

ŚLADY I WYZNACZNIKI

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 15, 21.02.2014

Typeset by Jakub Szczepanik.

Definicja

Niech k będzie niezerowym pierścieniem przemiennym.
Śladem nazywamy odwzorowanie

$$M_n(k) \ni A \mapsto \operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii} \in k, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Twierdzenie

$\forall A, B \in M_n(k) :$

- ❶ $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$
- ❷ $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$

Dowód:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ji} A_{ij} = \\ &\text{tr}(BA) \\ \textcircled{2} \quad \text{tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^n (A_{ii} + B_{ii}) = \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} = \\ &\text{tr}(A) + \text{tr}(B). \end{aligned}$$



Wniosek

Nie istnieje skończeniowymiarowa nad ciałem o charakterystyce zerowej realizacja reguły komutacji $[X, P] = I$ mechaniki kwantowej.

Dowód: Wyrażenie $[X, P] := XP - PX$ nazywane jest komutatorem. Podstawową cechą śladu jest anihilowanie wszelkich komutatorów:

$$\operatorname{tr}([X, P]) = \operatorname{tr}(XP) - \operatorname{tr}(PX) = \operatorname{tr}(PX) - \operatorname{tr}(PX) = 0.$$

Z drugiej strony, $\operatorname{tr}(I) = \sum_{i=1}^n 1 = n \neq 0$ z zerowości charakterystyki ciała. ■

Definicja

Niech V będzie skończeniowym wymiarowym wolnym modułem nad niezerowy przemiennym pierścieniem k . Śladem endomorfizmu $f \in \text{End}(V)$ nazywamy $\text{tr}(f) := \text{tr}(M_{BB}(f))$, gdzie B jest dowolną bazą V .

Definicja nie zależy od wyboru bazy bo

$$\begin{aligned}\text{tr}(M_{CC}(f)) &= \text{tr}(M_{CB}(\text{id})M_{BB}(f)M_{BC}(\text{id})) = \\ \text{tr}(M_{BC}(\text{id})M_{BC}(\text{id})M_{BB}(f)) &= \text{tr}(M_{BB}(\text{id})M_{BB}(f)) = \\ \text{tr}(M_{BB}(f)).\end{aligned}$$

Ponadto natychmiast wnioskujemy, że

$$\forall f, g \in \text{End}(V) : \text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f) \text{ i } \text{tr}(f + g) = \text{tr}(f) + \text{tr}(g).$$

Definicja

Wyznacznikiem nazywamy odwzorowanie

$$M_n(k) \ni A \xrightarrow{\det} \det(A) \in k, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}.$$

Własności:

- ❶ $\det(I) = \operatorname{sgn}(\operatorname{id}) \prod_{i=1}^n \delta_{ii} = 1$
- ❷ Zapisując macierze jako wiersze kolumn rozumianych jako elementy modułu wolnego k^n , otrzymujemy:
 - A $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \det(A_1, \dots, A_i + B_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, B_i, \dots, A_n)$
 - B $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in k : \det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$
 - C $\forall i < j : \det(A_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te miejsce}}}{A_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-e miejsce}}}{A_i}, \dots, A_n) = 0$

Dowód A:

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_i + B_i, \dots, A_n) &= \\ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma^{-1}(i)\}} A_{m\sigma(m)} \left(A_{\sigma^{-1}(i)i} + B_{\sigma^{-1}(i)i} \right) &= \\ \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, B_i, \dots, A_n) \end{aligned}$$



Dowód B:

Analogiczny do A.

Dowód C:

$$\begin{aligned}
 & \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{m=1}^n A_{m\sigma^{-1}(m)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m)m} \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m)m} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m)m} \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m)m} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau_{ij}) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(\tau_{ij}(m))m} \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{m=1}^n A_{\sigma(m)m} - \prod_{m=1}^n A_{\sigma(\tau_{ij}(m))m} \right) \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} A_{\sigma(m)m} \left(A_{\sigma(i)i} A_{\sigma(j)j} - A_{\sigma(j)i} A_{\sigma(i)j} \right) = 0 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Twierdzenie

Jeśli $F \in \text{Map}(M_n(k), k)$ posiada 4 powyższe własności, to $F = \det$.

Dowód: Niech $\{e_i\}_{i=1}^n$ będzie bazą standardową k^n . Wtedy

$$\begin{aligned}
 F(A) &= F(A_1, \dots, A_n) = F\left(\sum_{i_1=1}^n e_{i_1} A_{i_1 1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n e_{i_n} A_{i_n n}\right) \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n F(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) A_{i_1 1}, \dots, A_{i_n n} = \sum_{\sigma \in S_n} F(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) A_{\sigma(1)1} \dots \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) F(e_1, \dots, e_n) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m)m} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m)m} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{m\sigma(m)} = \det A.
 \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z implikacji

$$0 = F(A_1, \dots, A_1, A_2, \dots, A_2, \dots, A_n, \dots, A_n) = F(A_1, \dots, A_n, \dots, A_n, 0, \dots, 0) = 0$$

Twierdzenie

$$\forall A, B \in M_n(k) : \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Dowód: Zauważmy, że odwzorowanie $M_n(k) \ni B \mapsto \det(AB) \in k$ spełnia warunki A, B i C bo $\det(AB) = \det(AB_1, \dots, AB_n)$, gdzie $B = (B_1, \dots, B_n)$. Zatem rozumując jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia otrzymujemy $\det(AB) = \det(Ae_1, \dots, Ae_n) \det(B) = \det(A(e_1, \dots, e_n)) \det(B) = \det(A) \det(B)$. ■

Definicja

Wyznacznikiem endomorfizmu $f \in \text{End}(V)$ nazywamy $\det(f) := \det(M_{BB}(f))$, gdzie B jest dowolną bazą V .

Korzystając z powyższego twierdzenia widzimy, że definicja nie zależy od wyboru bazy:

$$\begin{aligned} \det(M_{CC}(f)) &= \det(M_{CB}(\text{id})M_{BB}(f)M_{BC}(\text{id})) = \\ &= \det(M_{BC}(\text{id})M_{CB}(\text{id})M_{BB}(f)) = \det(M_{BB}(f)). \end{aligned}$$