

Algebra z geometrią 2013/14

Zadania domowe (Seria B)

Zadanie 1. Rozwiąż następujące układy równań odpowiednio nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} -4x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - 4z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -5x + 2y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_n$ będzie zbiorem wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż $n \in \mathbb{N}$, tzn. $\mathbb{R}_n := f(\mathbb{R}_n[\mathbb{N}])$, gdzie

$$\mathbb{R}_n[\mathbb{N}] := \{\alpha \in \mathbb{R}[\mathbb{N}] \mid \deg(\alpha) \leq n\} \cup \{0\}.$$

Udowodnij że odwzorowanie $\psi: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ dane wzorem $(\psi(w))(t) := (t+1)w'(t)$ jest liniowe oraz wyznacz jego obraz, jądro i kojądro.

Zadanie 3. Niech

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

będzie przemiennym diagramem homomorfizmów modułów. Udowodnij że, jeśli wiersze są ciągami dokładnymi a f_1, f_2, f_4, f_5 izomorfizmami, to f_3 też jest izomorfizmem.

Zadanie 4. Udowodnij że, jeśli $M \supseteq M' \supseteq M''$ są modułami, to mamy izomorfizm modułów

$$(M/M'')/(M'/M'') \cong M/M'.$$

Zadanie 5. Funkcje rzeczywiste u oraz v na zbiorze $X \neq \emptyset$ spełniają następujący warunek: każda kombinacja liniowa u i v jest funkcją stałego znaku, tzn. ≥ 0 na całym X lub ≤ 0 na całym X . Udowodnij że u i v są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$.

Zadanie 6. Sprawdź czy zbiór $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ jest bazą $\mathbb{Z}^2$.

Zadanie 7. Udowodnij że baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ jest nieprzeliczalna.

Zadanie 8. Wykaż że następujący układ wektorów z $\mathbb{Q}^5$ jest liniowo zależny, ale każda wybrana czwórka tych wektorów jest liniowo niezależna:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9. Niech $f : \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}^5$ będzie odwzorowaniem $\mathbb{Z}$ -liniowym którego macierz w uporządkowanej bazie standardowej $(e_1, \dots, e_5)$ jest następująca:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz tego odwzorowania w bazie uporządkowanej $(e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + \dots + e_5)$.

Zadanie 10. Niech R będzie pierścieniem i $V = \bigoplus_{\mathbb{N}} R$ wolnym prawym R -modulem. Oznaczmy przez $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bazę kanoniczną V . Znajdź w tej bazie

- a) macierz odwzorowania liniowego A zadanego przez $\forall k \in \mathbb{N} : A(e_k) = e_{k+1}$,
- b) macierz odwzorowania liniowego B zadanego przez $B(e_0) = 0$ i $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : B(e_k) = e_{k-1}$.

Wymnóż macierze A i B tak żeby otrzymać w tej samej bazie macierz odwzorowania liniowego $A \circ B$.

Zadanie 11. Pierścieniem Cuntz'a R_n nazywamy pierścień zawierający elementy $r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n$ takie że $\sum_{i=1}^n r_i s_i = 1$ oraz $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : s_i r_j = \delta_{ij}$. Udowodnij że R_n^n i R_n są izomorficzne jako moduły nad pierścieniem Cuntz'a.

Zadanie 12. Niech $0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow 0$ będzie ciągiem dokładnym skończeniowymiarowych przestrzeni wektorowych. Udowodnij że $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim V_i = 0$.

Zadanie 13. Sprawdź że funkcjonały liniowe $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ określone wzorami:

$$\omega^k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2kx_k - x_1 - x_2 - x_3, \quad k = 1, 2, 3,$$

tworzą bazę przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$. Znajdź w tej bazie macierz endomorfizmu transponowanego $f^T \in \text{End}((\mathbb{R}^3)^*)$, gdzie

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 14. Niech $V := \mathbb{R}_2[t]$ będzie przestrzenią rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2, $\delta \in \text{End}(V)$, $(\delta v)(t) = v'(t)$. Niech $\omega^k \in V^*$ będzie zadane przez $\omega^k(v) = v(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pokaż że funkcjonały liniowe $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ stanowią bazę przestrzeni V^* . Znajdź taką bazę przestrzeni V do której jest ona dualna. Wyraż $\delta^T(\omega^{-1})$ jako kombinację liniową $\omega^0, \omega^1, \omega^2$.