

Typowe zadania egzaminacyjne z równań różniczkowych

1. Dana jest rodzina parabol $y = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć rodzinę krzywych ortogonalnych. Wykonać odpowiedni rysunek.
2. Dana jest rodzina krzywych logarytmicznych $y = \ln|x| + C$, $x \neq 0$ gdzie $C \in \mathbb{R}$ uzupełniona prostą $x = 0$. Wyznaczyć rodzinę krzywych ortogonalnych. Wykonać odpowiedni rysunek.
3. Dana jest rodzina krzywych wykładniczych $y = Ce^x$ gdzie $C \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć rodzinę krzywych ortogonalnych. Wykonać odpowiedni rysunek.
4. Dana jest rodzina krzywych $xy = C$ gdzie $C \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć rodzinę krzywych ortogonalnych. Wykonać odpowiedni rysunek.
5. Dana jest rodzina krzywych $x^2 - y^2 = C$ gdzie $C \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć rodzinę krzywych ortogonalnych. Wykonać odpowiedni rysunek.
6. Znaleźć krzywe, dla których odcinek OA odcinany przez styczną na osi OY jest równy kwadratowi rzędnej punktu styczności.
7. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$xy' - y = y^2$$

oraz policzyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x).$$

8. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' - y = xy^2$$

oraz policzyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot y(x).$$

9. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x \frac{dy}{dx} = 2x - y.$$

Wydzielić i narysować krzywą całkową przechodzącą przez punkt $(1, 0)$.

10. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' + 2xy = x,$$

a następnie wydzielić krzywą całkową przechodzącą przez punkt $A = (0, 1)$.

11. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dx} = xy + xe^{x^2}.$$

12. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' + 2y = y^2 e^x,$$

oraz rozwiązanie szczególne spełniające warunek $y(0) = 1$.

13. Znaleźć rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t-2}{x+1}, \\ x(0) = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

oraz określić maksymalny przedział istnienia rozwiązania (dziedzinę $x(t)$).

14. Znaleźć rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t-3}{x+2}, \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

oraz określić maksymalny przedział istnienia rozwiązania (dziedzinę $x(t)$).

15. Wyznaczyć krzywą $y = y(x)$ spełniającą równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + 2y^2}{x^2 + 2xy}$$

i przechodzącą przez punkt $A = (1, 2)$. **Wsk.** Sprowadzić do równania jednorodnego.

16. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' + 2xy = 4xy^2$$

oraz wykazać, że każde rozwiązanie tego równania jest ograniczone.

17. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' + xy = 2xy^3$$

oraz wykazać, że każde rozwiązanie tego równania jest ograniczone.

18. Znaleźć rozwiązanie $y = y(x)$ równania

$$2xy + (x^2 + 2y) \cdot y' = 0$$

spełniające warunek $y(0) = 2$. **Wsk.** Sprowadzić do równania zupełnego.

19. Znaleźć rozwiązanie ogólne niejednorodnego równania Eulera

$$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2.$$

20. Wyznaczyć drugie przybliżenie Picarda rozwiązania problemu

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + tx + t^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

21. Korzystając z metody kolejnych przybliżeń wyznaczyć drugie przybliżenie rozwiązania problemu

$$\begin{cases} \dot{x} &= t + x^2, \\ x(0) &= 1. \end{cases}$$

22. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{-t} + \cos 3t.$$

23. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 2e^t + \sin 2t.$$

24. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y''' - 2y'' = x + 2e^{2x}.$$

25. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = \sin x + e^{2x}.$$

26. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y''' - 2y'' = x + 2xe^{2x}.$$

27. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y'' + y' + e^{-2x}y = 0$$

znając rozwiązanie szczególne $y_1 = \sin(e^{-x})$.

28. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + \sin t + \cos t, \\ \dot{y} = x + y - \cos t, \\ x(0) = -2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

29. Znaleźć rozwiązanie ogólne niejednorodnego układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x - 2y + e^{2t}, \\ \dot{y} &= 5x - 3y + t \end{cases}$$

oraz wyznaczyć rzeczywiste przestrzenie własne układu jednorodnego odpowiadającemu powyższemu układowi.

