

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 1

1. Obliczyć całki

$$(A) \int_{-1}^2 x^2 dx \text{ (z definicji);} \quad (B) \int_0^2 x e^x dx; \quad (C) \int_0^e 2x e^{-x^2} dx.$$

2. Obliczyć pole obszaru

$$(A) \{(x, y) : 0 < x < 3, 0 < y < x^2 + 1\}; \quad (B) \{(x, y) : 6x - x^2 < y < x^2 - 6x + 10\}.$$

3. Znaleźć długość krzywej  $l = \{y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$ .

4. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu dookoła osi  $OX$  krzywej

$$(A) \{y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}; \quad (B) \{y^2 = 2px, 0 \leq x \leq 1\}; \quad (C) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

5. Obliczyć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu dookoła osi  $OX$  krzywej  $\{y = x\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$ .

6. Obliczyć całki niewłaściwe

$$(A) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}; \quad (B) \int_0^1 \ln x dx; \quad (C) \int_0^\infty x e^{-x} dx; \quad (D) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Z badać zbieżność szeregu  $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^p n}$  w zależności od parametru  $p > 0$ .

8. Obliczyć sumy szeregów

$$(A) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \quad (B) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}; \quad (C) \sum_{n=1}^\infty n x^n; \quad (D) \sum_{n=1}^\infty n^2 x^n.$$

9. Znaleźć  $F'(\alpha)$  jeśli

$$(A) \quad F(\alpha) = \int_{a+1/\alpha}^{b+1/\alpha} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx;$$
$$(B) \quad F(\alpha) = \int_0^\alpha f(\alpha - x, x - \alpha) dx.$$

10. Korzystając ze wzoru  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  pokazać, że dla  $n, m \in \mathbb{Z}$  zachodzi

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \neq m, \\ 2\pi & \text{gdy } n = m. \end{cases}$$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 2

1. Zbadać istnienie granicy w zerze i granic iterowanych następujących funkcji

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = |x|^y, \quad h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad k(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

2. Zbadać istnienie granic iterowanych w zerze następujących funkcji

$$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, \quad g(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}, \quad h(x, y) = x \sin \frac{1}{y}.$$

3. Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m(2\pi n!x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. Określić dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \frac{1}{ax^2 + bxy + cy^2 - 1}, \quad g(x, y, z) = \frac{1}{xy - z}, \quad h(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

5. Pokazać, że dla funkcji

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

nie istnieją granice iterowane w zerze, ale istnieje granica tej funkcji w zerze.

6. Znaleźć granicę funkcji

$$f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$$

wzdłuż promienia  $l(t) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Czy istnieje  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y)$ ?

7. Zbadać jednostajną ciągłość na  $\mathbb{R}^2$  funkcji

$$f(x, y) = ax + by, \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad h(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha, \alpha > 0.$$

8. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

w kole  $\{x^2 + y^2 < 1\}$ .

9. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$$

w jej dziedzinie.

10. Wykazać, że zbiór punktów nieciągłości funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nie jest zbiorem domkniętym.

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 3

1. Dla  $0 < x < 1$  policzyć całkę

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} d\alpha$$

2. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\ln x} & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

jest ciągła w zerze lecz nie jest hölderowsko ciągła.

3. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na  $\mathbb{R}^2$  i ma pochodne cząstkowe  $f'_x$  i  $f'_y$ , które nie są ciągłe w zerze.

4. Policzyć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, \quad h(x, y, z) = xy - z\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}.$$

5. Niech  $f(t)$  będzie funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Połóżmy  $z(x, y) = yf(x^2 - y^2)$ . Wykazać, że wówczas zachodzi

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

6. Niech  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  będzie macierzą kwadratową, a  $\text{Det}A$  jej wyznacznikiem. Policzyć

$$\frac{\partial \text{Det}A}{\partial a_{ij}}.$$

7. Policzyć pochodną kierunkową funkcji

$$f(x, y, z) = e^{z/x} \sin y$$

w punkcie  $\hat{x} = (3, 0, -1)$  w kierunku wektora  $v = [2, -5, 7]$ .

