ODWZOROWANIA TRANSPONOWANE I BAZY DUALNE

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 14, 22.01.2014

Typeset by Jakub Szczepanik.

Moduł dualny

Definicja

Niech M będzie prawym modułem nad dowolnym pierścieniem R. Modułem dualnym do modułu M nazywamy lewy moduł wszystkich funkcjonałów liniowych $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$.
Dodawanie i mnożenie przez skalar są punktowe:

$$\forall\ m \in M:\ (\varphi + \varphi')(m) = \varphi(m) + \varphi'(m)$$

$$\forall\ m \in M,\ r \in R:\ (r\varphi)(m) = r\varphi(m).$$

Zauważmy że $r\varphi$ jest nadal prawo R-liniowe bo

$$(r\varphi)(mr') = r\varphi(mr') = r(\varphi(m)r') = (r\varphi(m))r' = (r\varphi)(m)r'\,.$$

Przykład: Niech R będzie dowolnym niezerowym pierścieniem.
Wtedy

$$\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R\right)^* = \prod_{\mathbb{N}} R.$$

Odwzorowanie transponowane

Definicja

Niech $f\colon M \to N$ będzie liniowym odwzorowaniem pomiędzy prawymi R-modułami. Odwzorowaniem transponowanym (dualnym, sprzężonym, dołączonym) nazywamy odwzorowanie liniowe pomiędzy lewymi R-modułami dualnymi:

$$\boxed{f^T\colon N^* \ni \varphi \longmapsto f^T(\varphi) := \varphi \circ f \in M^*}\,.$$

1. Odwzorowanie f^T jest dobrze zdefiniowane bo złożenie odwzorowań liniowych jest liniowe.

2. Jest ono lewo R-liniowe bo $\forall\ r \in R,\ m \in M,\ \varphi \in M^*$:

$$\begin{aligned}(f^T(r\varphi))(m) &= (r\varphi)(f(m)) = r\varphi(f(m)) \\ &= r(f^T(\varphi)(m)) = (rf^T(\varphi))(m)\,.\end{aligned}$$

(Dodawanie sprawdza się podobnie.)

Moduł bidualny

Oczywiście, moduły dualne do lewych modułów są modułami prawymi. Zatem M^{**} jest prawym R-modułem. Istnieje naturalna R-liniowa ewaluacja

$$\boxed{\mathrm{ev}\colon M \ni m \longmapsto \mathrm{ev}_m \in M^{**}\,, \quad \mathrm{ev}_m(\varphi) := \varphi(m)}\,.$$

1. Odwzorowanie ev_m jest lewo R-liniowe bo

$$\mathrm{ev}_m(r\varphi) = (r\varphi)(m) = r\varphi(m) = r(\mathrm{ev}_m(\varphi))\,.$$

(Dodawanie sprawdza się podobnie.)

2. Zaś przyporządkowanie $M \ni m \overset{\mathrm{ev}}{\longmapsto} \mathrm{ev}_m \in M^{**}$ jest prawo R-liniowe bo

$$\mathrm{ev}_{(mr)}(\varphi) = \varphi(mr) = \varphi(m)r = \mathrm{ev}_m(\varphi)r = (\mathrm{ev}_m\, r)(\varphi)\,.$$

(Znowu dodawanie sprawdza się podobnie.)

Naturalność ewaluacji

Przykład: Moduł $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* = 0$ bo brak dzielników zera w $\mathbb{Z}$ daje

$$0 = \varphi(2) = 2\,\varphi(1) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(1) = 0\,.$$

Zatem $0 \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{ev}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{**} = 0$ nie może być injekcją.

Ewaluacja jest naturalna w następującym sensie. Jeśli $M \overset{f}{\longmapsto} N$ jest liniowym odwzorowaniem prawych R-modułów, to otrzymujemy przemienny diagram odwzorowań prawo R-liniowych:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & N \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ M^{**} \arrow[r, "f^{TT}"] & N^{**}. \end{tikzcd}$$

(Korzystamy tu z faktu że odwzorowanie transponowane do odwzorowania lewo liniowego jest prawo liniowe.)

Istotnie,

$$(f^{TT}(\mathrm{ev}_m))(\varphi) = \mathrm{ev}_m(f^T(\varphi)) = (f^T(\varphi))(m) = \varphi(f(m)) = \mathrm{ev}_{f(m)}(\varphi)\,.$$

Twierdzenie o injektywności

Twierdzenie

Jeśli M jest modułem wolnym, to ewaluacja $M \overset{\mathrm{ev}}{\longmapsto} M^{**}$ jest injekcją.

<u>Dowód:</u> Przypomnijmy że

$$\mathrm{ev}_m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ \varphi \in M^* :\ 0 = \mathrm{ev}_m(\varphi) = \varphi(m)\,.$$

Niech B będzie bazą M. Wtedy $m = \sum_{b \in B} b\, r_b$, oraz

$$m \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\ b_0 \in B : r_{b_0} \neq 0\,.$$

Zdefiniujmy $\varphi_0 \in M^*$ przez $\varphi_0(b_0) = 1$ i $\varphi_0(b) = 0$ dla $b \neq b_0$.
Wtedy

$$\mathrm{ev}_m(\varphi_0) = \varphi_0(m) = \varphi_0 \left(\sum_{b \in B} b\, r_b \right) = \sum_{b \in B} \varphi_0(b) r_b = r_{b_0} \neq 0\,.$$

Przez zaprzeczenie implikacji, udowodniliśmy w ten sposób że $\mathrm{ev}_m = 0 \Rightarrow m = 0$. Oznacza to że $\ker(\mathrm{ev}) = 0$. Zatem ev jest injekcją. ∎

