

## BAZY PRZESTRZENI WEKTOROWYCH

**Piotr M. Hajac**  
**Uniwersytet Warszawski**

Wykład 11, 18.12.2013

*Typeset by Jakub Szczepanik.*

# Istnienie bazy

Tak jak wśród wszystkich pierścieni wyróżniamy bardzo szczególną klasę pierścieni nazywanych ciałami, tak wśród wszystkich modułów wyszczególniamy bardzo ważną klasę modułów nazywanych przestrzeniami wektorowymi.

## Definicja

$R$ -moduł  $M$  nazywamy **przestrzenią wektorową**  $\Leftrightarrow R$  jest ciałem.

Ciała typowo oznaczamy przez  $k$  a przestrzenie wektorowe przez  $V$ .

Podstawową własnością odróżniającą przestrzenie wektorowe od ogólnych modułów jest istnienie bazy.

## Twierdzenie

*Każda przestrzeń wektorowa  $V \neq 0$  nad dowolnym ciałem  $k$  zawsze posiada bazę.*

# Lemat Kuratowskiego-Zorna

**Dowód:** Zauważmy najpierw że  $V \neq 0 \Rightarrow \exists v \in V : v \neq 0$ . Zbiór  $\{v\}$  jest liniowo niezależny bo

$$(\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0) \iff \sim (\alpha \neq 0 \wedge \alpha v = 0),$$

a z założenia że  $k$  jest ciałem mamy

$$(\alpha \neq 0 \wedge \alpha v = 0) \implies 0 = \alpha^{-1}0 = \alpha^{-1}(\alpha v) = (\alpha^{-1}\alpha)v = 1v = v.$$

Zatem zbiór wszystkich zbiorów liniowo niezależnych jest niepusty.

Do tego zbioru zastosujemy Lemat Kuratowskiego-Zorna (równoważny pewnikowi wyboru), który w szczególności stwierdza:

## Lemat

*Niech  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  będzie niepustym zbiorem zbiorów. Jeśli dla każdego podzbioru  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J \subseteq I}$  spełniającego warunek*

$$\forall \beta, \gamma \in J : X_\beta \subseteq X_\gamma \vee X_\gamma \subseteq X_\beta \text{ (całkowite uporządkowanie)}$$

*istnieje  $\alpha \in I : \bigcup_{\beta \in J} X_\beta = X_\alpha$ , to*

$$\exists \alpha_0 \in I : X_{\alpha_0} \subseteq X_\alpha \implies X_{\alpha_0} = X_\alpha.$$

## Koniec dowodu istnienia bazy

Łatwo sprawdzić że zbiór wszystkich zbiorów liniowo niezależnych spełnia założenia lematu. Stąd wnioskujemy że istnieje zbiór liniowo niezależny  $B$  nie zawierający się w żadnym większym zbiorze liniowo niezależnym:

$$(B \subseteq B' \text{ i } B' \text{ jest liniowo niezależny}) \implies B' = B.$$

Korzystając z tego chcemy pokazać że  $\text{span}(B) = V$ . Jest oczywiste że  $B \subseteq \text{span}(B)$ , weźmy więc  $v_0 \notin B$ . Wtedy zbiór  $\{v_0\} \cup B$  jest liniowo zależny. Zatem

$$\exists \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq B, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in k : \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i = 0$$

i  $\exists j \in \{0, \dots, n\} : \alpha_j \neq 0$ . Stąd  $\alpha_0 \neq 0$  bo inaczej, z liniowej niezależności zbioru  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , mamy

$$0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

co przeczy istnieniu  $\alpha_j \neq 0$ . Z założenia że  $k$  jest ciałem dostajemy więc

$$v_0 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0} v_1 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_0} v_n \in \text{span}(B). \quad \blacksquare$$

# Ilość elementów ciała skończonego

## Wniosek

*Ilość elementów każdego ciała skończonego  $\mathbb{F}$  jest postaci  $p^n$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą a  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .*

**Dowód:** Ze skończoności ciała wynika że istnieje najmniejsza liczba  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  taka że  $p \cdot 1 = 0$ . Liczba  $p$  musi być pierwsza bo inaczej, z minimalności  $p$  i braku dzielników zera w ciele, dostajemy sprzeczność:

$$0 = p \cdot 1 = \underbrace{(mm') \cdot 1}_{1 < m, m' < p} = \underbrace{(m \cdot 1)}_{\neq 0} \underbrace{(m' \cdot 1)}_{\neq 0}.$$

Dalej, działanie  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathbb{F} \ni ([n], f) \rightarrow n \cdot f \in \mathbb{F}$  czyni  $\mathbb{F}$  niezerową przestrzenią wektorową nad  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Posiada zatem bazę  $B$  nad  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Baza musi być skończona bo  $\mathbb{F}$  jest skończone. Oznaczmy ilość elementów bazy przez  $n$ . Wtedy z twierdzenia o bazie wnioskujemy że

$$\mathbb{F} \cong \bigoplus_{b \in B} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n.$$

Stąd ilość elementów  $\mathbb{F}$  to  $p^n$ .

