Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 8, 3.12.2013

OD RÓWNAŃ DO ODWZOROWAŃ LINIOWYCH

Zadanie 1. *(Zadanie 199 z zielonego zbioru.)* Rozwiąż następujący układ równań nad $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}.$$

Zadanie 2. *(Zadanie 2.3.1 z Kostrykina.)* Rozwiąż następujący układ równań nad $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}.$$

Zadanie 3. *(Zadanie 200 z zielonego zbioru.)* W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, rozwiąż następujący układ równań nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. *(Zadanie 205 z zielonego zbioru.)* Trzej bracia X, Y, Z mają łącznie 24 samochody. Pewnego dnia X dał braciom Y i Z po jednej trzeciej swoich samochodów, na co brat Y zrewanżował się takim samym uczynkiem, a wtedy brat Z uczynił to samo co jego bracia. Po ile samochodów mieli początkowo bracia jeśli okazało się że po tych trzech operacjach każdy z nich ma tyle samo co na początku?

Zadanie 5. Sprawdź czy poniższe odwzorowania są liniowe:

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T((x, y, z)^T) := (2x + y, 2y + 3z, x + y + z)^T$,

b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\quad T((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) := (x_1, x_3, x_2, x_4 + 1)^T$,

c) $T : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(w) := (w(1), w'(0))^T$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{C}_n$ oznacza zbiór wszystkich zespolonych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia wiekszego od $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy odwzorowanie $T : \mathbb{C}_n \to \mathbb{C}_n$ dane wzorem

$$(T(w))(Z) := z(w(z + 1) - w(z)).$$

Sprawdź że T jest prawidłowo zdefiniowane, tzn. $T(w) \in \mathbb{C}_n$ jeśli $w \in \mathbb{C}_n$. Następnie sprawdź że T jest liniowe, i znajdź $\ker T$. Pokaż też że obraz T składa się z zespolonych funkcji wielomianowych takich że $w(0) = 0$. Udowodniej że Coker $T \cong \mathbb{C}$.