathcal{U}_*}(X)$ dla pewnego ciągu pokryć $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ spełniającego warunki wymienione w definicji kompleksu Čecha. Ponieważ $Asdim(\mathcal{K}) = n$, więc istnieje $k \geq 1$, kompleks symplecjajalny L wymiaru $\leq n$ oraz funkcje symplecjajalne $K_1 \xrightarrow{f} L \xrightarrow{h} K_k$ takie, że $h \circ f \sim_c i_{1,k}$. Zdefiniujemy pokrycie \mathcal{V} przestrzeni X jak następuje:

$$\mathcal{V} = \{\cup U : U \in \mathcal{U} : f(U) = v, v \in L\}$$

Jako pojedyncze elementy nowego pokrycia \mathcal{V} bierzemy zatem sumę tych elementów U , które przy odwzorowaniu f mają ten sam obraz. Pokrycie \mathcal{U} jest oczywiście wpisane w \mathcal{V} , musimy jeszcze pokazać, że \mathcal{V} ma krotność $\leq n + 1$ oraz jest jednostajnie ograniczone.

Załóżmy nie wprost, że pokrycie \mathcal{V} ma krotność przynajmniej $n + 2$. Istnieją wobec tego takie elementy U_0, \dots, U_{n+1} pokrycia \mathcal{U} takie, że $\cap_{i=0}^{n+1} U_i \neq \emptyset$ oraz $f(U_i) = v_i$ dla $i = 0, \dots, n + 1$, gdzie wierzchołki $v_i \in L$ są parami różne. Wynika stąd jednak, że $[U_0, \dots, U_{n+1}] \in N(\mathcal{U}) = K_1$, zatem wobec symplecjajalności funkcji f mamy $[v_0, \dots, v_{n+1}] \in L$. Przeczy to jednak temu, że $dim(L) \leq n$. Zatem rzeczywiście pokrycie \mathcal{V} ma krotność co najwyżej $n + 1$.

Pozostaje pokazać, że \mathcal{V} jest jednostajnie ograniczone. Wybierzmy wierzchołek $v \in L$, wówczas wystarczy, że pokażemy, iż dla dowolnych $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ takich, że $f(U_1) = f(U_2) = v$ wielkość $diam(U_1 \cup U_2)$ daje się ograniczyć przez stałą niezależną od wyboru v, U_1, U_2 . Oznaczmy $h(v) = W \in K_k$. Wiemy, że odwzorowania $h \circ f$ oraz $i_{1,k}$ są sąsiednie, zatem $i_{1,k}(U_1) \cap W \neq \emptyset$ oraz $i_{1,k}(U_2) \cap W \neq \emptyset$. Wiemy też z własności kompleksu Čecha, że $U_j \subset i_{1,k}(U_j), j = 1, 2$. Jeżeli więc pokrycie \mathcal{U}_k , któremu odpowiada kompleks K_k , jest jednostajnie ograniczone przez $d < \infty$, to $diam(U_1 \cup U_2) \leq 3d$, q.e.d. \square

3.3. Spójność kompleksów zgrubnych i zgrubna geodezyjność

Inną własnością, którą można przypisać zgrubnym przestrzeniom metrycznym, jest zgrubna n -spójność. Jest to własność o tyle inna od poprzednio omawianych, że definiuje się ją odwołując się bezpośrednio do odpowiadających danej przestrzeni metrycznej zgrubnych kompleksów symplecjajalnych:

Definicja 3.3.1. Mówimy, że zgrubny kompleks symplecjajalny $\mathcal{K} = \{K_1 \xrightarrow{i} K_2 \xrightarrow{i} \dots\}$ jest n -spójny, jeżeli dla dowolnego $r \geq 1$ istnieje $R \geq r$ takie, że funkcja $i_{r,R} : |K_r| \rightarrow |K_R|$ indukuje zerowy homomorfizm na k -tej grupie homotopii π_k dla $0 \leq k \leq n$.

Stwierdzenie 3.3.2. Zgrubna n -spójność jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności wśród zgrubnych kompleksów symplecjajalnych

Dowód. Niech $\mathcal{K} = \{K_1 \xrightarrow{i} K_2 \xrightarrow{i} \dots\}$ oraz $\mathcal{L} = \{L_1 \xrightarrow{j} L_2 \xrightarrow{j} \dots\}$ będą kompleksami zgrubnymi, zaś $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ oraz $G : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ takimi morfizmami, że $G \circ F \sim_{ls} Id_{\mathcal{K}}$ i $F \circ G \sim_{ls} Id_{\mathcal{L}}$. Pokażemy, że jeżeli kompleks \mathcal{L} jest n -spójny, to kompleks \mathcal{K} również taki jest. Ustalmy $k \geq 1$. Z definicji n -spójności oraz G i F istnieją takie $l \geq n_F(k)$ oraz $m \geq n_G(l)$, że:

