

MACIERZE ODWZOROWAŃ LINIOWYCH

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 12, 08.01.2014

Typeset by Jakub Szczepanik.

W celu wykonania obliczeń numerycznych w zagadnieniach fizycznych niezbędne jest podanie jednostek w których mierzone są wielkości fizyczne. Te jednostki są jakby układem odniesienia w którym mierzymy dane wielkości. Bazy modułów pełnią rolę układów odniesienia w których mierzymy odwzorowania liniowe. Pozwalają zamienić odwzorowania liniowe na macierze i wykonać obliczenia numeryczne.

Macierze, wiersze i kolumny

Definicje

Niech I i J będą niepustymi zbiorami a R pierścieniem. **Macierzą** $I \times J$ o współczynnikach w R nazywamy odwzorowanie

$$M : I \times J \rightarrow R.$$

Wartości M nazywamy **elementami macierzowymi** i oznaczamy $M_{ij} := M((i, j))$.

Zbiór wszystkich takich macierzy odznaczamy przez $M_{I \times J}(R)$. Jeśli $I = J$, to piszemy w skrócie $M_I(R)$. Elementy $M_I(R)$ nazywamy **macierzami kwadratowymi**. Jeśli $I = \{1, \dots, n\}$, to używamy oznaczenia $M_n(R) := M_I(R)$. Analogicznie, $M_{kl}(R)$ oznacza $M_{I \times J}(R)$ dla $I = \{1, \dots, k\}$ i $J = \{1, \dots, l\}$.

Definicje

Wierszem i -tym macierzy M nazywamy odwzorowanie $J \ni j \xrightarrow{R_i} M_{ij} \in R$. **Kolumną** j -tą macierzy M nazywamy odwzorowanie $I \ni i \xrightarrow{C_j} M_{ij} \in R$.

Macierz homomorfizmu

Niech V , W i Z będą wolnymi prawymi R -modułami o bazach odpowiednio I , J i K . Niech $f \in \text{Hom}_R(V, W)$ oraz $g \in \text{Hom}_R(W, Z)$. Wtedy $g \circ f \in \text{Hom}_R(V, Z)$.

Definicja

Macierzą odwzorowania liniowego f w bazach I i J nazywamy odwzorowanie

$$J \times I \ni (j, i) \xrightarrow{M_{JI}(f)} f_{ji} \in R,$$

gdzie f_{ji} są jedynymi elementami R spełniającymi równanie

$$f(i) =: \sum_{j \in J} j f_{ji}.$$

Jedyność wynika z jednoznaczności współczynników rozwinięcia w danej bazie.

Przykład

Niech $R := \mathbb{Z}$, $V := \mathbb{Z}^2$, $W := \mathbb{Z}^3$, $I := \{(1, 0), (0, 1)\}$,
 $J = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Rozpatrzmy odwzorowanie liniowe

$$\mathbb{Z}^2 \ni (m, n) \xrightarrow{f} (m + n, m - n, 2m) \in \mathbb{Z}^3.$$

Obliczmy teraz wartości f na elementach bazy dziedziny i rozwińmy w bazie przeciwdziedziny:

$$f((1, 0)) = (1, 1, 2) = (1, 0, 0)1 + (0, 1, 0)1 + (0, 0, 1)2,$$

$$f((0, 1)) = (1, -1, 0) = (1, 0, 0)1 + (0, 1, 0)(-1) + (0, 0, 1)0.$$

Porządkując bazy I i J jak wyżej, otrzymujemy następujący wykres macierzy $M_{JI}(f)$ odwzorowania liniowego f w bazach I i J :

$$j \left\{ \underbrace{(f_{ji})}_i \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{(1, 0) \ (0, 1)} \begin{pmatrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}.$$

