

MOTYWACJE, ZBIORY, LICZBY I RELACJE

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 1, 02.10.2013

Typeset by Jakub Szczepanik.

“Algebra jest jedną z głównych obok analizy i geometrii gałęzi matematyki. Jest to również jeden z najstarszych jej działów. Początkowo algebra była nauką o rozwiązywaniu równań i stąd wywodzi się jej nazwa (słowo algebra związane jest z terminem arabskim al-džabr dotyczącym operacji dodawania do obu stron równania tej samej liczby).”

Równanie kwadratowe

Jak rozwiązać równanie $x^2 + ax + b = 0$? Stosujemy podstawienie $x =: t - \frac{a}{2}$ eliminując człon liniowy ax :

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= 0 \\ \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + a\left(t - \frac{a}{2}\right) + b &= 0 \\ t^2 - at + \frac{a^2}{4} + at - \frac{a^2}{2} + b &= 0 \\ t^2 - \frac{a^2}{4} + b &= 0, \quad t^2 = \frac{a^2}{4} - b \\ t &= \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\end{aligned}$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

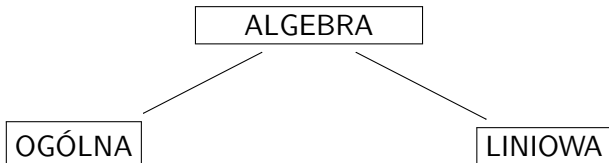
Podobnie możemy poradzić sobie z równaniami stopnia 3 i 4, ale równania wyższych stopni **nie posiadają ogólnego rozwiązania!**

Rozwiązywanie równań

często wymusza poszerzanie zbioru współczynników równania do zbioru rozwiązań:

- 1 Równanie $x + 1 = 0$ ma współczynniki naturalne, ale jego rozwiązanie $x = -1$ jest ujemną liczbą całkowitą.
- 2 Równanie $2x - 1 = 0$ ma współczynniki całkowite, ale jego rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$ jest niecałkowitą liczbą wymierną.
- 3 Równanie $\frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$ ma współczynniki wymierne, ale jego rozwiązania $x = \pm\sqrt{2}$ są niewymiernymi liczbami rzeczywistymi.
- 4 Równanie $x^2 + 2 = 0$ ma współczynniki naturalne (całkowite, wymierne, rzeczywiste), ale jego rozwiązania $x = \pm i\sqrt{2}$ są (niewymiernymi) liczbami zespolonymi.

Motywacje



Motywacja: rozwiązywanie równań dowolnego stopnia.

Motywacja: rozwiązywanie układów równań liniowych.

Pojęcia algebry ogólnej:

- 1 grupy, pierścienie i ciała
- 2 ciało liczb zespolonych
- 3 pierścień wielomianów
- 4 ciało funkcji wymiernych

Pojęcia algebry liniowej:

- 1 moduły i przestrzenie wektorowe
- 2 odwzorowania liniowe, macierze, wyznaczniki
- 3 spektrum, wartości i wektory własne
- 4 odwzorowania biliniowe i formy kwadratowe

Relacja równoważności

Relacją w zbiorze X nazywamy podzbiór $R \subseteq X \times X$. Piszemy $x R y$ (x jest w relacji R z y) wtedy i tylko wtedy gdy $(x, y) \in R$.

Definition

Relacja równoważności w zbiorze X to podzbiór $R \subseteq X \times X$ spełniający

- ❶ $\forall x \in X : (x, x) \in R$ (zwrotność)
- ❷ $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (symetryczność)
- ❸ $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (przechodność)

Klasy równoważności

Definition

Klasa równoważności $x \in X$ względem relacji R to

$$[x]_R := \{y \in X \mid (x, y) \in R\}.$$

Relacja równoważności rozcina zbiór X na rozłączne klasy równoważności (warstwy) bo $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R$:

$$X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$$

X

x			
-----	--	--	--

X/R $\overbrace{\hspace{1.5cm}}^{[x]_R}$

Definition

Iloraz zbioru przez relację równoważności to zbiór wszystkich klas równoważności:

$$X/R := \left\{ [x]_R \in 2^X \mid x \in X \right\}.$$

konstruujemy jako zbiory

$$\begin{array}{ccccccc} \emptyset & \{\emptyset\} & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

Dodawanie liczb naturalnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$ definiujemy tak: $m + n$ to jedyny zbiór w $\mathbb{N}$ równoliczny z $(m \times \{\emptyset\}) \cup (n \times \{\{\emptyset\}\})$.

Mnożenie liczb naturalnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{N}$ definiujemy podobnie: $m \cdot n$ to jedyny zbiór w $\mathbb{N}$ równoliczny ze zbiorem $m \times n$.

Liczby całkowite

Definition

Liczby całkowite $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / R_{\mathbb{Z}}$, gdzie

$$R_{\mathbb{Z}} := \left\{ ((m, n), (p, q)) \in \mathbb{N}^4 \mid p + n = m + q \right\}.$$

Dodawanie liczb całkowitych określone jest wzorem

$$[(m, n)] + [(p, q)] := [(m + p, n + q)].$$

Mnożenie liczb całkowitych określone jest wzorem

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] := [(mp + nq, mq + np)].$$

Odwzorowanie $\mathbb{N} \ni n \mapsto [(n, 0)] \in \mathbb{Z}$ jest injekcją zachowującą dodawanie i mnożenie. W przeciwieństwie do liczb naturalnych, każda liczba całkowita ma odwrotność ze względu na dodawanie:

$$-[(m, n)] := [(n, m)].$$

Liczby wymierne

Definition

Liczby wymierne $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})) / R_{\mathbb{Q}}$, gdzie

$$R_{\mathbb{Q}} := \left\{ ((m, n), (p, q)) \in (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))^2 \mid mq = np \right\}.$$

Dodawanie liczb wymiernych określone jest wzorem

$$[(m, n)] + [(p, q)] := [(mq + np, nq)].$$

Mnożenie liczb całkowitych określone jest wzorem

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] := [(mp, nq)].$$

Odwzorowanie $\mathbb{Z} \ni n \mapsto [(n, 1)] \in \mathbb{Q}$ jest injekcją zachowującą dodawanie i mnożenie. W przeciwieństwie do liczb całkowitych, każda niezerowa liczba wymierna ma odwrotność ze względu na mnożenie:

$$\frac{1}{[(p, q)]} := [(q, p)].$$