Baza dualna

Definicja

Niech M będzie wolnym prawym R-modułem ze skończoną bazą B. Bazą dualną do bazy $B := \{e_1, ..., e_m\}$ nazywamy zbiór $B^* := \{\, e^i \in M^* \mid i \in \{1, ..., m\}\,\}$, gdzie

$$\forall\ i, j \in \{1, ..., m\} :\ e^i(e_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

1. Liniowa niezależność B^*: $\forall\ j \in \{1, ..., m\}$:
$$\sum_{i=1}^{m} r_i e^i = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \left(\sum_{i=1}^{m} r_i e^i\right)(e_j) = \sum_{i=1}^{m} r_i(e^i(e_j)) = r_j\,.$$

2. Rozpinanie: $\forall\ \varphi \in M^* :\ \varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi(e_i)e^i$. Istotnie,
$$\forall\ j \in \{1, ..., m\} :\ \left(\sum_{i=1}^{m} \varphi(e_i)e^i\right)(e_j) = \varphi(e_j)\,.$$

Wniosek

Niech k będzie niezerowym pierścieniem przemiennym. Wtedy

$$\boxed{\dim_k M < \infty \quad \Longrightarrow \quad \dim_k M^* = \dim_k M}\,.$$

Wniosek

Jeśli M jest modułem wolnym ze skończoną bazą, to $\mathrm{ev} : M \to M^{**}$ jest izomorfizmem.

Dowód: Jeśli $\{e_1, ..., e_m\}$ jest bazą M, to $\{\mathrm{ev}_{e_i}\}_1^m$ jest bazą dualną do bazy dualnej $\{e^i\}_1^m$. ∎

Załóżmy teraz że B jest nieskończoną bazą M. Jak w przypadku skończonym możemy zdefiniować zbiór B^* i pokazać że jest on liniowo niezależny. Ale nie jest juże prawdą że B^* rozpina M^*. Zaiste, niech $\varphi_1 \in M^*$ będzie funkcjonałem zadanym przez $\forall\ b \in B : \ \varphi_1(b) = 1 \neq 0$. Jeżeli $F \subset B$ jest skończonym podzbiorem takim że $\varphi_1 = \sum_{b\in F} r_b\, b^*$, to dla $b_1 \notin F$ mamy

$$1 = \varphi_1(b_1) = \textstyle\sum_{b\in F} r_b\, b^*(b_1) = 0\,.$$

Macierz transponowana

Definicja

Niech R będzie dowolnym pierścieniem. Macierzą transponowaną do macierzy $A\colon I \times J \ni (i,j) \mapsto A_{ij} \in R$ nazywamy macierz $A^T\colon J \times I \ni (j,i) \mapsto A_{ij} \in R$. Mamy $\forall\ i \in I,\ j \in J:\ A^T_{ji} := A_{ij}$.

Twierdzenie

Niech $B := \{b_1, ..., b_m\}$ *i* $C := \{c_1, ..., c_n\}$ *będą bazami odpowiednio* M *i* N, *oraz niech* $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. *Wtedy*

$$\boxed{M_{B^*C^*}(f^T) = M_{CB}(f)^T \circ \ell},$$

gdzie $\ell\colon B^* \times C^* \ni (b^i, c^j) \mapsto (b_i, c_j) \in B \times C$.

Dowód: Przypomnijmy że $f^T(c^j) =: \sum_{i=1}^m f^T_{ij} b^i$. Najpierw obliczmy $(f^T(c^j))(b_l) = c^j\left(f(b_l)\right) = c^j\left(\sum_{j'=1}^n c_{j'} f_{j'l}\right) = f_{jl} = M_{CB}(f)(c_j, b_l) = \left(M_{CB}(f)^T \circ \ell\right)(b^l, c^j)$. Z drugiej strony, $\left(\sum_{i=1}^m f^T_{ij} b^i\right)(b_l) = f^T_{lj} = \left(M_{B^*C^*}(f^T)\right)(b^l, c^j)$. ∎

Twierdzenie Fredholma

Twierdzenie (Fredholm)

Niech k *będzie ciałem,* $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $\dim_k V$, $\dim_k W < \infty$. *Wtedy* $\dim_k \mathrm{Im}(f) = \dim_k \mathrm{Im}(f^T)$ *oraz*

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ w \in W \;\middle|\; \forall\ \varphi \in \mathrm{Ker}(f^T) :\ \varphi(w) = 0 \right\} =: \mathrm{Ker}(f^T)^0 .$$

<u>**Dowód:**</u> Jest jasne że $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^T)^0$. Z drugiej strony, $\dim_k \mathrm{Ker}(f^T)^0 = \dim_k W^* - \dim_k \mathrm{Ker}(f^T)$ bo bazę $\mathrm{Ker}(f^T)$ możemy uzupełnić do bazy W^* i wziąć jej bazę dualną. Zatem

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{Im}(f) &\leqslant \dim_k \mathrm{Ker}(f^T)^0 \\ &= \dim_k W^* - \Big(\dim_k W^* - \dim_k \mathrm{Im}(f^T)\Big) = \dim_k \mathrm{Im}(f^T). \end{aligned}$$

Utożsamiając f^{TT} z f dostajemy $\dim_k \mathrm{Im}(f^T) \leqslant \dim_k \mathrm{Im}(f)$. Stąd $\dim_k \mathrm{Im}(f) = \dim_k \mathrm{Im}(f^T) = \dim_k \mathrm{Ker}(f^T)^0$. W połączeniu z $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^T)^0$ implikuje to że $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^T)^0$. ∎