Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 7, 26.11.2013

CIAŁO FUNKCJI WYMIERNYCH

Zadanie 1. Oblicz największy wspólny dzielnik następujących par wielomianów wymiernych:

a) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ oraz $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$,

b) $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ oraz $x^2 - x + 1$.

Zadanie 2. Dla wielomianów wymiernych u i v znajdź, albo pokaż że nie istnieją, wielomiany wymierne a i b takie że $au + bv = 1$, gdzie:

a) $u := 5x^4 - 12x - 41$ oraz $v := x^3 - 5x - 7$,

b) $u := x^4 - 7x^2$ oraz $v := x^3 - 5x + 18$.

Zadanie 3. *(Zadanie 37 z zielonego zbioru.)* Znajdź przeciwobraz podzbioru $S \subseteq \mathbb{C}$ względem zespolonej funkcji wymiernej danej wzorem $f(z) := \frac{z}{1-z}$, gdzie:

a) $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - ir| \leqslant r\}$,

b) $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 4\,\mathrm{Im}(z) > 2 - 3\,\mathrm{Re}(z)\}$.

Zadanie 4. Rozłóż na ułamki proste rzeczywistą funkcję wymierną daną wzorem

$$q(x) := \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 2x + 2)^2} .$$

Zrób to samo traktując q jako zespoloną funkcję wymierną.

Zadanie 5. Rozłóż na ułamki proste rzeczywistą funkcję wymierną daną wzorem

$$q(x) := \frac{1}{x^4 + 1} .$$

Zrób to samo traktując q jako wymierną funkcję wymierną (tzn. funkcję wymierną z $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{Q}$).

Zadanie 6. *(Zadanie 106 z zielonego zbioru.)* Sprawdź że, jeśli zespolona funkcja wymierna f spełnia warunek $f(z) = f(\frac{1}{z})$, to istnieje zespolona funkcja wymierna g taka że $f(z) = g(\frac{z+z^{-1}}{2})$. W szczególności, sprawdź że f da się wyrazić przez $\frac{z+z^{-1}}{2}$ jeśli:

$$\text{a) } f(z) := \frac{z^4 + 1}{z^3 + z}, \qquad \text{b) } f(z) := \frac{(z^3 + 1)^2}{z(z^2 - 1)^2} .$$