# Algebra z geometrią 2013/2014

## Seria 4, 5.11.2013

**Zadanie 1.** Udowodnij że

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} : \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}k} = 0\,.$$

**Zadanie 2.** Znajdź odwrotności liczb zespolonych:

a) $\dfrac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \dfrac{3-i}{1+i} + (\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i) - i^3\,,$

b) $2i(i-1) + \left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^3 + (1+i)\overline{(1+i)}\,.$

**Zadanie 3.** Oblicz

a) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{1410}\,,$

b) $\left[2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \overline{2i\left(\dfrac{1}{2}-i\right)} + i^{101}\right]^{1993}\,.$

**Zadanie 4.** Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania $|z+i| + |z-i| = 2$.

**Zadanie 5.** (Zadanie 5 z zielonego zbioru zadań.) Niech $f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją zadana wzorem

$$f(u) = \frac{2u}{u^2 - 4u + 1}\,.$$

Znajdź zbiór wszystkich wartości funkcji $f$.

**Zadanie 6.** Wykaż że $\forall\, x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ :

a) $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \dfrac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)},$

b) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{1}{2}nx\,\sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}.$