Algebra z geometrią 2013/2014

Seria 9, 10.12.2013

CIĄGI DOKŁADNE, PRODUKTY I SUMY PROSTE

Zadanie 1. *(Zadanie 192 z zielonego zbioru.)* Wykaż że $\mathbb{R}$-moduł $\mathbb{R}_3[\mathbb{N}]$ rzeczywistych wielomianów nie posiadających stopnia większego niż 3 jest sumą prostą podmodułów $\mathbb{R}_1[\mathbb{N}]$ (nie posiadają stopnia większego niż 1) oraz $V := \{\alpha \in \mathbb{R}_3[\mathbb{N}] \mid \sum_{n=0}^{3} \alpha(n)(1+i)^n = 0\}$. Rozłóż na elementy tej sumy prostej wielomian x^3.

Zadanie 2. Niech U i V będą podmodułami $\mathbb{C}^n$ zdefiniowanymi jako:

$$U := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 + \ldots + x_n = 0 \right\},$$

$$V := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 = \ldots = x_n \right\}.$$

Wykaż że $\mathbb{C}^n = U \oplus V$.

Zadanie 3. Sprawdź czy $\mathbb{Q}^4$ jest sumą prostą swoich podmodułów

$$E := \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \qquad F := \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rozłóż wektor

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

na składowe leżące w tych podmodułach. Co by się zmieniło gdybyśmy zamienili moduł $\mathbb{Q}^4$ na $\mathbb{Z}^4$?

Zadanie 4. Rozważmy $\mathbb{C}$ jako moduł nad $\mathbb{R}$. Pokaż że odworowanie $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$, jest liniowe oraz unipotentne ($\phi^2 = \mathrm{id}$) w pierścieniu endomorfizmów $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Sprawdź że endomorfizm $\varphi := \frac{\phi + \mathrm{id}}{2}$ jest idempotentem ($\varphi^2 = \varphi$) i oblicz go.

Zadanie 5. Znajdź jądro, obraz i kojądro przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ danego wzorem

$$T(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t\,,\; x - y + z + 6t\,,\; x + y - z - 4t\,,\; 2x + 2y - 2z)\,.$$

Zadanie 6. Niech $\mathbb{R}_3[\mathbb{N}]$ będzie $\mathbb{R}$-modułem rzeczywistych wielomianów nie posiadających stopnia większego niż 3. Czy liniowe jest odwzorowanie

$$T : \mathbb{R}_3[\mathbb{N}] \ni \alpha \longmapsto \sum_{n=0}^{2} \alpha(n) x^n \in \mathbb{R}_3[\mathbb{N}]\,?$$

Czy jest idempotentne ($T^2 = T$)?