- $i_{k,m} \sim_c i_{n_G(l),m} \circ g_l \circ j_{n_F(k),l} \circ f_k$
- indukowane homomorfizmy $\pi_q(|L_{n_F(k)}|) \xrightarrow{j^*} \pi_q(|L_l|)$ są trywialne dla $0 \leq q \leq n$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{j} & L_{n_F(k)} & \xrightarrow{j} & L_l & \xrightarrow{j} & \dots \\
 & & \uparrow f_k & & \downarrow g_l & & \\
 \dots & \xrightarrow{i} & K_k & \xrightarrow{i} & \dots & \xrightarrow{i} & K_{n_G(l)} \xrightarrow{i} K_m \xrightarrow{i} \dots
 \end{array}$$

Wówczas oczywiście $i_{n_G(l),m} \circ g_l \circ j_{n_F(k),l} \circ f_k$ indukuje trywialny homomorfizm na $\pi_q(|K_k|) \rightarrow \pi_q(|K_m|)$ dla $0 \leq q \leq n$. Ponieważ jednak funkcja ta jest sąsiednia z $i_{k,m} : |K_k| \rightarrow |K_m|$, jest z nią homotopijna, zatem indukowany homomorfizm $i_{k,m}^*$ jest na odpowiednich grupach homotopii trywialny, q.e.d. \square

Mając powyższe stwierdzenie na uwadze, możemy zdefiniować n -spójność przestrzeni metrycznych:

Definicja 3.3.3. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *zgrubnie n -spójna*, jeżeli dowolny odpowiadający jej kompleks zgrubny \mathcal{K} jest n -spójny.

Oczywiście jeżeli jeden odpowiadający danej przestrzeni metrycznej kompleks zgrubny jest n -spójny, to każdy inny też. Mamy też stąd natychmiast wniosek:

Wniosek 3.3.4. *Zgrubna n -spójność przestrzeni metrycznych jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności.*

W dokładnie analogiczny sposób jesteśmy w stanie zdefiniować *homologiczną n -spójność* zgrubnego kompleksu sympleksyjnego, a w rezultacie także przestrzeni metrycznej. Wszystkie powyższe definicje i wnioski są dokładnie takie same, z tym, że badanie grup homotopii zastępujemy badaniem odpowiednich zredukowanych grup homologii.

Pojęcie zgrubnej n -spójności, chociaż nie jest zdefiniowane bezpośrednio, ma pewne wyraźne konsekwencje geometryczne. Żeby je badać, najczęściej będziemy odwoływać się do zgrubnego kompleksu Ripsa odpowiadającego pokryciom kulami domkniętymi o naturalnych promieniach ($Rips_*(X)$), ze względu na jego dosyć geometryczną i intuicyjną konstrukcję. Na początek zbadamy 0-spójność. Zanim jednak to zrobimy, przyjrzymy się jeszcze pojęciu t -łańcuchowej spójności przestrzeni dla pewnego $t < \infty$:

Definicja 3.3.5. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *t -łańcuchowo spójna*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje łączący je t -łańcuch, tzn. istnieje skończony ciąg $x = x_0, \dots, x_n = y$ taki, że $d(x_{i-1}, x_i) \leq t$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Przestrzeń łańcuchowo t -spójną dla pewnego $t < \infty$ będziemy ogólnie nazywać przestrzenią *łańcuchowo spójną*. Łańcuchowa spójność jest więc w istocie wielkoskalowym odpowiednikiem łukowej spójności. Jeżeli odejdziemy odpowiednio daleko i spojrzymy na naszą przestrzeń, wyda się nam ona łukowo spójna. Z własności łańcuchowej spójności w oczywisty sposób wynika, że dana przestrzeń jest zgrubnie spójna. W drugą stronę jednak implikacja nie zachodzi, o czym mówi poniższy przykład:

Przykład 3.3.6. Niech $X = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ będzie przestrzenią złożoną z kwadratów liczb naturalnych, z metryką dziedziczoną z prostej rzeczywistej. Przestrzeń ta jest oczywiście zgrubnie spójna, nie jest jednak łańcuchowo spójna. Istotnie, dla dowolnego $t < \infty$ istnieje $n^2 \in X$ takie, że $d(n^2, X \setminus \{n^2\}) > t$. Wystarczy wziąć chociażby $n > t + 1$, wówczas $d(n^2, X \setminus \{n^2\}) \geq 2t + 1 > t$. Punktu n^2 nie da się więc połączyć t -łańcuchem z żadnym innym punktem przestrzeni X .

