CIAŁO LICZB ZESPOLONYCH

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 4, 23.10.2013

Typeset by Jakub Szczepanik.

Definicja liczb zespolonych

Czy można nadać sens liczbie $\sqrt{-1}$? Otóż tak:

Definition

Ciało liczb zespolonych to $(\mathbb{R}^2, +, (0,0), \cdot, (1,0))$, gdzie $\forall\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$:

1. $(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$,
2. $\boxed{(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)}$.

Ciało liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$.

Przemienność mnożenia jest oczywista, łączność i rozdzielność względem dodawania łatwa do sprawdzenia, a wzór na odwrotność niezerowej liczby zespolonej pokażemy potem. Zauważmy teraz że $(a,0) + (c,0) = (a+c, 0)$ i $(a,0) \cdot (c,0) = (ac, 0)$, więc odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (x,0) \in \mathbb{C}$ jest homomorfizmem ciał.

Zauważmy też że $(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$. Tradycyjnie

$$i := (0,1), \quad (a,b) = a + ib.$$

Operacje na liczbach zespolonych

Definitions

Sprzężenie zespolone to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni a + ib \longmapsto \boxed{\overline{a + ib} := a - ib} \in \mathbb{C}.$$

Moduł (wartość bezwzględna) to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni a + ib \longmapsto \boxed{|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Część rzeczywista to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni a + ib \longmapsto \boxed{\mathrm{Re}(a + ib) := a} \in \mathbb{R}.$$

Część urojona to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni a + ib \longmapsto \boxed{\mathrm{Im}(a + ib) := b} \in \mathbb{R}.$$

Liczbę i nazywamy liczbą urojoną.

Elementarne własności liczb zespolonych

1. $\forall\, z \in \mathbb{C}: \ \overline{\overline{z}} = z$ (inwolutywność),
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad |\overline{z}| = |z|,$$
$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

2. Sprzężenie zespolone jest automorfizmem ciała liczb zespolonych: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2.$$
Pierwsza równość jest oczywista, a drugą sprawdzamy tak:
$$(\overline{a+ib})(\overline{c+id}) = (a-ib)(c-id) = ac + i^2 bd - i(bc+ad)$$
$$= ac - bd - i(bc+ad) = \overline{(a+ib)(c+id)}.$$

3. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Istotnie,
$$|z_1 z_2| = \sqrt{|z_1 z_2|^2} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}}$$
$$= \sqrt{|z_1|^2}\sqrt{|z_2|^2} = |z_1||z_2|.$$

Nierówność trójkąta

Theorem (Nierówność trójkąta)

$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$

Dowód: Zauważmy najpierw że dzięki nieujemności wartości bezwględnej $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$.
Z drugiej strony, z $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$ wnioskujemy że

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 =$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re} z_1\overline{z}_2 \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z}_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 . \quad \square$$

Corollary

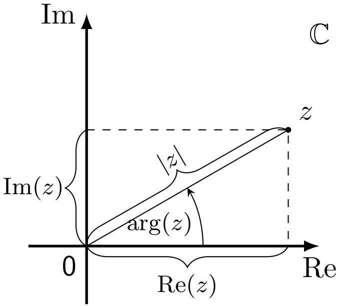
$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ \big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|.$

Dowód: Z nierówność trójkąta otrzymujemy

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|,$$
$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_1|.$$

Stąd $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$ oraz $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|$. $\square$

Postać trygonometryczna liczb zespolonych



$$\cos(\arg(z)) := \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{z + \overline{z}}{2\sqrt{z\overline{z}}}$$

$$\sin(\arg(z)) := \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{z - \overline{z}}{2i\sqrt{z\overline{z}}}$$

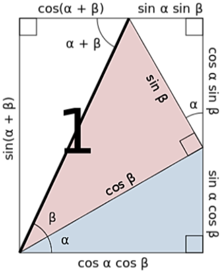
$$\forall\ z \neq 0\ \exists!\ \arg(z)$$

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \arg(z) := \begin{cases} \arccos \frac{z+\overline{z}}{2\sqrt{z\overline{z}}} & \text{dla } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{z+\overline{z}}{2\sqrt{z\overline{z}}} & \text{dla } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases} \in [0, 2\pi[$$

Pamiętając że $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, otrzymujemy

$$\boxed{z = |z|\Big(\cos\left(\arg(z)\right) + i \sin\left(\arg(z)\right)\Big)}\ .$$

Wzór de Moivre'a



W celu zbadania zachowania sie funkcji arg względem mnożenia, korzystając z tożsamości trygonometrycznych, policzmy $z_1 z_2 =$

$$= |z_1 z_2| \Big(\cos\left(\arg(z_1)\right) + i \sin\left(\arg(z_1)\right) \Big) \Big(\cos\left(\arg(z_2)\right) + i \sin\left(\arg(z_2)\right) \Big)$$

$$= |z_1 z_2| \Big(\cos\left(\arg(z_1) + \arg(z_2)\right) + i \sin\left(\arg(z_1) + \arg(z_2)\right) \Big).$$

Wnioskujemy stąd że $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) \underset{\mathrm{mod}\, 2\pi}{+} \arg(z_2)}\,.$$

Stąd zaś wnioskujemy (przez indukcję) wzór de Moivre'a:

$$z^n = |z|^n \Big(\cos\left(n \arg(z)\right) + i \sin\left(n \arg(z)\right) \Big).$$

Wzór Eulera

Wprowadźmy oznaczenie

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Wiedząc z analizy że szereg

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

jest zbieżny, i pamiętając o rozwinięciu sinusa i cosinusa w szereg Taylora, powyższe oznaczenie staje się słynnym wzorem Eulera:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{aligned}$$

Odwrotność niezerowej liczby zespolonej

Po przedstawieniu liczb zespolonych w postaci biegunowej $z = |z|e^{i\arg(z)}$, mnożenie ma wyjątkowo prostą postać:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\arg(z_1)+\arg(z_2))}.$$

Teraz od razu widać że

$$\begin{aligned} z^{-1} &= |z|^{-1}e^{-i\arg z} \\ (a+ib)^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Pierwiastki z 1

Theorem

$\forall\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: *istnieje dokładnie n różnych liczb zespolonych takich że $z_k^n = z$. Liczby te dane są wzorem*

$$z_k := \sqrt[n]{|z|}\ e^{i\frac{\arg(z)+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\ e^{i\frac{\arg(z)}{n}} e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

<u>**Dowód:**</u> Ze wzoru de Moivre'a,

$$w^n = z \Rightarrow \left(|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ i } \arg(w) \underset{\bmod 2\pi}{=} \frac{\arg(z) + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z} \right).$$

Pozostaje zauważyć że $\arg(w) \neq \arg(w') \Rightarrow w \neq w'$, oraz że równanie na $\arg(w)$ ma dokładnie n różnych rozwiązań dla $k \in \{0, \dots, n-1\}$. $\square$

Liczby $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, nazywamy n-tymi pierwiastkami z 1.