Algebra z geometrią 2013/14

Zadania domowe (Seria A)

Zadanie 1. Sprawdź czy podane relacje są relacjami równoważności:

a) $\forall\, m, n \in \{1,\ 2,\ 3\} : \quad m \sim n \quad \Leftrightarrow \quad m + n \neq 2,$

b) $\forall\, A, B \in P(\mathbb{N}) : \quad A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \big(A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A\big),$
gdzie $P(\mathbb{N})$ oznacza pewną rodzinę podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

Oblicz ile jest możliwych relacji równoważności na zbiorze n-elementowym dla $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Zadanie 2. Dane jest rozbicie zbioru X na rozłączne podzbiory, tzn. taka rodzina podzbiorów $A_i \subseteq X$, $i = 1 \dots k$, że $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = X$ oraz $\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant k : A_i \cap A_j = \emptyset$. Udowodnij że takie rozbicie zadaje relację równoważności w zbiorze X której klasami równoważności są zbiory A_i.

Zadanie 3. Dane są dwie permutacje σ i τ zbioru $\{1, \dots, n\}$ w postaci tabelarycznej:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Znajdź znak permutacji σ i τ.

b) Znajdź σ^n dla $n \in \mathbb{N}$.

c) Znajdź permutację ρ spełniającą równość $\tau = \sigma \circ \rho$.

Zadanie 4. Przedstaw w postaci iloczynu cykli rozłącznych następujące permutacje:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n & 1 & \cdots & n \end{pmatrix},$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & \cdots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}.$

Zadanie 5. Pokaż że podzbiór $K := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Zadanie 6. Niech $(G, \cdot)$ będzie dowolną grupą, a $(\mathrm{Bij}(G, G), \circ)$ grupą bijekcji zbioru G. Udowodnij że odwzorowanie

$$L : G \ni g \longmapsto L_g \in \mathrm{Bij}(G, G), \quad \forall\, h \in G : L_g(h) := g \cdot h,$$

jest homomorfizmem grup.

Zadanie 7. Wykaż że zbiór $\left\{ \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ jest skończony. Znajdź liczbę jego elementów oraz interpretację geometryczną.

Zadanie 8. Wykaż równości:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\phi) = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\phi \sin n\phi}{2\sin\phi}$,

b) $\cos 8^\circ + \cos 16^\circ + \ldots + \cos 176^\circ = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania

$$z^3 - 6z^2 + 12z - \bar{z} - 6 = 0.$$

Naszkicuj zbiór rozwiazań na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 10. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianów zespolonych:

a) $z^2 - 8 + 15i$,

b) $z^2 - (3+7i)z - 10 + 11i$,

c) $z^4 + 8z^3 + 16z^2 + 9$,

d) $z^3 + 3z^2 - z + 4$.

Zadanie 11. Podaj przykład wielomianu nad $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ stopnia 3 którego funkcja wielomianowa jest zerem.

Zadanie 12. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów nad $\mathbb{Q}$:

a) $x^3 - x^2 - 4x - 6$ i $x^3 + x^2 - 10x - 6$,

b) $x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ i $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 6$.

Zadanie 13. Udowodnij że wielomian $x^4 + 1$ jest nieredukowalny nad $\mathbb{Q}$, ale jest redukowalny nad $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Zadanie 14. Rozłóż na ułamki proste nad $\mathbb{R}$ następujące funkcje wymierne:

a) $\dfrac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+5x+6)}$,

b) $\dfrac{4x^2+2}{x^4+x^2+1}$.