8. Wykazać, że pochodna kierunkowa funkcji

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

w dowolnym punkcie  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  w kierunku wektora  $v = [1, 1, \dots, 1]$  jest równa zeru.

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 4

1. Zbadać różniczkowalność w zerze funkcji

$$(A) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(B) \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(C) \quad h(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4};$$

$$(D) \quad h(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^6}.$$

2. Znaleźć różniczki funkcji

$$(A) \quad f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}; \quad (B) \quad g(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

dwoma metodami: a) licząc pochodne cząstkowe; b) korzystając z niezmienniczości różniczeki.

3 Wykazać, że funkcja  $f$  klasy  $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  spełniająca tożsamość Eulera

$$x \cdot \text{grad} f(x) = \lambda f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

jest jednorodna stopnia  $\lambda$ . **Wsk.** Rozważyć funkcję  $F(t) = t^{-\lambda} f(tx)$  i policzyć  $F'(1)$ .

4. Zbadać, w jakich punktach różniczkowalna jest funkcja  $f$  oraz znaleźć  $df$  i  $\text{grad} f$ :

$$(A) \quad f(x) = |x|^\alpha \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0;$$

$$(B) \quad f(x, y) = \sqrt{|xy|} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$(C) \quad f(x, y) = |x - y| \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$(D) \quad f(x, y) = \frac{xy}{1 + |x| + |y|} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$(E) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^6}{x^2+y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5. Zbadać, czy funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$

$$(A) \quad f(x, y) = x \sin \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (B) \quad f(x, y) = x \cos \sqrt{x^2 + y^2}.$$

6. Znaleźć różniczki funkcji

$$(A) \quad f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y); \quad (B) \quad g(x, y) = (e^{2x}y, xe^{-y}, \sin(xy));$$

$$(C) \quad h(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, xyz); \quad (D) \quad k(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x}).$$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 5

1. Niech  $u(x, y) = x^2 + xy + y^2$  gdzie  $x(t) = \sin t$ ,  $y(t) = e^t$ . Policzyc  $\frac{du}{dt}(x(t), y(t))$ .

2. Policzyc  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$  jeśli

$$(A) \quad z(x, y) = (x^2 + y^2)e^{(x^2+y^2)/xy}; \quad (B) \quad z(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}.$$

3. Niech  $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  będzie funkcją klasy  $C^1$  oraz  $z(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ . Wykazać, że

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. W jakiej postaci można przewidzieć rozwiązania równania

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

5. Wykazać, że jeśli funkcje  $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  są różniczkowalne, to  $\text{grad}(fg) = f \text{grad}(g) + g \text{grad}(f)$ .

6. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy^2$  w punkcie  $(1, 2)$ .

7. Obliczyć przybliżone wartości wyrażeń oraz błąd względny

$$(A) \quad (2,01)^2 + 3 \times (2,98)^2; \quad (B) \quad \sqrt{(3,01)^2 + (3,98)^2}; \quad (C) \quad 0,98 \times (4,01)^{2,02}.$$

8. Wyrazić we współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$ , gdzie  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  wyrażenie

$$w = y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}.$$

9. Niech  $\Phi_2 : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^2$ ,

$$\Phi_2(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Wyznaczyć macierz różniczki oraz jacobian odwzorowania  $\Phi_2$ .

10. Niech  $\Phi_3 : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi_3(r, \varphi, \psi) = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi).$$

Wyznaczyć macierz różniczki oraz jacobian odwzorowania  $\Phi_3$ .

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 6

1. Policzyc macierz pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (hesjan) funkcji

(A)  $f(x, y) = e^x \cos y$ ;

(B)  $g(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ ;

(C)  $h(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ ;

(D)  $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

(E)  $l(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

2. Zbadać istnienie pochodnej mieszanej  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 0)$  funkcji

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Znaleźć drugie różniczki  $d^2u$  funkcji

(A)  $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

(B)  $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy}$ ;

(C)  $u(x, y) = e^{xy}$ ;

(D)  $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

(E)  $u(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

4. Wykazać, że jeśli  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna, to  $g(t) = f(\cos t, \sin t)$  dla  $t \in \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna i znaleźć jej drugą pochodną.