Łańcuchowa spójność ma jak widać wyraźną interpretację geometryczną. Okazuje się, że tak jak w przypadku przestrzeni metrycznych pojęcia łukowej spójności i 0-spójności były w istocie tożsame, przestrzeń metryczna jest łańcuchowo spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest zgrubnie 0-spójna:

Stwierdzenie 3.3.7. *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. X jest zgrubnie 0-spójna
2. Istnieje $t < \infty$ takie, że kompleks Ripsa $|Rips_t(X)|$ jest spójny
3. X jest t -łańcuchowo spójna dla pewnego $t < \infty$

Dowód. (1) \Rightarrow (2): Ponieważ X jest 0-spójna, istnieje $t < \infty$ takie, że zanurzenie $i_{1,t}^* : \pi_0(|Rips_1(X)|) \rightarrow \pi_0(|Rips_t(X)|)$ jest trywialne, czyli obraz $|Rips_1(X)|$ zawiera się w jednej (łukowej) spójnej składowej $|Rips_t(X)|$. Ponieważ jednak funkcja $i_{1,t}$ jest identyfikacją na wierzchołkach, wynika stąd, że $|Rips_t(X)|$ posiada tylko jedną składową, jest zatem spójny.

(2) \Rightarrow (3): $|Rips_t(X)|$ jest spójny, jest też więc (jako geometryczna realizacja pewnego kompleksu sympleksyjnego) łukowo spójny. Dla dowolnych dwóch wierzchołków $x, y \in X$ istnieje zatem ścieżka między nimi, złożona z krawędzi $[x_i, x_{i+1}]$ takich, że $d(x_i, x_{i+1}) \leq t$ dla każdego i . X jest zatem łańcuchowo spójna, q.e.d.

(3) \Rightarrow (1): Łatwo zauważyć, że ponieważ X jest t -łańcuchowo spójna, to każda geometryczna realizacja kompleksu Ripsa $|Rips_s(X)|$ dla $s \geq t$ jest łukowo spójna, zatem $\pi_0(|Rips_s(X)|) = *$. Stąd łatwo wynika, że X jest zgrubnie 0-spójna. \square

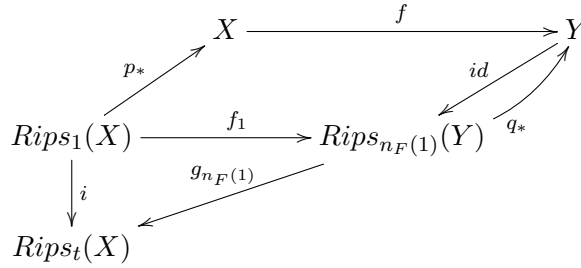
Nieco mocniejszym pojęciem jest *zgrubna geodezyjność* przestrzeni metrycznej. Definicja jest bardzo prosta i bezpośrednio wynika z niej, iż jest to niezmiennik zgrubnych równoważności:

Definicja 3.3.8. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *zgrubnie geodezyjna*, jeżeli jest zgrubnie równoważna pewnej przestrzeni geodezyjnej.

Stwierdzenie 3.3.9. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. X jest zgrubnie geodezyjna
2. X jest 0-spójna oraz istnieje $t < \infty$ takie, że funkcja identycznościowa $X \xrightarrow{id} Rips_t(X)$ jest bornologiczna
3. X jest 0-spójna oraz istnieje $t < \infty$ takie, że funkcja identycznościowa $X \xrightarrow{id} Rips_t(X)$ jest zgrubną równoważnością

Dowód. (1) \Rightarrow (2): Niech Y będzie przestrzenią geodezyjną zgrubnie równoważną z X , i niech $f : X \rightarrow Y$ będzie zgrubną równoważnością. Y jest łukowo spójna, jest więc łańcuchowo spójna, zatem X również jest. Rozważmy kompleksy zgrubne $Rips_*(X)$ oraz $Rips_*(Y)$ wraz z odpowiednimi rzutowaniami $p_* : Rips_*(X) \rightarrow X$, $q_* : Rips_*(Y) \rightarrow Y$. Wówczas oczywiście funkcja identycznościowa $Y \xrightarrow{id_Y} Rips_1(Y)$ jest bornologiczna. Niech $F : Rips_*(X) \rightarrow Rips_*(Y)$ będzie równoważnością kompleksów zgrubnych odpowiadającą f , zaś $G : Rips_*(Y) \rightarrow Rips_*(X)$ - jej zgrubną odwrotnością. Wówczas $q_* \circ f_1 \sim_{ls} f \circ p_*$, skąd $f_1 \sim_{ls} id_Y \circ f \circ p_*$. Oczywiście istnieje $t \geq n_{G \circ F}(1)$ takie, że $i_{1,t} \sim_{ls} (g \circ f)_1$, skąd wniosek, że funkcja $id : X \rightarrow Rips_t(X)$ jest bliska $i_{n_{G \circ F}(1),t} \circ g_{n_F(1)} \circ id_Y \circ f$, która jest funkcją bornologiczną. $id : X \rightarrow Rips_t(X)$ również jest więc bornologiczna, q.e.d.

