Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 6, 19.11.2013

PIERŚCIEŃ WIELOMIANÓW

Zadanie 1. Znajdź stopień wielomianu

$$\sum_{n=0}^{\deg w} a_n x^n := (2-5x+x^3)^{211}(3-7x+9x^2-5x^3)^{135} \in \mathbb{Z}[\mathbb{N}]$$

oraz oblicz $a_0 + a_1 + \cdots + a_{\deg w}$.

Zadanie 2. Podaj warunki konieczne i dostateczne na współczynniki wielomianów zespolonych $p(x) := x^2 + ax + 1$ oraz $q(x) := x^4 + px + q$ aby wielomian $p(x)$ był dzielnikiem wielomianu $q(x)$.

Zadanie 3. *(Zadanie 20 z zielonego zbioru.)* Wykaż że wielomian zespolony $p(x)$ jest dzielnikiem wielomianu zespolonego $q(x)$ dla:

a) $p(x) := x^2 + x + 1$ oraz $q(x) := x^{2001} + 2x^{2000} + 2x + 1$,

b) $p(x) := x^2 - 2x\cos\varphi + 1$ oraz $q(x) := x^{2n} - 2x^n \cos(n\varphi) + 1$.

Zadanie 4. Pokaż że, dla $n = 2, 3, 4...$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$, wielomian zespolony

$$(\cos\alpha - x^2 \sin\alpha)^n - \cos n\alpha + x^2 \sin n\alpha.$$

jest podzielny przez wielomian zespolony $x^4 + 1$.

Zadanie 5. Znajdź iloraz oraz resztę z dzielenia $w(x)$ przez $v(x)$ dla

a) $w(x) := x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8x - 3 \in \mathbb{C}[\mathbb{N}]$ oraz $v(x) := x - 2 \in \mathbb{C}[\mathbb{N}]$,

b) $w(x) := x^5 + (1-2i)x^4 - (3+i)x^2 + 7i \in \mathbb{C}[\mathbb{N}]$ oraz $v(x) := x + 1 - 2i \in \mathbb{C}[\mathbb{N}]$.

Zadanie 6. Znajdź największy wspólny dzielnik nastepujących wielomianów rzeczywistych:

a) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2$ oraz $x^4 - 4x + 3$,

b) $x^7 + x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$ oraz $x^6 + x^5 - x^3 + x + 1$,

c) $x^{33} - 1$ oraz $x^{18} - 1$.