5. Wykazać, że jeśli  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna, to funkcja  $g(x, y) = f(ax + by, cx + dy)$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  jest dwukrotnie różniczkowalna i znaleźć jej drugie pochodne cząstkowe.

6. Znaleźć funkcje  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  dwukrotnie różniczkowalna, dla których pochodna mieszana  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$  dla każdego  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

7. Znaleźć funkcje  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  dwukrotnie różniczkowalna, dla których  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$  dla każdego  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 7

1. Znaleźć rozwinięcie Taylora funkcji  $f$  w punkcie  $A$ , gdzie

(A)  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad A = (1, 2);$

(B)  $f(x, y) = e^{ax} \sin by, \quad A = (0, 0);$

(C)  $f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3, \quad A = (-2, 3).$

2. Wykazać, że jeśli brzeg zbioru zwartego  $F \subset \mathbb{R}^2$  jest sumą skończonej ilości odcinków, to funkcja  $f(x, y) = ax + by + c$  określona na  $F$  przyjmuje kresy w końcach tych odcinków. Uogólnić to stwierdzenie dla funkcji trzech zmiennych.

3. Znaleźć kresy funkcji  $f$  na zbiorze  $F$ , gdzie

(A)  $f(x, y) = 2x + 3y, \quad F = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 5x + 2y \leq 10\};$

(B)  $f(x, y) = xe^{-xy}, \quad F = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\};$

(C)  $f(x, y, z) = 2x + 3y - z, \quad F = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\};$

(D)  $f(x, y) = (x + y)e^{-x-2y}, \quad F = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\};$

(E)  $f(x, y, z) = xyz, \quad F = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\};$

(F)  $f(x, y) = \sin x + \sin y, \quad F = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}.$

4. Znaleźć lokalne ekstrema oraz punkty siodłowe funkcji  $f$

(A)  $f(x, y) = (ax + by)e^{cx+dy};$

(B)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy;$

(C)  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey;$

(D)  $f(x, y) = x^2 + x \ln y; \quad y > 0$

(E)  $f(x, y) = x^2 + e^{-y^2};$

(F)  $f(x, y) = xy + e^{a(x^2+y^2)}.$

5. Dane są punkty  $P_i = (x_i, y_i)$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Znaleźć prostą  $y = ax + b$ , dla której wyrażenie  $E(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$  osiąga minimum.

6. Znaleźć punkt  $(a, b)$ , w którym funkcji  $E(a, b)$  osiąga absolutne minimum

(A)  $E(a, b) = (a + b - 2)^2 + (2a + b - 2)^2 + (3a + b - 4)^2;$

(B)  $E(a, b) = (b + 1)^2 + (2a + b)^2 + (a + b - 1)^2 + (a + b + 2)^2.$

7. Wśród trójkątów o danym obwodzie  $p$  znaleźć trójkąt o największym polu.

8. Znaleźć wymiary prostopadłościennej skrzyni bez pokrywy o objętości  $V$ , której powierzchnia ścian i dna jest najmniejsza.

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 8

1. Niech  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie odwzorowaniem

$$T(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2} \sin x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2, \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3} \cos x_2 + \frac{5}{3}\right).$$

Wykazać, że  $T$  jest kontrakcją w metryce  $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ . Co wynika z tezy twierdzenia Banacha? **Wsk.** Zachodzi nierówność  $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$ .

2. Niech  $f : (-2\pi, 1) \mapsto \mathbb{R}^2$  będzie określone wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t) & \text{dla } -2\pi < t < 0, \\ (1, t) & \text{dla } 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Narysować przeciwdziedzinę  $f$ . Wykazać że  $f$  jest klasy  $C^1$ , jest nieosobliwe i różnowartościowe, lecz  $f^{-1}$  nie jest ciągłe.

3. Niech  $f(x, y) = (e^{x+y} + e^{x-y}, e^{x+y} - e^{x-y})$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Znaleźć obraz  $f(\mathbb{R}^2)$  oraz zbadać czy  $f$  jest dyfeomorfizmem.