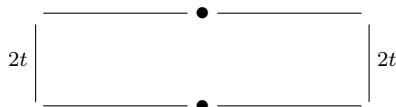


(2) \Rightarrow (3): Jeżeli $id : X \rightarrow Rips_t(X)$ jest bornologiczna, zaś $p_t : Rips_t(X) \rightarrow X$ jest rzutowaniem identycznościowym na X , to $id \circ p = id_{Rips_t(X)}$ oraz $p \circ id = id_X$. $id : X \rightarrow Rips_t(X)$ jest więc zgrubną równoważnością.

(3) \Rightarrow (1): Oczywiście jeżeli X jest zgrubnie równoważna kompleksowi Ripsa $Rips_t(X)$ dla pewnego $t < \infty$, jest również równoważna każdemu innemu kompleksowi $Rips_s(X)$ dla $s \geq t$. Możemy więc z 0-spójności X dobrać $t < \infty$ takie, że X jest zgrubnie równoważne $Rips_t(X)$ oraz $|Rips_t(X)|$ jest spójny. $|Rips_t(X)|$ jest jednak przestrzenią geodezyjną i zgrubnie równoważną $Rips_t(X)$, co dowodzi tego, iż X jest zgrubnie geodezyjna. \square

Powyższe stwierdzenie pozwala na przedstawienie dość ciekawej charakteryzacji przestrzeni zgrubnie geodezyjnej. Jest to w istocie przestrzeń taka, której pewien kompleks (a nawet graf!) Ripsa jest jej zgrubnie równoważny. Poniższy przykład pokazuje, że jest to pojęcie istotnie mocniejsze od 0-spójności:

Przykład 3.3.10. Niech $X = \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{k>0} \cup_{n>0} (k^2, k^2 + k) \times (n^2, n^2 + n)$. X jest więc w istocie płaszczyzną z wyjętymi parami rozłącznymi prostokątami o rozmiarach $k \times n$, gdzie k i n przebiegają wszystkie dodatnie liczby naturalne. Jako metrykę przyjmujemy metrykę dziedziczną z \mathbb{R}^2 . X jest oczywiście łukowo spójna, więc też 0-spójna. Jak się jednak okazuje, nie jest zgrubnie geodezyjna. Żeby to zobaczyć, weźmy $t \in \mathbb{N}$ i odpowiedni graf Ripsa $Rips_t(X)$. Pokażemy, że $id : X \rightarrow Rips_t(X)$ nie jest bornologiczna. Rozważmy bowiem wszystkie wycięte prostokąty o jednym boku równym $2t$ oraz pary punktów po przeciwnych stronach prostokątów rozmieszczonych w połowie drugiego boku:



Wszystkie one są od siebie w odległości parami $2t$. Ponieważ jednak nie ma globalnego ograniczenia górnego na długość drugiego boku prostokąta, odległości między odpowiednimi parami wierzchołków w kompleksie $Rips_t(X)$ również nie są ograniczone. $id : X \rightarrow Rips_t(X)$ nie może być zatem bornologiczna.

3.4. Zgrubna jednospójność

Zgrubna 0-spójność ma, jak zobaczyliśmy, dosyć jasną interpretację geometryczną. Co jednak ze spójnością w wyższych wymiarach? Okazuje się, że własność zgrubnej 1 - spójności (co będziemy nazywać zgrubną jednospójnością) również można łatwo zobaczyć, choć jej natura jest już nieco inna. By ją opisać, musimy wprowadzić pojęcie jednostajnego generowania grupy podstawowej:

Definicja 3.4.1. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że $\pi_1(X)$ jest *jednostajnie generowana*, jeżeli istnieje $R < \infty$ takie, że każda pętla $\alpha \in \pi_1(X)$ (jako przekształcenie $S^1 \rightarrow X$) przedłuża się do funkcji z być może podziurawionego dysku tak, że każdy łukowo spójny otwór w obrazie ma średnicę nie większą niż R .

Jeżeli $\pi_1(X)$ jest jednostajnie generowana, oznacza to, iż każdą pętlę w tej przestrzeni daje się homotopijnie zastąpić przez sumę odpowiednio małych pętelek, połączonych ze sobą. Patrząc z odpowiednio dużej odległości przestrzeń ta przypomina więc przestrzeń o zerowej grupie podstawowej. Okazuje się, że dla przestrzeni geodezyjnych zgrubna jednospójność odpowiada dokładnie jednostajnemu generowaniu grupy $\pi_1(X)$:

Stwierdzenie 3.4.2. Niech X będzie geodezyjną przestrzenią metryczną. Wówczas równoważne są warunki:

1. X jest zgrubnie jednospójna
2. istnieje $t < \infty$ takie, że $\pi_1(|Rips_t(X)|) = 0$
3. istnieje $t < \infty$ takie, że $\pi_1(|Rips_s(X)|) = 0$ dla $s \geq t$

