Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 11, 07.01.2014

BAZY PRZESTRZENI WEKTOROWYCH

Zadanie 1. Znajdź bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ której dwa wektory tworzą bazę podprzestrzeni

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0,\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

Zadanie 2. Rozpatrzmy zbiór wszystkich zespolonych funkcji wielomianowych $\mathbb{C}[\,\cdot\,]$ jako przestrzeń wektorową nad $\mathbb{C}$. Niech $r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wykaż że zbiory wszystkich funkcji wielomianowych odpowiednio wielomianów x^n, $n \in \mathbb{N}$, oraz $(x-r)^n$, $n \in \mathbb{N}$, są bazami $\mathbb{C}[\,\cdot\,]$. Wyznacz współrzędne funkcji wielomianowej $t \mapsto \sum_{i=0}^m a_i t^i$ względem tych baz.

Zadanie 3. Niech U będzie następującą podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$:

$$U := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}.$$

Wykaż że $(2, 0, -1) \in U$ i znajdź bazę podprzestrzeni U zawierającą ten wektor.

Zadanie 4. *(Zadanie 128 z zielonego zbioru.)* Podaj przykład bazy wymiernej podprzestrzeni wektorowej

$$\{(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (x_n) \text{ jest ciągiem arytmetycznym}\}.$$

Czy przestrzeń wektorowa $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ może mieć przeliczalną bazę?

Zadanie 5. Zbadaj które z następujących podzbiorów rzeczywistej przestrzeni wektorowej wielomianów rzeczywistych stanowią jej podprzestrzeń:

a) wielomiany dla których dane $r \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem,

b) wielomiany dla których dane $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ jest pierwiastkiem,

c) wielomiany dla których dane $s \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem pojedynczym.

Jeżeli podzbiór jest podprzestrzenią, znajdź jego bazę.

Zadanie 6. W rzeczywistej przestrzeni wektorowej wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych $\mathbb{R}[\,\cdot\,]$ dany jest podzbiór $U := \{w \in \mathbb{R}[\,\cdot\,] \mid \int_0^1 w = w(1) - w(0)\}$. Pokaż że U jest podprzestrzenią wektorową, znajdź jej bazę, a następnie uzupełnij tę bazę do bazy $\mathbb{R}[\,\cdot\,]$.