4. Znaleźć przeciwbraz koła  $\{(x, y) : x^2 + y^2 - x < 0\}$  przy dyfeomorfizmie biegunowym.

5. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego  $P \subset \mathbb{R}^2$  na dany obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , gdzie

- (A)  $\Omega = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4, 0 < x < y < 2x\}$ ;
- (B)  $\Omega = \{(x, y) : y^2 < x < 2y^2, 2x^2 < y < 3x^2\}$ ;
- (C)  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x, 0 < y < x^2\}$ ;
- (D)  $\Omega = \{(x, y) : b^2x^2 + a^2y^2 < a^2b^2\} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ;
- (E)  $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, f(x) < y < g(x)\}, f, g \in C^1((a, b); \mathbb{R})$ .

6. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego  $P \subset \mathbb{R}^3$  na obszar

$$\Omega = \{(x, y, z) : a < x < b, 0 < y < f(x), 0 < z < g(x, y)\},$$

gdzie  $f \in C^1((a, b); \mathbb{R}_+)$ ,  $g$  jest funkcją rzeczywistą dodatnią klasy  $C^1$  określoną na zbiorze  $\{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$ .

7. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego  $P \subset \mathbb{R}^n$  na  $\subset \mathbb{R}^n$ .

8. Wykazać, że odwzorowanie

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

jest dyfeomorfizmem  $\mathbb{R}^n$  na kulę  $\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ .

9. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego.

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 9

1. Niech  $F(x, y) = x^3y^2 + 3x^2y^3 - xy + 2x - y^2 + 1$ . Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste  $g, h$  klasy  $C^1$  określone w otoczeniu  $I$  zera takie, że  $F(x, g(x)) = 0 = F(x, h(x))$  oraz  $g(x) < h(x)$  dla  $x \in I$ . Znaleźć  $g'(0), h'(0)$ .
2. Niech  $F$  będzie funkcją z zadania 1. Wykazać, że istnieje funkcja rzeczywista  $g$  klasy  $C^1$  określona w otoczeniu  $I$  zera taka, że  $F(g(y), y) = 0$  dla  $y \in I$ . Znaleźć  $g'(0)$ .
3. Kiedy można rozwikłać względem  $y$  równanie  $x^3 - xy^3 = 1$ ? Policzyc  $y'(x), y''(x)$ .
4. Naszkicować zbiór  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = x^2 + y^2\}$ .
5. Równanie  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$  w otoczeniu punktu  $(1, -2, 1)$  wyznacza  $z$  jako funkcję zmiennych  $(x, y)$  klasy  $C^2$ . Policzyc jej pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2 w punkcie  $(1, -2)$
6. Kiedy można rozwikłać względem  $y$  i  $z$  układ równań

$$\begin{cases} x + y + z & = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć  $\frac{dy}{dx}$  i  $\frac{dz}{dx}$ .

7. Kiedy można rozwikłać względem  $u$  i  $v$  układ równań

$$\begin{cases} xu - yv & = 0, \\ yu + xv & = 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}$  i  $\frac{dv}{dy}$ .

8. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji  $f$  przy warunku  $g = 0$ , gdzie

- (A)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad 0 < a < b < c;$   
(B)  $f(x, y, z) = xyz, \quad g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z;$   
(C)  $f(x, y) = 2x^2 + y^2, \quad g(x, y) = x^4 - x^2 + y^2 - 5;$   
(D)  $f(x) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p, \quad g(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n = a, \quad p = 2, 3, \dots, a > 0.$

9. Znaleźć supremum i infimum funkcji  $f$  w zbiorze  $G$ , gdzie

- (A)  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\};$   
(B)  $f(x, y, z) = x + y + z, \quad G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\};$   
(C)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + 1, \quad G = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 1\};$   
(D)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad G = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\};$   
(E)  $f(x, y) = x^2(y + 1) - 2y, \quad G = \{(x, y) : \sqrt{1 + x^2} \leq y \leq 2\};$   
(F)  $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad G = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 10

1. Zbadać czy odwzorowanie  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  jest dyfeomorfizmem i czy jego przeciwdziedzina jest łukiem otwartym

(A)  $f(t) = (t^3, t^6)$ ;

(B)  $f(t) = (t, \sqrt[3]{t})$ ;

(C)  $f(t) = (t^2, t^4)$ .

