Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 13, 21.01.2014

PIERŚCIEŃ MACIERZY I POJĘCIE WYMIARU

Zadanie 1. *(Kostrikin, cz. 2, Zad. 3.1.21)* Niech endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^3)$ będzie reprezentowany przez macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right).$$

Wyznacz jego macierz w bazie $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$. Oblicz wymiary jądra, obrazu i kojądra f.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}[\cdot]$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych. Endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}[\cdot])$ dany jest wzorem $(f(w))(t) := (t+1)w'(t)$. Znajdź macierze f w bazach uporządkowanych

$$E := (1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots) \quad \text{oraz} \quad F := (1, 1+t, (1+t)^2, \ldots, (1+t)^n, \ldots).$$

Wyznacz macierze przejścia z bazy E do F oraz z bazy F do E. Oblicz wymiary $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Coker}(f)$ oraz indeks Fredholma f.

Zadanie 3. Niech V będzie wolnym $\mathbb{Z}$-modułem o bazie uporządkowanej (e_1, e_2, e_3). Macierz endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ w tej bazie ma postać

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Udowodnij że $(e_1 + e_2, 3e_1 - e_3, e_1)$ jest bazą uporządkowaną V. Znajdź w niej macierz endomorfizmu f oraz macierze zmiany bazy.

Zadanie 4. Niech k będzie dowolnym ciałem o charakterystyce zero. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej k^4, gdzie V_1 i V_2 są odpowiednio rozpięte przez wektory

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Zadanie 5. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^4$, gdzie V_1 jest rozpięta przez wektory

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{a } V_2 \text{ jest opisana układem równań} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Zadanie 6. *(Zielony zbiór, Zad. 184)* Niech $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^3)$ będą odwzorowaniami liniowym których macierze w bazach standardowych są równe odpowiednio

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 3 & 10 & -3 & 13 & 16 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -2 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wymiary jąder, obrazów, kojąder oraz indeksów Fredholma tych odwzorowań. Znajdź odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}$ takie że $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_1) + \mathrm{Ker}(f_2)$.