ODWRACANIE MACIERZY I INJEKTYWNOŚĆ ENDOMORFIZMÓW

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 16, 28.02.2014

Typeset by Jakub Szczepanik.

tytuł slajdu

Odwracanie macierzy to podawanie rozwiązań układów równań liniowych. Ze wzoru $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ wnioskujemy natychmiast, że wyznacznik macierzy odwracalnej musi być odwracalny:
$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A)$.
Okazuje się, że przeciwna implikacja też jest prawdziwa. Przy pomocy $\det(A)^{-1}$ możemy napisać jawny wzór na A^{-1}. W tym celu zdefiniujmy najpierw:

1. Dopełnieniem algebraicznym elementu A_{ij} macierzy $A \in M_n(k)$ nazywamy wyznacznik macierzy $(n-1) \times (n-1)$ otrzymanej przez skreślenie i-tego wiersza i j-ej konlumny pomnożony przez $(-1)^{i+j}$.

2. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz A^t zdefiniowaną przez $A^t_{ij} = A_{ji}$, $\forall\ i, j \in \{1, ..., n\}$. Zauważmy, że definicja A^t nie potrzebuje żadnych warunków na macierz A.

tytuł slajdu

Rozwinięcie Laplace'a

$\forall\ A \in M_n(k)$, $i \in \{1, ..., n\} : \det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\tilde{A}_{ji}$, gdzie $\tilde{A}_{ji}$ to dopełnienie algebraiczne (cofactor) A_{ji}.

Dowód:

$$\det(A) = \det(A_1, ..., A_n) = \det(A_1, ..., \sum_{j=1}^{n} e_j A_{ji}, ..., A_n)$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \det(e_j, A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n)$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \det(e_j, A_1 - e_j A_{j1}, \overset{\overset{i}{\vee}}{...}, An - e_j A_{jn})$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} (-1)^{j-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & A & \overset{j}{\vee} & \overset{i}{\vee} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ji} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & A & \overset{j}{\vee} & \overset{i}{\vee} \end{pmatrix}_{k\sigma(k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ji} (-1)^{i+j} \sum_{\chi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\chi) \prod_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} A & \overset{j}{\vee} & \overset{i}{\vee} \end{pmatrix}_{k\chi(k)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \tilde{A}_{ji}. \qquad \blacksquare$$

tytuł slajdu

Wniosek (Rozwinięcie Laplace'a względem wiersza)

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \det(A^t) &= \sum_{j=1}^{k} A^t_{ji}(-1)^{j+i} \det\left(A^t \quad \overset{j}{\vee} \quad \overset{i}{\vee}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(-1)^{i+j} \det\left(\left(A \quad \overset{j}{\vee} \quad \overset{i}{\vee}\right)^t\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(-1)^{i+j} \det\left(A \quad \overset{j}{\vee} \quad \overset{i}{\vee}\right) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\tilde{A}_{ij}.
\end{aligned}
$$

Twierdzenie

$$
\exists \ \det(A)^{-1} \Rightarrow A^{-1} := \frac{\tilde{A}^t}{\det(A)}
$$

tytuł slajdu

Dowód: Z dowodu rozwinięcia Laplace'a mamy
$\tilde{A}_{ki} = \det(A_1, ..., A_{i-1}, e_k, A_{i+1}, ..., A_n)$.
Podstawiając ten wzór otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(A^{-1}A\right)_{ij} &= \det(A)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\tilde{A}^t_{ik}A_{kj} = \det(A)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\tilde{A}_{ki}A_{kj} \\ &= \det(A)^{-1}\det(A_1, ..., A_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} e_k A_{kj}, A_{i+1}, ..., A_n) \\ &= \det(A)^{-1}\det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, .., A_n) = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Zatem $A^{-1}A = I$. Ponieważ $\det(A^t) = \det(A)$, mamy też
$(A^t)^{-1}A^t = I$. Stąd $A\left((A^t)^{-1}\right)^t = I$. Wreszcie
$A^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}A\left((A^t)^{-1}\right)^t = \left((A^t)^{-1}\right)^t$. ∎

tytuł slajdu

Przykład

$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix}$. Zaiste,

$\frac{1}{ad-bc} \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix} \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = \frac{1}{ad-bc} \left(\begin{array}{c|c} da-bc & db-bd \\ \hline -ca+ac & -cb+ad \end{array} \right) = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ oraz

$\frac{1}{ad-bc} \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix} = \frac{1}{ad-bc} \left(\begin{array}{c|c} ad-bc & -ab+ba \\ \hline cd-dc & -cb+da \end{array} \right) = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$.