4. $\pi_1(X)$ jest jednostajnie generowana

Dowód. (1) \Rightarrow (2),(3): Zauważmy, że ponieważ X jest geodezyjna, każdy indukowany homomorfizm $i_* : \pi_1(|Rips_t(X)|) \rightarrow \pi_1(|Rips_s(X)|)$ dla $t \leq s$ jest epimorfizmem. Rzeczywiście, dowolna pętla w $|Rips_s(X)|$ jest homotopijna z pętlą α zawierającą się w skończonej ilości krawędzi kompleksu. Każda taka krawędź $[v, w]$ łączy dwa punkty, które są w X w odległości nie większej niż s . Ponieważ X jest geodezyjna, istnieje ścieżka między v i w o długości $\leq s$, którą można podzielić na kawałki o długościach $\leq t$ i krańcach w punktach $v = v_1, \dots, v_n = w$. Oczywiście $[v_1, \dots, v_n] \in Rips_s(X)$, zatem ścieżka $[v, w]$ w $|Rips_s(X)|$ jest homotopijna względem swych końców ze ścieżką utworzoną z krawędzi $[v_1, v_2], \dots, [v_{n-1}, v_n]$. Ta zaś jest obrazem pewnej ścieżki w $|Rips_t(X)|$ o tych samych końcach v, w . Podobnie możemy uczynić ze wszystkimi innymi kawałkami pętli α , zatem jej klasa homotopii jest obrazem pewnego elementu z $\pi_1(|Rips_t(X)|)$.

Ponieważ X jest zgrubnie jednospójna, niech $k \geq 1$ będzie takie, że homomorfizm $i_* : \pi_1(|Rips_1(X)|) \rightarrow \pi_1(|Rips_k(X)|)$ jest trywialny. Z powyższego rozumowania natychmiast wynika, iż $\pi_1(|Rips_n(X)|) = 0$ dla $n \geq k$, q.e.d.

(3) \Rightarrow (1): Dowód jest natychmiastowy z definicji zgrubnej jednospójności.

(3) \Rightarrow (4): Załóżmy, że $\pi_1(|Rips_t(X)|) = 0$ i niech α będzie pętlą w X . Ponieważ każdą pętlę jesteśmy w stanie aproksymować pętlą kawałkami geodezyjną, możemy założyć, że α jest złożeniem ścieżek geodezyjnych o długości co najwyżej t : $\alpha_1 * \dots * \alpha_n$, gdzie α_i łączy punkty $[v_{i-1}, v_i]$, $v_0 = v_n$. Pętlę tę daje się więc zrealizować w kompleksie $|Rips_t(X)|$ jako ścieżkę złożoną z krawędzi $[v_{i-1}, v_i]$, $i = 1, \dots, n$. Wiemy jednak, że $\pi_1(|Rips_t(X)|) = 0$, zatem pętla ta jest homotopijna z przekształceniem stałym. Homotopię tę możemy przedstawić jako przekształcenie $D^2 \rightarrow |Rips_t(X)|$, daje się więc ją zrealizować korzystając jedynie z 2-wymiarowego szkieletu $|Rips_t(X)|$. Popatrzmy teraz na każdy 2-wymiarowy sympleks, przez który przechodzi nasza homotopia, z osobna. Na każdą krawędź w sympleksie między wierzchołkami v, w możemy patrzeć jak na ścieżkę geodezyjną w X z v do w . Oznacza to, iż brzeg takiego sympleksu daje się zrealizować w X jako pętla o średnicy nie większej niż $2t$. Rzeczywiście, jeżeli dwa punkty leżą na geodezyjnej odpowiadającej jednej krawędzi, są w odległości nie większej niż t , zaś biorąc sympleks $[u, v, w]$ i dwa dowolne punkty z różnych krawędzi, b.s.o. $x \in [u, v]$, $y \in [v, w]$, mamy:

$$d(x, y) \leq d(x, v) + d(v, y) \leq 2t$$

Aplikując następnie naszą homotopię sympleks po sympleksie możemy łatwo stwierdzić, iż nasza wyjściowa pętla α daje się przedłużyć do przekształcenia z podziurawionego dysku tak, że każdy otwór w obrazie tej funkcji ma średnicę nie większą, niż $2t$. Grupa $\pi_1(X)$ jest więc jednostajnie generowana, q.e.d.

