Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 1, 08.10.2013

Zadanie 1. Sprawdź że następujące relacje są relacjami równoważności:

a) $R_{\mathbb{Z}} := \Big\{ \big((m,n),(p,q) \big) \in \mathbb{N}^4 \mid p+n = m+q \Big\}$,

b) $R_{\mathbb{Q}} := \Big\{ \big((m,n),(p,q) \big) \in \big(\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \big)^2 \mid mq = np \Big\}$.

Zadanie 2. Sprawdź że następujące wzory definiujące odpowiednio dodawanie i mnożenie liczb całkowitych $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2/R_{\mathbb{Z}}$ są dobrze określone (nie zależą od wyboru reprezentantów klas równoważności):

a) $[(m,n)] + [(p,q)] := [(m+p, n+q)]$,

b) $[(m,n)] \cdot [(p,q)] := [(mp+nq, mq+np)]$.

Zadanie 3. Sprawdź że następujące wzory definiujące odpowiednio dodawanie i mnożenie liczb wymiernych $\mathbb{Q} := \big(\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \big)/R_{\mathbb{Q}}$ są dobrze określone (nie zależą od wyboru reprezentantów klas równoważności):

a) $[(m,n)] + [(p,q)] := [(mq+np, nq)]$,

b) $[(m,n)] \cdot [(p,q)] := [(mp, nq)]$.

Zadanie 4. Sprawdź że następująca relacja

$$x \; R \; y \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x = y \quad \text{lub} \quad x = -y \in [-1,1] \quad \text{lub} \quad |x| + |y| = 1 \big)$$

jest relacją równoważności w $\mathbb{R}$. Opisz jej klasy równoważności i narysuj odpowiadający jej podzbiór R w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 5. Udowodnij że równanie $x^2 - 2 = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{Q}$.

Zadanie 6. Udowodnij że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.