Uwaga: Wyznacznik jest homomorfizmem z grupy $\mathrm{Aut}(V)$ w grupę wszystkich odwracalnych elementów pierścienia k. Jeśli k jest ciałem, oznacza to grupę $k \setminus \{0\}$.

Przykład

Odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \overset{j}{\mapsto} \begin{matrix} \mathrm{Re}\, z & \mathrm{Im}\, z \\ -\mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{matrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest homomorfizmem pierścieni takim, że $\forall\ z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{\det(j(z))}$. Podpierścień $\mathbb{H} := \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 \\ -\frac{1}{z_2} & \bar{z}_1 \end{matrix} \in M_2(\mathbb{C}) \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$ jest nieprzemiennym ciałem kwaternionów. Tu też $|h| = \sqrt{\det(h)}$, $\forall\ h \in \mathbb{H}$.

Teraz naszym celem jest detekcja dalszych własności endomorfizmów przy pomocy wyznaczników.

tytuł slajdu

Twierdzenie

Niech $\dim_k V < \infty$ *i* $f \in \mathrm{End}(V)$. *Jeśli* f *jest surjekcją, to jest bijekcją.*

Dowód: Z surjektywności f i wolności V wynika istnienie $\tilde{f} \in \mathrm{End}(V)$, takiego że $f \circ \tilde{f} = \mathrm{id}$. Stąd $\det(f)\det(\tilde{f}) = 1$. Pamiętając o izomorfizmie pierścieni $\mathrm{End}(V) \cong M_{\dim_k V}(k)$, z poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że f jest bijekcją.

Twierdzenie

Niech $\dim_k V = n < \infty$ *i* $f \in \mathrm{End}(V)$. $\mathrm{Ker}\, f = 0 \Leftrightarrow \det(f)$ *nie jest dzielnikiem zera ani zerem* $(\lambda \det(f) = 0 \Rightarrow \lambda = 0)$.

Dowód: $\mathrm{Ker}\, f = 0 \Leftrightarrow f(B)$ jest zbiorem liniowo niezależnym, gdzie B jest bazą V. Zaiste, $f\left(\sum\limits_{b\in B} \alpha_b b\right) = \sum\limits_{b\in B} \alpha_B f(b)$ daje tę równoważność.
Liniowa niezależność $f(B)$ jest z kolei równoważna liniowej niezależności kolumn macierzy $M_{BB}(f)$. Dowrawdy, wynika to z równania $f(c) = \sum\limits_{b\in B} bF_{bc}$ na współczynniki macierzy $M_{BB}(f) =: F$ i izomorfizmu $V \cong k^n$ zadanego przez bazę B. Jeśli kolumny F są liniowo zależne, to $\exists\ i \in \{1, ..., n\}$ i $\lambda_i \neq 0 : \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j F_j = 0$. Wtedy $0 = \det(F_1, ..., F_{i-1}, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j F_j, F_{i+1}, ..., F_n) = \lambda_i \det(F)$, czyli $\det(F)$ jest dzielnikiem zera lub zerem. Odwrotna implikacja jest trudniejsza, ale można ją udowodnić przez indukcję. ∎

tytuł slajdu

Przykład

Macierz $\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$ rozpatrywana nad:

1. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ ma niezerowe jądro $\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$,
2. $\mathbb{Z}$ ma zerowe jądro $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} m-n \\ m+n \end{smallmatrix} = 0 \Rightarrow m = n = 0\right)$, ale nie jest odwracalna bo $\det \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} = z$ nie jest odwracalny w $\mathbb{Z}$;
3. $\mathbb{Q}$ jest odwracalna bo $\left(\det \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.