Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 12, 14.01.2014

MACIERZE ODWZOROWAŃ LINIOWYCH

Zadanie 1. *(Kostrykin, cz. 1, Zadanie 4.1.1.)* Przemnóż macierze:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. *(Kostrykin, cz. 1, Zadanie 4.1.4.)* Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n, \quad \text{b)} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \right)^n.$$

Zadanie 3. *(Kostrykin, cz. 3, Zadanie 3.1.19.)* Niech $(e_1, \ldots, e_4)$ będzie bazą uporządkowaną wymiernej przestrzeni wektorowej V. Niech f będzie endomorfizmem V który w tej bazie reprezentowany jest przez macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz tego endomorfizmu względem następujących baz uporządkowanych:

$$\text{a)}\ (e_2,\ e_1,\ e_3,\ e_4), \qquad \text{b)}\ (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4).$$

Zadanie 4. Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe D z przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[\cdot]$ wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych nieposiadających stopnia większego niż 2 do przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ dany wzorem

$$Dw := \begin{bmatrix} w(-1) + w(0) + w'(1) \\ w'(-1) + w(0) + w(1) \\ w(-1) + 2w(0) + w'(1) \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz odwzorowania D w bazach uporządkowanych $(t^2, t, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}_2[\cdot]$ oraz standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znajdź też bazy $\operatorname{Ker} D$ oraz $\operatorname{Im} D$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{R}_n[\mathbb{N}]$ oznacza rzeczywistą przestrzeń wektorową wszystkich wielomianów rzeczywistych nieposiadających stopnia większego niż n. Niech $F : \mathbb{R}_2[\mathbb{N}] \to \mathbb{R}_1[\mathbb{N}]$ będzie odwzorowaniem liniowym takim że $F(1 + x) = x,\ F((1 + x)^2) = 1 + x,\ F((1 - x)^2) = 1 - x$. Znajdź macierz odwzorowania F w bazach uporządkowanych odpowiednio $(1, x, x^2)$ oraz $(x - 1, x + 1)$.

Zadanie 6. Rozważmy zespoloną przestrzeń wektorową $V := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\}$.

a) Sprawdź że $XA - AX \in V$ jeśli $A \in V$ oraz $X \in M_2(\mathbb{C})$.

b) Udowodnij że zbiory $E := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ oraz $F := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ są bazami V.

c) Niech $f : V \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym danym wzorem $f(A) := XA - AX$, gdzie $X := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdź macierze tego odwzorowania w parach baz EE, EF, FE i FF.