

Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 2, 15.10.2013

Zadanie 1. Niech $\sigma \in S_n$ będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, \dots, n\}$. Sprawdź że zbiór

$$R_\sigma := \left\{ (i, \sigma^k(i)) \mid i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

jest relacją równoważności w $\{1, \dots, n\}$. Ile jest klas równoważności względem tej relacji gdy $\sigma = \text{id}$, a ile gdy σ jest permutacją cykliczną?

Zadanie 2. Wykaż że odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy gdy

$$\exists Y \xrightarrow{g} X : \quad g \circ f = \text{id}_X \quad \text{i} \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

Zadanie 3. Udowodnij że półgrupa G jest grupą wtedy i tylko wtedy gdy $\forall g \in G$ odwzorowania

$$G \in h \longmapsto gh \in G \quad \text{i} \quad G \in h \longmapsto hg \in G$$

są bijekcjami. Następnie wykaż że skończona półgrupa G jest grupą wtedy i tylko wtedy gdy zachodzą prawa skracania:

$$\forall g, h, k \in G : \quad (gk = hk \implies g = h) \quad \text{i} \quad (kg = kh \implies g = h).$$

Podaj przykład nieskończonej półgrupy w której zachodzą powyższe prawa skracania, ale nie będącej grupą.

Zadanie 4. W sali siedzi grupa osób. Pokaż że, po nieparzystej liczbie zamian miejscami 2 osób, co najmniej 2 osoby znajdą się na miejscach innych niż na początku.

Zadanie 5. Niech e będzie elementem neutralnym grupy G . Udowodnij że warunek

$$\forall g \in G : \quad g^2 = e$$

implikuje iż G jest grupą abelową.

Zadanie 6. Złóż permutacje w podanej kolejności, a następnie oblicz ich znak:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$