(4) \Rightarrow (3): Załóżmy, że każda pętla w X przedłuża się na dysk o otworach o średnicy nie większej niż t . Rozważmy $s \geq t$ oraz pętlę α w $|Rips_s(X)|$. Ponieważ możemy założyć, iż pętla ta zawiera się w 1-szkielecie $|Rips_s(X)|$, pętlę tę możemy przedstawić jako pętlę w X , gdzie zamiast krawędzi między wierzchołkami bierzemy ścieżki geodezyjne między punktami. Pętlę tę możemy oczywiście przedłużyć do przekształcenia α' z dysku D^2 z pewną ilością dziur na dysk w X o otworach o średnicy co najwyżej t . Następnie dobierzmy taką triangulację wyżej wspomnianego dysku D^2 z dziurami, żeby każdy sympleks

Δ tej triangulacji (oznaczymy ją przez \mathcal{D}) miał obraz o średnicy co najwyżej t . Powyższe przekształcenie indukuje więc funkcję symplecjalaną $|\alpha'| : |\mathcal{D}| \rightarrow |Rips_s(X)|$. Rozważmy teraz dowolny otwór w obrazie α' , niech $[v_0, v_1], \dots, [v_{n-1}, v_n]$ będą krawędziami takimi, że $|\alpha'|([v_0, v_1]), \dots, |\alpha'|([v_{n-1}, v_n])$ stanowi ograniczenie owego otworu. Zauważmy jednak że ponieważ otwór ten ma średnicę nie większą niż t , sympleks $[v_0, \dots, v_n] \in Rips_s(X)$, możemy więc przekształcenie $|\alpha'|$ przedłużyć do funkcji z $|\mathcal{D}|$ z doklejonym stożkiem nad odpowiednim otworem. Postępując tak dla wszystkich otworów jednocześnie widzimy, że $|\alpha'|$ możemy przedłużyć do funkcji $\alpha'' : D^2 \rightarrow |Rips_s(X)|$ takiej, że $\alpha''|_{\partial D^2} = \alpha$. Stąd oczywisty wniosek, iż α jest pętlą homotopijną z pętlą stałą, zatem $\pi_1(|Rips_s(X)|) = 0$, q.e.d. \square

Powyższy wynik pozwala wyprowadzić pewien prosty wniosek, ułatwiający jednak patrzeć na to, czym jest przestrzeń zgrubnie jednospójna:

Wniosek 3.4.3. *Niech X będzie zgrubnie geodezyjną przestrzenią metryczną. Wówczas X jest zgrubnie równoważna pewnej geodezyjnej przestrzeni jednospójnej $\Leftrightarrow X$ jest zgrubnie jednospójna.*

Dowód. (\Rightarrow): Grupa podstawowa przestrzeni jednospójnej jest w oczywisty sposób jednostajnie generowana, ponieważ zaś zgrubna jednospójność jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności, dzięki powyższemu twierdzeniu otrzymujemy tezę.

(\Leftarrow): Ponieważ X jest zgrubnie geodezyjna, jest zgrubnie równoważna swojemu kompleksowi Ripsa $|Rips_t(X)|$ dla odpowiednio dużego $t < \infty$. Ponieważ jest również zgrubnie jednospójna, z poprzedniego twierdzenia wynika, iż t możemy dobrać tak, by $\pi_1(|Rips_t(X)|) = 0$. \square

Powyższe rozważania pozwalają wyprowadzić jeszcze jeden, niezwykle ciekawy wniosek: otóż każda przestrzeń zgrubnie geodezyjna i jednospójna o wymiarze asymptotycznym co najwyżej 1 jest ze zgrubnego punktu widzenia drzewem, a co więcej: jest to dokładna charakterystyka drzewa ze zgrubnego punktu widzenia!

Twierdzenie 3.4.4. *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wówczas X jest zgrubnie równoważne pewnemu drzewu wtedy i tylko wtedy, gdy jest zgrubnie geodezyjna i jednospójna oraz $Asdim(X) \leq 1$.*

Dowód. (\Rightarrow): drzewo T , jako pewien graf, jest oczywiście zgrubnie równoważne swej geometrycznej realizacji $|T|$, jest więc zgrubnie geodezyjne. Oczywiście $\pi_1(|T|) = 0$, fakt, że $Asdim(T) \leq 1$ jest pokazany np. w [Bedl].

(\Leftarrow): Niech $t < \infty$ będzie takie, że $\pi_1(|Rips_t(X)|) = 0$ oraz funkcje $id : X \rightarrow |Rips_n(X)|$ są zgrubnymi równoważnościami dla $n \geq t$. Ponieważ $Asdim(X) \leq 1$, istnieje $s \geq t$, kompleks symplecjalny K wymiaru ≤ 1 oraz funkcje symplecjalne $Rips_t(X) \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} Rips_s(X)$ takie, że $g \circ f$ jest sąsiednie z $i_{t,s} : Rips_t(X) \rightarrow Rips_s(X)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $K = f(Rips_t(X))$. Ponadto, ponieważ $\pi_1(|Rips_t(X)|) = 0$, możemy założyć, że K jest drzewem, zastępując ewentualnie K przez jego uniwersalne

nakrycie. Utożsamiając X z odpowiednimi kompleksami Ripsa, otrzymujemy bornologiczne funkcje $X \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} X$ takie, że $g \circ f \sim_{l_s} id_X$. Pozostaje nam wykazać, że $f \circ g \sim_{l_s} id_K$. Z bornologiczności f oraz tego, że $g \circ f \sim_{l_s} id_X$ istnieje jednak stała $M < \infty$ taka, że dla dowolnego $x \in X$: $d(f \circ g \circ f(x), f(x)) < M$. Jeżeli więc v jest dowolnym wierzchołkiem K , możemy wziąć x takie, żeby $f(x) = v$, skąd $d(f \circ g(v), v) < M$. Funkcje f i g wyznaczają zatem zgrubną równoważność X i K , q.e.d. \square