2. Niech  $f(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \varphi)$  dla  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Wykazać, że  $f$  jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina (tzw. *linia śrubowa*). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną w punkcie  $(1, 0, 0)$ .

3. Niech  $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \varphi)$  dla  $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$ . Wykazać, że  $f$  jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina (tzw. *powierzchnia śrubowa*). Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną w punkcie  $(1, 0, 0)$ .

4. Wykazać, że zbiór  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^2 = 1\} \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$  (sfera bez punktu) jest płatem  $n$ -wymiarowym.

5. Niech  $\gamma$  będzie łukiem otwartym zawartym w półpłaszczyźnie  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y = 0\}$ . Wykazać, że zbiór  $S$  powstały przez obrót  $\gamma$  wokół osi  $Oz$  jest płatem 2-wymiarowym.

6. Zbadać czy zbiór  $S \subset \mathbb{R}^2$  jest rozmaitością (narysować ten zbiór)

(A)  $S = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = y^2\}$ ;

(B)  $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

(C)  $S = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\}$  (tzw. *lemniscata*).

7. Wykazać, że  $S \subset \mathbb{R}^3$  i  $H \subset \mathbb{R}^4$  są 2-wymiarowymi rozmaitościami.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exp(2x + y + z) + \exp(3x - y) + \ln(1 + x + y) = 2\},$$

$$H = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : e^{x+y+u} + e^{x+y+v} + u = 2, e^{x+u} + e^{x+y-u} + u - v = 2\}.$$

Napisać równania płaszczyzn stycznych do  $S$  i do  $H$  w początku układu  $O$ .

8. Wykazać, że torus  $\mathbb{T}$  jest 2-wymiarową rozmaitością.

$$\mathbb{T} = \{f(\varphi, \psi) : (\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3, \quad \text{gdzie}$$

$$f(x, y) = ((R_1 + R_2 \cos \varphi) \cos \psi, (R_1 + R_2 \cos \varphi) \sin \psi, R_2 \sin \psi), \quad 0 < R_2 < R_1.$$

9. Wykazać, że otwarta wstęga Möbiusa  $M$  jest 2-wymiarową rozmaitością.

$$M = \{f(t, \varphi) : |t| < R_0, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{R}^3, \quad \text{gdzie}$$

$$f(t, \varphi) = ((R + t \cos \varphi/2) \cos \varphi, (R + t \cos \varphi/2) \sin \varphi, t \sin \varphi/2), \quad 0 < R_0 < R.$$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 11

1. Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą na  $P = [a, b] \times [a, b]$ . Pokazać, że

$$\int_a^b \left( \int_a^x f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_y^b f(x, y) dx \right) dy.$$

2. Zbadać całkowalność funkcji  $f$  na  $[-1, 1]^2$  oraz istnienie całek iterowanych

$$(A) \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}; \quad (B) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

3. Obliczyć całki  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , gdzie

$$(A) \quad f(x, y) = (x + y)^{-2}, \quad D = [3, 4] \times [1, 2];$$
$$(B) \quad f(x, y) = xy, \quad D = \{b^2 x^2 + a^2 y^2 \leq a^2 b^2, x \geq 0, y \geq 0\};$$
$$(C) \quad f(x, y) = xy^{-1}, \quad D = \{2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq x^2\};$$
$$(D) \quad f(x, y) = x^2 y^{-2}, \quad D = \{0 \leq y \leq x \leq 2, 1 \leq xy\};$$
$$(E) \quad f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq x\}.$$

4. Niech  $p, q > 0$ . Bez liczenia całek pokazać, że

$$\int_0^1 \sqrt[p]{x^q} + \int_0^1 \sqrt[q]{x^p} = 1, \quad \int_0^1 \sqrt[p]{1 - x^q} = \int_0^1 \sqrt[q]{1 - x^p}.$$

