ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 17, 07.03.2014

Typeset by Jakub Szczepanik.

tytuł slajdu

Niech k będzie niezerowym pierścieniem przemiennym. Rozwiązanie układu m-równań liniowych z n-niewiadomymi

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + ... + A_{1n}x_n = & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_{m1}x_1 + ... + A_{mn}x_n = & y_m, \end{cases}$$

gdzie wszystkie elementy równań należą do k, równoważne jest rozwiązaniu równania

$$k^n \xrightarrow{a} k^m, \quad a(x) = y,$$

gdzie

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

a jest odwzorowaniem liniowym, którego elementy macierzowe w bazach kanonicznych to $A_{ij}, \ {}_{\substack{i\in\{1,...,n\}, \\ j\in\{1,...,n\}}}$.

tytuł slajdu

Przypomnijmy, że dla dowolneo odwzorowania liniowego f pomiędzy dowolnymi wolnymi prawymi R-modułami o bazach odpowiednio B i C, elementy macierzowe f względem B i C są zdefiniowane przez równania

$$f(b) =: \sum_{c \in C} c F_{cb}, \quad b \in B.$$

Elementy macierzowe definiują macierz odwzorowania liniowego względem baz B i C:

$$C \times B \ni (c, b) \stackrel{F}{\longmapsto} F_{cb} \in R.$$

Z drugiej strony, ponieważ do definicji odwzorowania liniowego z modułu wolnego potrzeba i wystarcza zadać je na wszystkich elementach jakiejś jego bazy, każde odwzorowanie $C \times B \xrightarrow{G} R$ o własności $\forall\ b \in B\, \exists$ skończony $I_b \subseteq C : G_{cb} \neq 0 \Leftrightarrow c \in I_b$ zadaje odwzorowanie liniowe $M \xrightarrow{g} N$. Wzorami $g(b) := \sum\limits_{c \in C} cG_{cb}$, $b \in B$.

Przyporządkowania $f \xmapsto{F}$ i $G \xmapsto{g}$ (w tych samych bazach) są do siebie wzajemnie odwrotne.
Rozważając równanie liniowe $a(x) = y$ chcemy odpowiedzieć na 2 podstawowe pytania:

1. Czy $\exists\ x \in k^n : a(x) = y$?
2. Czy $\exists\, !x \in k^n : a(x) = y$?

Pozytywna odpowiedź na 1 $\forall\ y \in k^m$ jest równoważna surjektywności a. Pozytywna odpowiedź na 2 dla chociażby jednego $y_0 \in k^m$ jest równoważna injektywności $a : \exists\, !x_0 \in k^n : a(x_0) = y_0$ i
$a(x) = a(x') \Rightarrow a(x_0) = y_0 + a(x) - a(x') \Leftrightarrow a(x_0 + x' - x) = y_0 \Rightarrow x_0 + x' - x = x_0 \Leftrightarrow x = x'$. (Injektywność a trywialnie

tytuł slajdu

Załóżmy że $m = n$ oraz że $A = (A_1, ..., A_n)$ jest macierzą odwzorowania liniowego a. Wtedy $\det(A_1, ..., A_{i-1}, y, A_{i+1}, ..., A_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n) = x_i \det(A)$.
Udowodniliśmy w ten sposób wzory Cramer'a:

$$\forall \ i \in \{1, ..., n\} : x_i \det(A) = \det(A_1, ..., \overset{\overset{i}{\vee}}{y}, ..., A_n)$$

Z drugiej strony, jeśli założymy prawdziwość wzorów Cramer'a, to

$$x_i \det(A) = \sum_{j=1}^{n} \det(A_1, ..., \overset{\overset{i}{\vee}}{e_j}, ..., a_n) y_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ji} y_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}^t_{ij} y_j,$$

czyli $\det(A)x = \tilde{A}^t y$. Mnożąc obustronnie przez A dostajemy $\det(A)Ax = A\tilde{A}^t y \Leftrightarrow \det(A)(Ax - y) = 0$. Pokazaliśmy więc:

tytuł slajdu

Twierdzenie

Jeśli $\det(A)$ *nie jest zerem ani dzielnikiem zera, to wzory Cramer'a są równoważne wkładowi równań liniowych*

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + ... + A_{1n}x_n = & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_{m1}x_1 + ... + A_{mn}x_n = & y_m. \end{cases}$$

Wniosek

Jeśli a *jest surjekcją, to*

$$\forall \ i \in \{1, ..., n\} : x_i = \det(A)^{-1} \det(A_1, ..., \overset{\overset{i}{\vee}}{y}, ..., A_n).$$

tytuł slajdu

Dowód: Surjektywność a implikuje odwracalność wyznacznika. ■

Załóżmy teraz, że k jest ciałem, ale porzućmy założenie $m = n$. Teraz możemy zdefiniować "miarę surjektywności" owzorowania liniowego $k^n \xrightarrow{a} k^m$.

Definicja

Rzędem odwzorowania liniowego a nazywamy wymiar obrazu a:

$$\mathrm{rank}(a) := \dim(\mathrm{Im}\, a).$$

Zatem a jest surjekcją $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(a) = m$. Doprawdy, $\dim(\mathrm{Im}\, a) = m \Leftrightarrow \exists$ m-elentowa baza $\mathrm{Im}\, a$. Taka baza jest zbiorem liniowo niezaleznym w k^m. Jeśli nie byłaby bazą k^m, to dałoby się ją uzupełnić do bazy k^m. Ale wtedy baza k^m miałaby więcej niż m elementów, co przeczy Lematowi Steinitz'a. Dlatego baza Ima musi być bazą k^m, skąd $\mathrm{Im}\, a = k^m$.

Twierdzenie (Kronecker-Capelli)

Równanie $a(x) = y$ *ma rozwiązanie*
$\Leftrightarrow \operatorname{rank} a = \dim(\operatorname{span}\{A_1, ..., A_n, y\})$.

Dowód: Po pierwsze, $\operatorname{rank} a = \dim(\operatorname{span}\{A_1, ..., A_n\})$, co udowadnia "$\Rightarrow$". Odwrotnie, argumentując Lematem Steinitz'a, otrzymujemy $\dim(\operatorname{span}\{A_1, ..., A_n\}) = \dim(\operatorname{span}\{A_1, ..., A_n, y\}) \Rightarrow \operatorname{span} A_1, ..., A_n = \operatorname{span}\{A_1, ..., A_n, y\} \Rightarrow y \in \operatorname{span}\{A_1, ..., A_n\} = \operatorname{Im}(a)$. ■

tytuł slajdu

Definicja

Rzędem skończonej macierzy $M = (M_1, ..., M_n)$ nazywamy $\dim(\operatorname{span}\{M_1, ..., M_n\})$.

tytuł slajdu