

# Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 0, 01.10.2013

**Zadanie 1.** Zbadaj czy zdanie

- a)  $\left( (p \Rightarrow q) \wedge \sim q \right) \Rightarrow \sim p$  jest tautologią,
- b)  $\left( \exists_{x \in X} (p(x) \wedge q(x)) \right) \Rightarrow \left( \exists_{x \in X} p(x) \right) \wedge \left( \exists_{x \in X} q(x) \right)$  jest prawdziwe.

**Zadanie 2.** Dla dowolnych podzbiorów  $A, B \subseteq \Omega$  ich różnica symetryczna to

$$A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wykaż że:

- a) Różnica symetryczna jest działaniem łącznym, tzn. dla każdych podzbiorów  $A, B, C$  zbioru  $\Omega$  zachodzi

$$(A \div B) \div C = A \div (B \div C).$$

- b) Dla dowolnych podzbiorów  $A, B \subseteq \Omega$  istnieje jedyny podzbiór  $X \subseteq \Omega$  taki że

$$(A \div X) = B$$

(powyższe równanie ma jednoznaczne rozwiązanie).

**Zadanie 3.** Dany jest zbiór  $\Omega$  oraz ustalony jego podzbiór  $X \subseteq \Omega$ . Na zbiorze  $2^\Omega$  definiujemy relację

$$\forall A, B \subseteq \Omega : A \sim B \Leftrightarrow A \div B \subseteq X.$$

Sprawdź czy ta relacja jest relacją równoważności.

**Zadanie 4.** Sprawdź czy następujące relacje są relacjami równoważności:

- a)  $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{Z}} (a - b) = 5n,$
- b)  $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} (a - b) = 5n,$
- c)  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \sim b \Leftrightarrow |a - b| \neq 0,$
- d)  $\forall a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a \sim b \Leftrightarrow a, b$  są względnie pierwsze, tj. nie mają wspólnych dzielników.

**Zadanie 5.** Określ relację równoważności na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  tak aby klasami równoważności (abstrakcji) tej relacji były:

- a) proste postaci  $y = 3x + b$  dla  $b \in \mathbb{R},$
- b) parabole postaci  $y = x^2 + c$  dla  $c \in \mathbb{R},$
- c) okręgi o środku w punkcie  $(0, 0)$  i promieniach  $r \geq 0.$

**Zadanie 6.** Dla danego zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}$  określamy relację

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y), \quad \text{gdzie } f(x) := x^2 + 2x + 1.$$

Sprawdź czy ta relacja jest relacją równoważności w przypadku gdy a)  $A = \mathbb{R},$  b)  $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$  Jeśli jest, to znajdź liczbę elementów w każdej klasie równoważności.