5. Zmienić kolejność całkowania w całkach iterowanych

$$(A) \quad \int_0^4 \left( \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy \right) dx; \quad (B) \quad \int_0^4 \left( \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy \right) dx;$$
$$(C) \quad \int_1^e \left( \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right) dx; \quad (D) \quad \int_1^3 \left( \int_{9/x}^{10-x} f(x, y) dy \right) dx;$$
$$(E) \quad \int_0^1 \left( \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx \right) dy; \quad (F) \quad \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \left( \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx.$$

6. Dla jakich  $p, q \in \mathbb{R}$  istnieją całki niewłaściwe

$$(A) \quad \iint_D (x + y)^{-p} dx dy \quad D = \{x + y \geq 1, 0 < y \leq 1\};$$
$$(B) \quad \iint_D x^{-p} y^{-q} \quad D = \{xy \geq 1, x \geq 1\}.$$

7. Niech  $f : [0, \alpha] \mapsto \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą i rosnącą,  $f(0) = 0$ ,  $a \in [0, \alpha]$ ,  $b \in [0, f(\alpha)]$ . Wykazać nierówność Younga i stwierdzić kiedy w niej zachodzi równość

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy \geq ab.$$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 12

1. Obliczyć całki podwójne

$$(A) \iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy; \quad (B) \iint_{\{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$$
$$(C) \iint_{\{b^2x^2+a^2y^2 \leq a^2b^2, x \geq 0, y \geq 0\}} xy dx dy; \quad (D) \iint_{\{x^2+y^2 \leq x\}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy.$$

2. Obliczyć pole zbiorów ograniczonych krzywymi

- (A)  $xy = 4, x + y = 5$ ;  
(B)  $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2, p > 0, q > 0$ ;  
(C)  $xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x$ ;  
(D)  $xy = p, xy = q, y^2 = ax, y^2 = bx, 0 < p < q, 0 < a < b$ ;  
(E)  $x^2 + y^2 = R^2, x^2 + y^2 = 4Rx$ ;  
(F)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x = 0$ .

3. Obliczyć pole części powierzchni półsfery  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  leżącej na zewnątrz dwóch walców  $x^2 + y^2 - Rx = 0$  i  $x^2 + y^2 + Rx = 0$ .

4. Policzyc w zależności od parametrów  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \alpha > 0, 0 < a < b$  całkę

$$\iint_{\Omega} x^{-z_1-1} y^{-z_2-1} dx dy$$

(A)  $\Omega = (0, 1]^2$ ; (B)  $\Omega = \{0 < x \leq 1, 0 < y \leq x^\alpha\}$ ; (C)  $\Omega = \{0 < x \leq 1, ax \leq y \leq bx\}$ .

5. Wyznaczyć objętość zbioru  $V$

- (A)  $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^3 z\}$ ;  
(B)  $V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z \leq c\}$ ;  
(C)  $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx\}$ .

6. Obliczyć całki potrójne  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  w zależności od parametrów, gdzie

- (A)  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}$ ;  
(B)  $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}, f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{p/2}$ ;  
(C)  $\Omega = \{(x, y, z) : \alpha x \leq z \leq \beta x, ay^2 \leq z \leq by^2, 0 \leq z \leq h\}, f(x, y, z) = |x|^p$ ;  
(D)  $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq h\}, f(x, y, z) = |x|^p z$ .

7. Znaleźć środki ciężkości półokręgu  $l_+$ , półkola  $S_+$  i półkuli  $B_+$ ,

$$l_+ = \{(x, y) : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}; \quad S_+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\};$$
$$B_+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}.$$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 13

1. Zbadać orientację przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  (odpowiednio  $\mathbb{R}^3$ ) wyznaczoną przez układ wektorów  $(f_1, f_2)$  (odpowiednio  $(f_1, f_2, f_3)$ ), gdzie

(A)  $f_1 = [2, 1], f_2 = [-4, 3]$ ;      (B)  $f_1 = [-3, 1], f_2 = [3, -3]$ ;

(C)  $f_1 = [2, 1, 0], f_2 = [-2, 3, 1], f_3 = [4, 1, 1]$ ;

(D)  $f_1 = [2, 1, 0], f_2 = [-2, 3, 1], f_3 = [1, 8, 1]$ .

