Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 10, 17.12.2013

LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ, ROZPINANIE I BAZY

Zadanie 1. *(Zadanie 178 z zielonego zbioru.)* W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, zbadaj liniową niezależność zbioru

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2p \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ 5 \\ 3+p \\ -3p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10+p \\ -13 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4 .$$

Zadanie 2. Znajdź bazy sumy i części wspólnej podmodułów $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ i $\operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ dla

$$\text{a)}\ v_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},\ v_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix},\ v_3 := \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix},\ w_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ w_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix},\ w_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^5,$$

$$\text{b)}\ v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ w_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^5 .$$

Zadanie 3. Które z elementów $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^5$ należą do modułu $V \subset \mathbb{Q}^5$ opisanego równaniami

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \quad ?$$

Czy można z nich wybrać bazę V?

Zadanie 4. Sprawdź że odwzorowanie ϕ z modułu rzeczywistych wielomianów nie posiadających stopnia większego od 3 do $\mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$\phi : \mathbb{R}_3[\mathbb{N}] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \phi(\alpha) \longmapsto \begin{bmatrix} f''_\alpha(0) \\ f'_\alpha(1) - f''_\alpha(0) \\ f_\alpha(1) \end{bmatrix},$$

jest liniowe. Znajdź bazy $\operatorname{Ker}\phi$, $\operatorname{Im}\phi$ oraz $\operatorname{Coker}\phi$.

Zadanie 5. *(Zadanie 138 z zielonego zbioru.)* Niech $\mathbb{R}_3[\mathbb{N}]$ będzie modułem wszystkich rzeczywistych wielomianów nie posiadających stopnia większego niż 3. Znajdź bazę podmodułu

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{R}_3[\mathbb{N}] \;\middle|\; f_\alpha(1) = f'_\alpha(0) = -\frac{1}{2} f_\alpha(0) \right\} .$$

Zadanie 6. *(Zadanie 127 z zielonego zbioru.)* Niech zbiór $\{e_1, \ldots, e_n\}$, gdzie $n \geqslant 3$, będzie zbiorem liniowo niezależnym nad dowolnym ciałem o charakterystyce $\neq 2$. Udowodnij że zbiór

$$\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_n + e_1\}$$

jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy liczba n jest nieparzysta.