Algebra z geometrią 2013/2014

Egzamin poprawkowy 05.03.2014

Instrukcje: *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. *Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Część A

Zadanie 1. Zdefiniuj permutację i znak permutacji (2 punkty). Sprawdź że wzór

$$\sigma(k) := \frac{21}{2} - \left|\frac{21}{2} - 2k\right|$$

określa permutację zbioru $X = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$ (2 punkty). Następnie:

a) Znajdź znak permutacji σ i jej rozkładna cykle rozłączne (2 punkty).

b) Oblicz σ^6 (2 punkty).

c) Zbadaj czy istnieją punkty stałe permutacji σ, a jeżeli tak, to wyznacz je (2 punkty).

Zadanie 2. Udowodnij że pierścień wielomianów $\mathbb{C}[\mathbb{N}]$ jest izomorficzny z pierścieniem zespolonych funkcji wielomianowych (4 punkty). Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki równania

$$z^3 + 3z^2 - 9z - 19 = 0 \qquad \text{(6 punktów).}$$

Zadanie 3. Niech R będzie pierścieniem bez dzielników zera. Udowodnij że $\forall\ \alpha, \beta \in R[\mathbb{N}] \setminus \{0\}$: $\deg(\alpha * \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ (2 punkty). Znajdź iloraz oraz resztę z dzielenia wielomianu α przez β, gdzie

$$\alpha := x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 \in \mathbb{Q}[\mathbb{N}], \qquad \beta := x^3 - x^2 - 4 \in \mathbb{Q}[\mathbb{N}] \qquad \text{(3 punkty).}$$

Wyznacz największy wspólny dzielnik γ tych wielomianów (3 punkty) oraz wielomiany μ i ν takie że

$$\mu * \alpha + \nu * \beta = \gamma \qquad \text{(2 punkty).}$$

Część B

Zadanie 4. Zdefiniuj liniową niezależność nieskończonego zbioru wektorów (1 punkt). Udowodnij że każdy niepusty podzbiór zbioru liniowo niezależnego jest liniowo niezależny (1 punkt). Niech

$$\alpha := x^2 + 2x - 3, \quad \beta := 2x^2 - 3x + 4, \quad \gamma := tx^2 - 1, \quad \delta := -\sqrt{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \in \quad \mathbb{R}[\mathbb{N}].$$

Znajdź wszystkie wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ dla których:

a) zbiór $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}[\mathbb{N}]$ jest liniowo niezależny (4 punkty),

b) $\delta \in \operatorname{span}\{\alpha, \beta, \gamma\}$ (4 punkty).

Zadanie 5. Niech V będzie niezerową przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze n. Udowodnij że każdy n-elementowy liniowo niezależny podzbiór V jest jego bazą oraz że każdy podzbiór V rozpinający V musi mieć co najmniej n-elementów (4 punkty). Niech $\mathbb{C}_n[\,\cdot\,]$ oznacza zespoloną przestrzeń wektorową wszystkich zespolonych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnie większego niż n. Udowodnij że przestrzeń $\mathbb{C}[\,\cdot\,]$ wszystkich zespolonych funkcji wielomianowych jest sumą prostą swoich dwóch podprzestrzeni: $U := \mathbb{C}_2[\,\cdot\,]$ oraz

$$V := \Big\{ w \in \mathbb{C}[\,\cdot\,] \,\Big|\, w(-1) = w(0) = w(2) = 0 \Big\} \qquad \text{(3 punkty).}$$

Znajdź rozkład funkcji t^5 na składowe w U i V (3 punkty).

Zadanie 6. Zdefiniuj odwzorowanie liniowe pomiędzy przestrzeniami wektorowymi (1 punkt). Zdefiniuj macierz takiego odwzorowania liniowego (1 punkt). Niech

$$v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w := \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

a) Udowodnij że $\{v_1, v_2, v_3\}$ jest bazą $\mathbb{Q}^3$ (3 punkty).

b) Niech $f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym którego macierz w bazie standardowej wygląda tak:
$$\begin{bmatrix} 11 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$
Oblicz macierz f w bazie $\{v_1, v_2, v_3\}$ (3 punkty).

c) Oblicz $f(w)$ (2 punkty).