2. Policzyc iloczyn wektorowy  $u \times v$  wektorów  $u, v \in \mathbb{R}^3$ , gdzie

(A)  $u = [2, 1, 0], v = [-4, 3, 0]$ ;      (B)  $u = [-3, 1, 0], v = [3, -3, 0]$ ;

(C)  $u = [2, 1, 0], v = [-2, 3, 1]$ ;      (D)  $(u, v) \in T(\{z = x^2 + y^2\})$ ;

(E)  $(u, v) \in T(\{e^{x+2y+z} = 1\})$ ;      (F)  $(u, v) \in T(\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\})$ .

3. Policzyc całkę zorientowaną

(a)  $\int_{\gamma} xdy - ydx$ ,      (b)  $\int_{\gamma} xdy + ydx$ ,      (c)  $\int_{\gamma} xdx + ydy$ ,

gdzie  $\gamma$  jest krzywą łączącą punkty  $O = (0, 0)$  i  $K = (1, 2)$  będącą częścią

(A) prostej  $\{y = 2x\}$ ;      (B) paraboli  $\{y = 2x^2\}$ ;      (C) paraboli  $\{4x = y^2\}$ .

4. Policzyc całki zorientowane

(A)  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ ,       $\gamma = \{y = 1 - |1 - x|, 0 \leq x \leq 2\}$ ;

(B)  $\int_{\gamma} \frac{(x + y)dx + (y - x)dy}{x^2 + y^2}$ ,       $\gamma = \{x = r \cos t, y = r \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ;

(C)  $\int_{\gamma} (2r - y)dx + xdy$ ,       $\gamma = \{x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ;

(D)  $\int_{\gamma} (x^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$ ,       $\gamma = \{x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1\}$ ;

(E)  $\int_{\gamma} ydx + zdy + xdz$ ,       $\gamma = \{x = r \cos t, y = r \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ;

(F)  $\int_{\gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz$ ,       $\gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x^2 + y^2 = rx, z \geq 0\}$ .

5. Policzyc całki niezorientowane

(A)  $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2}ds$ ,       $\gamma = \{x^2 + y^2 = rx\}$ ;

(B)  $\int_{\gamma} y^2ds$ ,       $\gamma = \{x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ;

(C)  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2)ds$ ,       $\gamma = \{x = r \cos t, y = r \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ .

6. Znalezc długość krzywej  $\gamma = \{x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, 0 \leq t < \infty\}$ .

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 14

1. Wyprowadzić wzór na obliczanie całki  $\int_{\gamma} f(x, y) ds$  w przypadku gdy krzywa  $\gamma$  jest zadana równaniem we współrzędnych biegunowych  $\{r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$ . Zastosować ten wzór do obliczenia całki

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2)^{-3/2} ds$$

gdzie  $\gamma$  jest łukiem spirali logarytmicznej  $r(\varphi) = 1/\varphi$  od  $\varphi = \sqrt{3}$  do  $\varphi = 2\sqrt{2}$ .

2. Znaleźć masę łuku linii łańcuchowej  $y = a \cosh x/a$  pomiędzy punktami  $x = 0$  i  $x = a$  jeśli gęstość krzywej jest odwrotnie proporcjonalne do odciętej punktu.

3. Znaleźć pole pętli liścia Kartezjusza  $\{x^3 + y^3 = 3axy\}$ . **Wsk.** Położyć  $t = y/x$ .

4. Obliczyć pracę siły ciężkości  $\mathbb{F}$  jeśli  $|F| = \frac{k}{r^2}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , potrzebną na przesunięcie masy jednostkowej z punktu  $A = (x_1, y_1, z_1)$  do punktu  $B = (x_2, y_2, z_2)$ .

5. Wyrazić całkę po konturze  $\Gamma = \partial D$  przez całkę podwójną

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy.$$

6. Jakie wartości mogą przyjmować całki

$$(A) \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \quad (B) \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}, \quad (C) \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{(x^2 - y^2)dx + 2xydy}{(x^2 + y^2)^2}$$

jeśli  $\gamma$  jest zamkniętą krzywą płaską nie przechodzącą przez punkt  $O = (0, 0)$ .

7. Sprawdzić wzór Greena dla pola  $\mathbb{F} = ((x + y)^2, -(x^2 + y^2))$  oraz konturu  $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\}$  z dodatnią orientacją.

