Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 3, 22.10.2013

Zadanie 1. Niech R będzie dowolnym pierścieniem, $r, s, \in R$. Udowodnij że

$$\exists\, x \in R:\ (rs-1)x = 1 = x(rs-1) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y \in R:\ (sr-1)y = 1 = y(sr-1)\,.$$

Zadanie 2. Niech $(G, \cdot)$ będzie monoidem, a $(R, +, \bullet)$ pierścieniem. Zdefiniujmy zbiór

$$R[G] := \{\alpha \in \mathrm{Map}(G, R) \mid \alpha(g) \neq 0 \ \text{ tylko dla skończenie wielu } \ g \in G\}\,,$$

oraz mnożenie w tym zbiorze:

$$\forall\, g \in G : (\alpha * \beta)(g) := \sum_{h, h' \in G,\ h \cdot h' = g} \alpha(h) \bullet \beta(h')\ .$$

Udowodnij łączność mnożenia $R[G] \times R[G] \xrightarrow{*} R[G]$.

Zadanie 3. Udowodnij że pierścień $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy gdy n jest liczbą pierwszą.

Zadanie 4. Niech k będzie ciałem. Udowodnij że pierścień $\mathrm{Map}(X, k)$ z działaniami punktowymi jest ciałem wtedy i tylko wtedy gdy X jest zbiorem jednoelementowym.

Zadanie 5. Udowodnij że każdy homomorfizm ciał jest injektywny.

Zadanie 6. Niech H będzie podgrupą skończonej grupy G. Pokaż że liczba elementów podgrupy H jest dzielnikiem liczby elementów grupy G (twierdzenie Lagrange'a).