3.5. Zgrubna spójność w wyższych wymiarach

Zbadanie przypadku zgrubnej jednospójności z pewnością mogło dostarczyć pewnych intuicji, czym ogólnie jest zgrubna n -spójność dla $n \geq 1$. Intuicyjnie przestrzeń n -spójna jest przestrzenią, która - jeżeli będziemy się stale od niej oddalać - okaże się z tego punktu widzenia podobna do przestrzeni topologicznie n -spójnej. Formalna charakterystyka nie jest jednak taka prosta - próba powtórzenia wyników takich, jak dla zgrubnej jednospójności, kończy się fiaskiem. Główną przyczyną takiego stanu rzeczy jest to, iż geodezyjność przestrzeni jest własnością wystarczającą, by móc ze sobą utożsamiać pewne odcinki w przestrzeni (geodezyjne) oraz krawędzie w grafie Ripsa, nie wystarczy jednak do znalezienia podobnej odpowiedniości dla wyższowymiarowych sympleksów w kompleksie Ripsa. Poniższa sekcja ma na celu przedstawić kilka przykładów świadczących o tym, iż stwierdzenia podane w poprzedniej sekcji nie uogólniają się bezpośrednio na wymiary wyższe niż 1.

Pierwszy przykład pokazuje, iż dla przestrzeni geodezyjnej przestrzeń może być 2-spójna (lub ogólniej: n -spójna, $n \geq 2$), chociaż jej druga grupa homotopii nie jest jednostajnie generowana. Wszystkie poniższe przykłady podawane będą dla zgrubnej 2-spójności, dokładnie analogiczne można jednak podać dla dowolnego stopnia zgrubnej n -spójności, $n \geq 2$:

Przykład 3.5.1. Niech $X = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, 1) \times (2n, 2n + 1) \times (0, n)$. X jest zatem przestrzenią \mathbb{R}^3 z wyjętymi parami rozłącznymi wnętrzami prostopadłościanów o wymiarach $1 \times 1 \times n$, $n \in \mathbb{N}$, jako metrykę wprowadzamy metrykę dziedziczoną z \mathbb{R}^3 poprawioną do metryki geodezyjnej. Średnice brzegów wyjętych prostopadłościanów są dowolnie duże, grupa $\pi_2(X)$ nie może więc być jednostajnie generowana. Łatwo można się jednak przekonać, że uzyskana przestrzeń jest zgrubnie równoważna \mathbb{R}^3 . Jest ona ustalana na przykład przez oczywiste zanurzenie $f : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz funkcję $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow X$ taką, że $g(x, y, z) = ([x], y, z)$, gdzie $[x]$ jest wzięciem części całkowitej x . By zakończyć nasz przykład wystarczy zauważyć, że \mathbb{R}^3 jest oczywiście zgrubnie 2-spójna.

Powyższy przykład pokazuje w szczególności, że dla wyższych wymiarów nie zachodzi w jedną stronę stwierdzenie 3.4.2. Poniższy przykład pokazuje, że stwierdzenie to nie musi zachodzić również w drugą stronę:

Przykład 3.5.2. Niech $X = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 1) \times (0, 1) \times (0, +\infty) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (-n, n) \times (n^2, n^2 + 2n)$. X jest więc przestrzenią \mathbb{R}^3 , z której usuwamy wnętrza parami rozłącznych sześciąt o rozmiarach $2n \times 2n \times 2n$, $n \in \mathbb{N}$, usuwamy również wnętrza nieograniczonego prostopadłościanu, którego wnętrza przecina wnętrza wszystkich wspomnianych sześciąt.

Jako metrykę na X bierzemy standardową metrykę na \mathbb{R}^3 poprawioną do geodezyjnej. X jest ściągająca, zatem $\pi_2(X)$ jest w oczywisty sposób jednostajnie generowana. Łatwo zauważyć (podobnie jak w poprzednim przykładzie), że X jest zgrubnie równoważna przestrzeni $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (-n, n) \times (n^2, n^2 + 2n)$, która powstaje jak X z tym, że nie usuwamy wnętrza nieskończonego prostopadłościanu $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, +\infty)$. Metrykę również dobieramy podobnie; tak, by Y była geodezyjna. Pokażemy, że Y nie jest jednak 2-spójna.