8. Sprawdzić czy pole  $\mathbb{F} = (P, Q)$  określone na obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  spełnia warunek całkowalności, a następnie znaleźć funkcję  $U(x, y)$  (potencjał pola  $\mathbb{F}$ ) taką, że  $dU = Pdx + Qdy$ , gdzie

$$(A) P(x, y) = x^4 + 4xy^3, \quad Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4, \quad \Omega = \mathbb{R}^2;$$

$$(B) P(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^3 - 3xy^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-2xy}{x^3 - 3xy^2}, \quad \Omega = \{x > 0, x^3 - 3xy^2 > 0\};$$

$$(C) P(x, y) = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}, \quad Q(x, y) = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}, \quad \Omega = \{x > 0\}.$$

9. Wykazać że całka zorientowana nie zależy od drogi całkowania a następnie ją policzyć

$$(A) \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz;$$

$$(B) \int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz;$$

$$(C) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$(D) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \sin(x + y + z)(dx + dy + dz).$$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 15

1. Obliczyć całki powierzchniowe niezorientowane

$$(A) \iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\};$$

$$(B) \iint_S (1 + x + y)^{-2} dS, \quad S = \text{brzeg } \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\};$$

$$(C) \iint_S z dS, \quad S = \{x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi\};$$

$$(D) \iint_S (xy + yz + zx) dS, \quad S = \{z = k\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2. Niech  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Wykazać wzór Poissona

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du.$$

3. Obliczyć masę czaszy  $\{z = k(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 1\}$  o gęstości  $\rho(x, y, z) = z$ .

4. Z jaką siłą przyciągany jest punkt  $O$  o masie jednostkowej przez jednorodną powierzchnię  $S = \{x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r, 0 < a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ .

5. Z jaką siłą przyciągany jest punkt  $M$  o masie jednostkowej przez jednorodną powierzchnię sfery  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ . Rozważyć przypadki

- $M$  leży wewnątrz sfery;
- $M$  leży na zewnątrz sfery;
- $M$  leży na sferze.

6. Policzyc całki powierzchniowe zorientowane ( $S$  ma orientację zewnętrzną)

$$(A) \iint_S (y - z) dydz + (z - x) dzdx + (x - y) dx dy,$$

$$\text{gdzie } S = \{x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h\};$$

$$(B) \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy,$$

$$\text{gdzie } S = \{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\};$$

$$(C) \iint_S \left( \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} \right),$$

$$\text{gdzie } S = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

## Zadania z Analizy Matematycznej II.

### Seria 16

1. Przekształcić według wzoru Gaussa-Ostrogradskiego całki, a następnie obliczyć obie strony wzoru w przypadku gdy  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  zorientowana na zewnątrz.

$$(A) \iint_S yz dydz + zxdzdx + xydx dy;$$

$$(B) \iint_S x^k dydz + y^k dzdx + z^k dx dy, \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$(C) \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

2. Obliczyć całki

$$(A) \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$$

gdzie  $S$  jest zewnętrzną stroną sześcianu  $\{0 \leq \max(x, y, z) \leq a\}$ ;

$$(B) \iint_S (x - y + z) dydz + (y - z + x) dzdx + (z - x + y) dx dy,$$

gdzie  $S$  jest zewnętrzną stroną sześcianu  $\{|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\}$

3. Znaleźć potok pola  $\mathbf{F} = [x^2, y^2, z^2]$  przez dodatnią ćwiartkę sfery  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

4. Znaleźć potok pola  $\mathbf{F} = [y, z, x]$  przez powierzchnię stożka ograniczonego płaszczyznami  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ .

5. Stosując wzór Stokesa policzyć całki wzdłuż krzywej zamkniętej  $\Gamma$  zorientowanej dodatnio

$$(A) \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz \quad \text{gdzie } \Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y + z = 0\};$$

$$(B) \oint_{\Gamma} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$$

gdzie  $\Gamma = \{x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi\}$ .

6. Policzyć całkę

$$\int_{\Gamma} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz;$$

wzdłuż krzywej  $\Gamma = \{x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ .