Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 14, 17.02.2014

ODWZOROWANIA TRANSPONOWANE I BAZY DUALNE

Zadanie 1. Sprawdź że funkcjonały liniowe $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ określone wzorami

$$\omega^k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2kx_k - x_1 - x_2 - x_3, \qquad k = 1, 2, 3,$$

tworzą bazę przestrzeni dualnej $(\mathbb{Q}^3)^*$. Znajdź w tej bazie macierz endomorfizmu transponowanego $f^T \in \mathrm{End}((\mathbb{Q}^3)^*)$, gdzie

$$\forall\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q} :\ f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. Niech $V := \mathbb{R}_2[t]$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2. Zdefiniujmy endomorfizm $\delta \in \mathrm{End}(V)$ wzorem $(\delta v)(t) = v'(t)$, a funkcjonały liniowe $\omega^k \in V^*$, $k \in \mathbb{Z}$, wzorem $\omega^k(v) = v(k)$. Pokaż że funkcjonały liniowe ω^0, ω^1, ω^2 stanowią bazę przestrzeni dualnej V^*. Znajdź taką bazę przestrzeni V do której jest ona dualna. Wyraź $\delta^T(\omega^{-1})$ jako kombinację liniową ω^0, ω^1, ω^2.

Zadanie 3. Znajdź bazę dualną do bazy $\mathbb{C}^3$

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 4. Zapisz bazę dualną do bazy $B := \{1, t, \frac{t^2}{2!}, \cdots, \frac{t^n}{n!}\}$ rzeczywistej przestrzeni wektorowej wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia wyższego niż n przy pomocy operacji różniczkowania.

Zadanie 5. Niech $z_0, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ będą różnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij że zbiór $\{\mathrm{ev}_{z_j}\}_{j=0}^n$ funkcjonałów ewaluacyjnych jest bazą przestrzeni dualnej do zespolonej przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}_n[z]$ wszystkich wielomianowych funkcji zespolonych nie posiadających stopnia większego niż n. Znajdź bazę $\mathbb{C}_n[z]$ do której $\{\mathrm{ev}_{z_j}\}_{j=0}^n$ jest bazą dualną.

Zadanie 6. W bazie kanonicznej, znajdź macierz endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{Q}^5$ rzutującego wzdłuż podprzestrzeni

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{na podprzestrzeń} \qquad \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$