

OD WZORÓW CARDANO DO ZASADNICZEGO TWIERDZENIA ALGEBRY

Piotr M. Hajac
Uniwersytet Warszawski

Wykład 5, 30.10.2013

Typeset by Jakub Szczepanik.

Pytania o rozwiązania

- ❶ Jak rozwiązać w $\mathbb{C}$ równania

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 ,$$

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 ?$$

- ❷ Dlaczego **nie można** podać ogólnego rozwiązania równania

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

dla $n \geq 5$?

- ❸ Czy **zawsze istnieje** zespolone rozwiązanie równania

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0 ?$$

Standardowe uproszczenie

W równaniu $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ możemy założyć bez straty ogólności że $a_{n-1} = 0$, bo człon $a_{n-1}z^{n-1}$ zawsze można wyeliminować przez podstawienie $w := z + \frac{a_{n-1}}{n}$:

$$\begin{aligned} & \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^n + a_{n-1} \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-1} + \\ & a_{n-2} \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-2} + \dots + a_0 \\ &= w^n + \boxed{nw^{n-1} \left(-\frac{a_{n-1}}{n}\right)} + \dots + \left(-\frac{a_{n-1}}{n}\right)^n \\ &+ \boxed{a_{n-1}w^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \left(-\frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-1} \\ &+ a_{n-2} \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-2} + \dots + a_0 \\ &= w^n + b_{n-2}w^{n-2} + \dots + b_0 \end{aligned}$$

dla odpowiednio dobranych współczynników $b_0, \dots, b_{n-2}$.

$$z^3 + pz + q = 0$$

Szukamy ogólnego rozwiązania równania $z^3 + pz + q = 0$.
 Zakładamy że $p \neq 0$, bo inaczej rozwiązania są natychmiastowe.
 Podstawiając $z = t + \alpha t^{-1}$, $\alpha \neq 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} z^3 + pz + q &= t^3 + 3t^2\alpha t^{-1} + 3t\alpha^2 t^{-2} + \alpha^3 t^{-3} + pt + p\alpha t^{-1} + q \\ &= t^3 + (3\alpha + p)t + \alpha(3\alpha + p)t^{-1} + \alpha^3 t^{-3} + q. \end{aligned}$$

Kładąc $\alpha = -\frac{p}{3}$ dostajemy $t^3 - \frac{p^3}{27}t^{-3} + q = 0$. Stąd t^3 jest rozwiązaniem równania $w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$, czyli jest postaci

$$w_+ := \frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right) = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \neq 0$$

lub

$$w_- := -q - w_+ = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \neq 0.$$

Relacje pomiędzy rozwiązaniami

Niech $\sqrt[3]{w_{\pm}}$ będzie którymś z 3 pierwiastków 3-ego stopnia z $w_{\pm}$.
Wtedy pozostałe pierwiastki są postaci $\sqrt[3]{w_{\pm}}\varepsilon$, $\sqrt[3]{w_{\pm}}\varepsilon^2$, $\varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
Zatem a priori mamy aż 6 rozwiązań:

$$z = t - \frac{p}{3t} \in \left\{ \sqrt[3]{w_{\pm}}\varepsilon^k - \frac{p\varepsilon^{-k}}{3\sqrt[3]{w_{\pm}}} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}.$$

Z drugiej strony, z układu równań

$$\begin{cases} w_+ + w_- &= -q \\ t^3 - \frac{p^3}{27}t^{-3} &= -q \end{cases}$$

otrzymujemy

$$t^3 = w_{\pm} \implies \left(\frac{-p}{3t} \right)^3 = w_{\mp} \implies w_{\mp} = \left(-\frac{p}{3} \right)^3 \frac{1}{w_{\pm}}.$$

Wzory Cardano

Zatem dla wybranego $\sqrt[3]{w_+}$ możemy zawsze tak wybrać $\sqrt[3]{w_-}$ żeby $\sqrt[3]{w_-} = \frac{-p}{3\sqrt[3]{w_+}}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{w_-}\varepsilon^k - \frac{p\varepsilon^{-k}}{3\sqrt[3]{w_-}} &= -\frac{p\varepsilon^k}{3\sqrt[3]{w_+}} - \frac{p\varepsilon^{-k}}{3\left(-\frac{p}{3\sqrt[3]{w_+}}\right)} \\ &= \sqrt[3]{w_+}\varepsilon^{-k} - \frac{p\varepsilon^k}{3\sqrt[3]{w_+}}\end{aligned}$$

dla każdego $k \in \{0, 1, 2\}$. Dlatego w_- daje taki sam zbiór rozwiązań jak w_+ , i możemy je pominąć. Ostatecznie otrzymujemy:

Theorem (Wzory Cardano)

Rozwiązaniami równania $z^3 + pz + q = 0$, $p \neq 0$, są

$$z_l := \sqrt[3]{w_+}\varepsilon^l + \sqrt[3]{w_-}\varepsilon^{-l}, \quad l \in \{0, 1, 2\},$$

gdzie $w_{\pm} := -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$, $\varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

Szukamy ogólnego rozwiązania równania $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.
 Znów zakładamy że człon liniowy nie znika ($q \neq 0$), bo inaczej
 równanie daje się natychmiastowo rozwiązać. Przedstawmy
 $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ jako różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C} : z^4 + pz^2 + qz + r \\ = \left(z^2 + \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \left((\lambda - p)z^2 - qz + \left(\frac{\lambda^2}{4} - r \right) \right). \end{aligned}$$

Jeśli λ jest jakimkolwiek rozwiązaniem równania 3-go stopnia
 $q^2 - 4(\lambda - p) \left(\frac{\lambda^2}{4} - r \right) = 0$ (znikanie wyróżnika wyrażenia
 kwadratowego w prawym nawiasie), to $q \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq p$ oraz

$$\begin{aligned} (\lambda - p)z^2 - qz + \frac{\lambda^2}{4} - r &= (\lambda - p) \left(z - \frac{q}{2(\lambda - p)} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{\lambda - p} z - \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}} \right)^2. \end{aligned}$$

Ogólne rozwiązania równania 4-ego stopnia

Zatem ze wzoru $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ otrzymujemy

$$z^4 + pz^2 + qz + r = \left(z^2 + \sqrt{\lambda - p} z + \frac{\lambda}{2} - \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}} \right) \left(z^2 - \sqrt{\lambda - p} z + \frac{\lambda}{2} + \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}} \right).$$

W ten sposób udowodniliśmy:

Theorem

Jeśli λ jest jakimkolwiek rozwiązaniem równania 3-ego stopnia

$$q^2 = (\lambda - p)(\lambda^2 - 4r), \quad q \neq 0,$$

to rozwiązania równań kwadratowych

$$z^2 \pm \sqrt{\lambda - p} z + \frac{\lambda}{2} \mp \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}} = 0$$

są rozwiązaniami równania $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

Zasadnicze twierdzenia algebry

Theorem

Dla $n \geq 5$ nie jest możliwe otrzymanie ogólnego rozwiązania równania $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ jako funkcji od współczynników $a_0, \dots, a_{n-1}$ uzyskanej przy pomocy stałych wymiernych oraz skończonej ilości operacji algebraicznych (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia) i skończonej ilości operacji pierwiastkowania.

Theorem (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)

Dla $n \geq 1$ każde równanie $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ o współczynnikach zespolonych $a_0, \dots, a_{n-1}$ posiada rozwiązanie w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Uwaga: Istnieje mnóstwo elementarnych niealgebraicznych dowodów Zasadniczego Twierdzenia Algebry.

Algebraiczna domkniętość ciał

Definition

Ciało $\mathbb{K}$ nazywamy **algebraicznie domkniętym** wtedy i tylko wtedy gdy każde równanie $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ o współczynnikach $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ posiada rozwiązanie w $\mathbb{K}$.

Ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte. Rozwiązania równania $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, $n \neq 0$, o współczynnikach w $\mathbb{Q}$ (lub $\mathbb{Z}$) nazywamy **liczbami algebraicznymi**. Słynnymi przykładami liczb niealgebraicznych są $\pi = 3.14\dots$ oraz $e = 2.71\dots$

Theorem

Żadne ciało skończone nie jest algebraicznie domknięte.

Dowód: Niech $a_1, \dots, a_n$ będą wszystkimi elementami ciała. Wtedy równanie $(z - a_1) \dots (z - a_n) + 1 = 0$ ma współczynniki w tym ciele, ale nie ma w tym ciele żadnego rozwiązania, bo $1 \neq 0$. $\square$