Rzeczywiście, ponieważ w Y wnętrza usuniętych sześciąt są dowolnie duże, dla dowolnego $t < \infty$ grupa $\pi_2(|Rips_t(Y)|)$ ma nieskończenie wiele generatorów odpowiadających odwzorowaniom w brzegi odpowiednich sześciąt, które to odwzorowania, dzięki odpowiedniej triangulacji, łatwo można przenieść na $|Rips_t(Y)|$. Dla każdego generatora $\pi_2(|Rips_t(X)|)$ istnieje $s > t$ takie, że homomorfizm indukowany $i_* : \pi_2(|Rips_t(X)|) \rightarrow \pi_2(|Rips_s(X)|)$ przeprowadza ów generator na 0. Biorąc jednak pojedyncze $s > t$, nie wszystkie generatory $\pi_2(|Rips_t(X)|)$ przechodzą przy indukowanym homomorfizmie i_* na 0. Niektóre bowiem, ponieważ wnętrza usuniętych z Y sześciąt są dowolnie duże, zostają ponownie przeprowadzone na niezerowe generatory $\pi_2(|Rips_s(X)|)$. Dowodzi to tego, że Y , a w konsekwencji również X nie jest zgrubnie 2-spójna.

Na koniec pokażemy, że w ogólnym przypadku (a także w geodezyjnym) definicji n -spójności nie da się zastąpić przez definicję mówiącą, iż dla dostatecznie dużego t zachodzi: $\pi_n(|Rips_s(X)|) = 0$ dla $s \geq t$. Jak zobaczyliśmy w twierdzeniu 3.4.2, definicje te można stosować zamiennie dla przestrzeni geodezyjnych i $n = 1$. Poniższy przykład dowodzi jednak, że nie jest tak dla $n = 2$, przez prostą modyfikację można się również przekonać, iż nie jest tak też dla dowolnego $n \geq 2$ oraz dla $n = 1$, gdy pominiemy założenie o geodezyjności przestrzeni:

Przykład 3.5.3. Niech $X = \mathbb{R}^3 \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (-n, n) \times (n^2, n^2 + 2n)) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}) \times (-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}) \times (n^2 - 2, n^2 + 1))$. Przestrzeń X jest więc przestrzenią \mathbb{R}^3 z usuniętymi wnętrzami sześciąt o rozmiarach $2n \times 2n \times 2n, n \in \mathbb{N}$. Usuwamy ponadto wnętrza tuneli o długości krawędzi przekroju $\frac{n}{2}$ łączące dwa sześciaty o bokach $2n - 2$ i $2n$. Metrykę na X poprawiamy z metryki odziedziczonej z \mathbb{R}^3 do metryki geodezyjnej.

Pokażemy na początek, że dla dowolnego $t < \infty$ istnieje $s > t$ takie, że grupa $\pi_2(|Rips_s(X)|)$ jest niezerowa. Weźmy mianowicie $s > t$ takie, żeby $s = n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas, ponieważ średnice brzegów przekrojów tuneli łączących wnętrza usuniętych sześciąt o długościach boków mniejszych od $2n$ są w naszej metryce nie większe niż n , przekształcenie ze sfery S^2 w brzeg usuniętego sześciatu o bokach $2n - 2$ daje się zrealizować w kompleksie $Rips_s(X)$. Dla odpowiednio dużych n (takich, by $n < 2n - 2$) jest to jednak przekształcenie niehomotopijne ze stałym. Stąd wniosek, iż $\pi_2(|Rips_s(X)|)$ jest nietrywialna.

Żeby zakończyć przykład pokażemy, że X jest 2-spójna. Ponieważ średnice brzegów przekrojów tuneli łączących kolejne sześciaty są coraz większe, dla dowolnego $t < \infty$ grupa $\pi_2(|Rips_t(X)|)$ jest generowana przez przekształcenia w brzegi usuniętych sześciąt o brzegach nie większych od pewnej stałej zależnej od t , których jest skończenie wiele (niektóre mogą być zerowe). Łatwo też zauważyć, że jeżeli weźmiemy generator odpowiadający odwzorowaniu w brzeg sześciatu o boku $2n$, przechodzi on przy homomorfizmie

$i_* : \pi_2(|Rips_t(X)|) \rightarrow \pi_2(|Rips_{6n}(X)|)$ na 0. Stąd wniosek, że biorąc odpowiednio duże $s > t$ homomorfizm indukowany $i_* : \pi_2(|Rips_t(X)|) \rightarrow \pi_2(|Rips_s(X)|)$ jest zerowy. X jest zatem 2-spójna, co chcieliśmy wykazać.

Bibliografia

- [Comb] M. Cencelj, J. Dydak, A. Vavpetič, Ž. Virk, *A Combinatorial Approach to Coarse Geometry*, arXiv:math.MG/0906.1372v1 (2009)
- [Bedl] G. Bell, A. Dranishnikov, *Asymptotic Dimension in Będlewo*, arXiv:math.GR/0507570v2 (2005)
- [Roe] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, University Lecture Series, American Mathematical Society (2003)
- [Hat] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)
- [Eng] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i Topologia. Część II: Topologia*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (1980)