## Twierdzenie

*Jeśli  $S$  jest liniowo niezależnym podzbiorem przestrzeni wektorowej  $V$ , to można go uzupełnić do bazy  $V$ .*

**Dowód:** Tym razem stosujemy Lemat Kuratowskiego-Zorna do rodziny wszystkich zbiorów liniowo niezależnych których podzbiorem jest  $S$ . Ta rodzina jest niepusta bo  $S$  do niej należy. Istnieje zatem największy zbiór liniowo niezależny  $B \supseteq S$ . Stąd, jeśli  $x \notin B$ , to  $B \neq \{x\} \cup B \supset B \supseteq S$ . Zatem zbiór  $\{x\} \cup B$  jest liniowo zależny co, identycznie jak w twierdzeniu o istnieniu bazy, implikuje że  $\text{span}(B) = V$ . Mamy zatem bazę zawierającą  $S$ . ■

# Redukcja do bazy

## Twierdzenie

*Jeśli  $V$  jest niezerową przestrzenią wektorową nad ciałem  $k$  i  $\text{span}(S) = V$ , to z  $S$  można wybrać bazę  $V$ .*

**Dowód:** Rozpatrzmy rodzinę wszystkich podzbiorów  $S$  rozpinających  $V$ . Jest ona niepusta bo należy do niej  $S$ . Z Lematu Kuratowskiego-Zorna dla  $\subseteq$  zamienionego na  $\supseteq$  wnioskujemy że  $\exists B \subseteq S$  taki że  $\text{span}(B) = V$  oraz że zachodzi

$$(B' \subseteq B \subseteq S \text{ i } \text{span}(B') = V) \implies B' = B.$$

Wystarczy teraz pokazać że  $B$  jest zbiorem liniowo niezależnym. Przypuśćmy że tak nie jest. Wtedy

$$\exists \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq B, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in k : \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

oraz  $\exists j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j \neq 0$ . Jeśli  $n = 1$ , to  $\alpha_1 \neq 0$  i  $\alpha_1 v_1 = 0$ , skąd  $v_1 = \alpha_1^{-1} \alpha_1 v_1 = 0$ .

## Koniec dowodu o redukcji

Stąd wnioskujemy że  $B \setminus \{0\} \subsetneq B \subseteq S$ , zaś z założenia  $V \neq 0$  otrzymujemy  $\text{span}(B \setminus \{0\}) = \text{span}(B) = V$ , co daje sprzeczność z minimalnością  $B$ .

Założmy teraz że  $n > 1$ . Wtedy  $v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \frac{-\alpha_i}{\alpha_j} v_i$ , skąd

$$\text{span}(B \setminus \{v_j\}) = \text{span}(B) = V.$$

Podobnie jak poprzednio, w połączeniu z  $B \setminus \{v_j\} \subsetneq B \subseteq S$  otrzymujemy sprzeczność z minimalnością  $B$ . ■

Tak więc baza to równocześnie największy zbiór liniowo niezależny i najmniejszy zbiór rozpinający.

# Lemat Steinitza

## Lemat (Steinitza)

*Niech  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Jeśli przestrzeń wektorowa  $V$  posiada bazę  $n$ -elementową  $B$ , to każda inna baza  $V$  też jest  $n$ -elementowa.*

**Dowód:** Pokażemy najpierw że, jeśli zbiór  $S$  posiada więcej niż  $n$  elementów, to jest on liniowo zależny. Niech  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq S$  i  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = 0$ . Każdy wektor  $v_i$  zapiszmy jako  $v_i =: \sum_{j=1}^n \beta_{ij} e_j$ , gdzie  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Wtedy

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_{ij} e_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \beta_{ij} \right) e_j.$$

Zatem z liniowej niezależności  $B$  mamy:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \beta_{ij} = 0.$$

# Koniec dowodu Lematu Steinitza

Jeśli  $\forall i, j : \beta_{ij} = 0$ , to powyższy układ równań ma ewidentnie niezerowe rozwiązanie. Jeśli  $\exists \beta_{kl} \neq 0$ , to

$$\alpha_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{-\beta_{il}}{\beta_{kl}} \alpha_i$$

podstawiamy do pozostałych równań otrzymując układ  $(n - 1)$  równań z  $n$  niewiadomymi. Po  $(n - 1)$  krokach dostaniemy 1 równanie z 2 niewiadomymi, które zawsze ma niezerowe rozwiązanie.

Dlatego istnieje niezerowe rozwiązanie wyjściowego układu równań. Zatem zbiór  $S$  jest liniowo zależny, więc nie jest bazą.

Wreszcie, jeśli zbiór  $S$  byłby bazą mniej niż  $n$ -elementową, to na mocy powyższego rozumowania zbiór  $B$  byłby liniowo zależny, co przeczy temu że jest bazą. ■