30. Rozwiązać problem początkowy dla równania Newtona

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 8x^3 + 24x^2 + 24x + 8, \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= \sqrt{2}. \end{cases}$$

Wsk. $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

31. Dany jest układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 3y + \sin t, \\ \dot{y} &= 4x - 3y + e^{-t}. \end{aligned}$$

- Podać rozwiązanie ogólne.
- Wyznaczyć przestrzenie własne układu jednorodnego.

32. Dany jest układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + 2y, \\ \dot{y} &= x + 5y. \end{aligned}$$

- Znaleźć rozwiązanie ogólne.
- Wyznaczyć przestrzenie własne.
- Określić typ położenia równowagi.

33. Znaleźć położenia równowagi układu równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + 4y^2 - 4, \\ \dot{y} &= x - y^2 + 1. \end{aligned}$$

Określić ich typ i zbadać stabilność.

34. Znaleźć położenia równowagi układu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 4y^2 + 4, \\ \dot{y} &= x + |y| - 1. \end{aligned}$$

Określić ich typ i zbadać stabilność.

35. Znaleźć położenia równowagi układu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 3y^2 - 1, \\ \dot{y} &= x - 2. \end{aligned}$$

Określić ich typ i zbadać stabilność.

36. Znaleźć położenia równowagi układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 2, \\ \dot{y} &= x^2 - y^2. \end{cases}$$

Określić ich typ i zbadać stabilność.

37. Znaleźć położenia równowagi układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + 4y^2 - 16, \\ \dot{y} &= e^{x+2y-4} - 1. \end{cases}$$

Określić ich typ i zbadać stabilność.

38. Znaleźć położenia równowagi układu

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2, \\ \dot{y} &= x + 3y - 4. \end{cases}$$

Określić ich typ i zbadać stabilność.

39. Znaleźć funkcję $z = z(x, y)$ spełniającą równanie

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} - 2x^3 z \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy,$$

która na krzywej $\{y^2 + x^4 - 2x^2 = 0\}$ przyjmuje wartość 1. Określić dziedzinę funkcji $z(x, y)$.

40. Znaleźć funkcję $z = z(x, y)$ spełniającą równanie

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy,$$

która na parze prostych $\{y = \pm x\}$ przyjmuje wartość $z = 1$. Określić dziedzinę funkcji $z(x, y)$.

41. Znaleźć funkcję $z = z(x, y)$ spełniającą równanie

$$4y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = xz^2,$$

która na paraboli $\{y = x^2 + 1\}$ przyjmuje wartość $z = 1$. Określić dziedzinę funkcji $z(x, y)$.

42. Stosując metodę łamanych Eulera z krokiem $h = 0,2$ oszacować wartość $y(1)$ rozwiązania problemu

$$\begin{cases} y' &= y^2 + 2x - x^4, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

i porównać otrzymany wynik z rozwiązaniem dokładnym.

43. Stosując metodę łamanych Eulera z krokiem $h = 0,2$ oszacować wartość $y(1)$ rozwiązania problemu

$$\begin{cases} y' &= y^3 - 8x^3 + 2, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

i porównać otrzymany wynik z rozwiązaniem dokładnym.

44. Stosując metodę łamanych Eulera z krokiem $h = 0,2$ oszacować wartość $y(1)$ rozwiązania problemu

$$\begin{cases} y' &= 4xy^2 - 2y, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

i porównać otrzymany wynik z rozwiązaniem dokładnym.

45. Stosując metodę łamanych Eulera z krokiem $h = 0,2$ oszacować wartość $y(1)$ rozwiązania problemu

$$\begin{cases} y' &= -2xy^2, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

i porównać otrzymany wynik z rozwiązaniem dokładnym.

47. Znaleźć rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} y' &= e^y - e^{x^2} + 2x, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

w postaci szeregu potęgowego $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

46. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x - 5y + 2z, \\ \dot{y} &= 5x - 7y + 3z, \\ \dot{z} &= 6x - 9y + 4z. \end{cases}$$

48. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - 3y + 4z, \\ \dot{y} &= 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} &= 6x - 7y + 7z. \end{cases}$$