Algebra z geometrią 2013/2014

Egzamin pisemny 10.02.2014

Instrukcje: *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia***. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Zadanie 1. Zdefiniuj liniową niezależność nieskończonego zbioru wektorów (1 punkt). Udowodnij że każdy niepusty podzbiór zbioru liniowo niezależnego jest liniowo niezależny (1 punkt). Niech $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$, gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, będzie zbiorem liniowo niezależnym w przestrzeni wektorowej nad ciałem k. Zbadaj liniową niezależność zbioru $B := \{e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ \ldots,\ e_n + e_{n+1},\ e_{n+1} + e_1\}$ w zależności od parzystości n i charakterystyki ciała k (6 punktów). Jeżeli zbiór B jest liniowo zależny, zdajdź bazę $\operatorname{span}(B)$ (2 punkty).

Zadanie 2. Niech U i W będą podprzestrzeniami skończeniewymiarowej przestrzeni wektorowej. Korzystając ze wzoru $\dim \frac{V}{V'} = \dim V - \dim V'$, udowodnij że

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \quad \text{(2 punkty).}$$

Rozpatrzmy następujące podprzestrzenie przestrzeni wektorowej $\mathbb{Q}^5$:

$$V_1 := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\},$$

$V_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5 \mid x_1+2x_2+3x_3 = 0,\ x_1+2x_2+9x_3+x_4-2x_5 = 0,\ x_1-2x_2+3x_3+x_4-2x_5 = 0\}$.

Znajdź bazy i wymiary: V_1 (2 punkty), V_2 (2 punkty), $V_1 + V_2$ (2 punkty) oraz $V_1 \cap V_2$ (2 punkty).

Zadanie 3. Rozważmy włożenie podprzestrzeni wektorowej w przestrzeń wektorową $\subseteq : U \to V$ jako odwzorowanie liniowe. Udowodnij że jego odwzorowanie transponowane jest surjekcją (3 punkty). Niech $\mathbb{R}_3[t]$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową rzeczywistych funkcji wielomianowych nieposiadających stopnia większego niż 3. Sprawdź że odwzorowania

$$f : \mathbb{R}_3[t] \ni w \longmapsto \begin{pmatrix} w(1) \\ \int_0^1 w(t)dt \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad g : \mathbb{R}_3[t] \ni w \longmapsto \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

są liniowe (2 punkty). Znajdź bazę $\ker(f)$ i bazę $\ker(g)$ (3 punkty). Udowodnij że $\ker(f) \cup \ker(g)$ jest bazą $\mathbb{R}_3[t]$ (2 punkty).

Zadanie 4. Zdefiniuj macierz odwzorowania liniowego (1 punkt). Jakiej postaci musi być dziedzina odwzorowania liniowego jeśli jego macierz ma tylko jedną kolumnę (1 punkt)? Jakiej postaci musi być przeciwdziedzina odwzorowania liniowego jeśli jego macierz ma tylko jeden wiersz (1 punkt)? Niech $\mathbb{R}_3[t]$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową rzeczywistych funkcji wielomianowych nieposiadających stopnia większego niż 3. Niech $f : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^4$ będzie odwzorowaniem liniowym zadanym wzorem

$$f(w) := \begin{pmatrix} w(1) \\ 2w'(0) + w''(1) - w'''(-3) \\ 3\int_{-1}^1 w - w''(1) - 12w(0) \\ w^{(4)}(1) \end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierz odwzorowania f w bazach standardowych (3 punkty) oraz w bazach

$$\{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2,\ 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{i} \quad \{e_1,\ e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3,\ e_1+e_2+e_3+e_4\},$$

gdzie $\{e_1, \ldots, e_4\}$ to baza standardowa $\mathbb{R}^4$ (4 punkty).