Spostrzeżenia

- 1 Wykres odwzorowania definiuje odwzorowanie, więc zazwyczaj “wykresy macierzy” nazywamy “macierzami”.
- 2 Każda kolumna macierzy odwzorowania liniowego ma zawsze skończoną ilość niezerowych wartości bo rozwinięcie w bazie jest zawsze skończone.
- 3 Odwrotnie, dowolna macierz $M : J \times I \rightarrow R$ o tej własności zadaje odwzorowanie liniowe:

$$V \ni v \xrightarrow{f_M} \sum_{i \in I, j \in J} j M_{ji} v_i \in W, \quad \text{gdzie } v =: \sum_{i \in I} i v_i.$$

- 4 Mamy $M_{JI}(f_M) = M$ i $f_{M_{JI}}(f) = f$, a dla dodawań punktowych $M_{JI}(f+g) = M_{JI}(f) + M_{JI}(g)$.
- 5 Macierz odwzorowania liniowego przekształca współczynniki wg wzoru $f(v) = \sum_{j \in J} j w_j \Leftrightarrow$

$$\forall j \in J : w_j = \sum_{i \in I} f_{ji} v_i, \quad \text{gdzie } v =: \sum_{i \in I} i v_i.$$

Definicja

Mnożenie macierzy $M : I \times J \rightarrow R$ i $N : J \times K \rightarrow R$ takich że wszystkie wiersze M lub wszystkie kolumny N mają skończoną ilość niezerowych wartości zdefiniowane jest wzorem:

$$MN : I \times K \ni (i, k) \longmapsto (MN)_{ik} := \sum_{j \in J} M_{ij} N_{jk} \in R .$$

MNOŻENIE MACIERZY JEST DZIECINNIE PROSTE!

Homomorfizm jako mnożenie macierzy

O współczynnikach $v \in V$ możemy myśleć jako o macierzy odwzorowania liniowego

$$R \ni r \longmapsto vr \in V$$

w bazach odpowiednio $\{1\}$ i I : $v_{i1} := v_i$. Zatem współczynniki wektora przy działaniu odwzorowania liniowego przekształcają się przez mnożenie macierzy: $w_{j1} := w_j = \sum_{i \in I} f_{ji} v_{i1}$.

Na przykład, odwzorowanie liniowe

$$\mathbb{Z}^2 \ni (m, n) \longmapsto (m + n, m - n, 2m) \in \mathbb{Z}^3$$

w kanonicznej bazie zapisuje się jako mnożenie macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + n \\ m - n \\ 2m \end{pmatrix}.$$

Macierz złożenia homomorfizmów

Jak wyliczyć $M_{KI}(g \circ f) : K \times I \rightarrow R$ znając $M_{JI}(f) : J \times I \rightarrow R$ i $M_{KJ}(g) : K \times J \rightarrow R$? Także przez mnożenie macierzy:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(i) &= g \left(\sum_{j \in J} j f_{ji} \right) = \sum_{j \in J} g(j) f_{ji} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} k g_{kj} \right) f_{ji} \\ &= \sum_{k \in K} k \left(\sum_{j \in J} g_{kj} f_{ji} \right)\end{aligned}$$

implikuje $(g \circ f)_{ki} = \sum_{j \in J} g_{kj} f_{ji}$. To oznacza że

$$\boxed{M_{KI}(g \circ f) = M_{KJ}(g) M_{JI}(f)}.$$

Przykład

Niech $R := \mathbb{Z}$, E_n baza standardowa $\mathbb{Z}^n$, f jak poprzednio, oraz

$$\mathbb{Z}^3 \ni (p, q, r) \xrightarrow{g} (2p + r, q) \in \mathbb{Z}^2.$$

Wtedy $(g \circ f)((m, n)) = g((m + n, m - n, 2m)) = (4m + 2n, m - n)$.

Z drugiej strony,

$$g((1, 0, 0)) = (2, 0) = (1, 0)2 + (0, 1)0,$$

$$g((0, 1, 0)) = (0, 1) = (1, 0)0 + (0, 1)1,$$

$$g((0, 0, 1)) = (1, 0) = (1, 0)1 + (0, 1)0,$$

skąd $M_{E_2 E_3}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zatem $M_{E_2 E_2}(g \circ f) =$

$$M_{E_2 E_3}(g)M_{E_3 E_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

To się zgadza z $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m + 2n \\ m - n \end{pmatrix}$.