# CIĄGI DOKŁADNE, PRODUKTY I SUMY PROSTE

**Piotr M. Hajac**
**Uniwersytet Warszawski**

Wykład 9, 2.12.2013

*Typeset by Jakub Szczepanik.*

# Ciągi dokładne

**Definition**

Niech $R$ będzie dowolnym pierścieniem. Ciąg odwzorowań liniowych pomiędzy lewymi $R$-modułami

$$\dots M_{-2} \xrightarrow{f_{-2}} M_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \to \dots$$

nazywamy dokładnym $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{Z}: \ \operatorname{Ker} f_{n+1} = \operatorname{Im} f_n}$.

Zauważmy, że $\forall\, n \in \mathbb{Z}: \ f_{n+1} \circ f_n = 0$. Szczególnie ważne są krótkie ciągi dokładne

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0\,.$$

Tutaj dokładność oznacza że: $\operatorname{Ker} f_0 = 0$ ($f_0$ jest injekcją), $\operatorname{Im} f_0 = \operatorname{Ker} f_1$ oraz $\operatorname{Coker} f_1 = 0$ ($f_1$ jest surjekcją). Przykład ciągu dokładnego grup abelowych ($\mathbb{Z}$-modułów):

$$0 \to n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0\,.$$

# Rozszczepianie

**Definition**

Mówimy, że odwzorowanie liniowe $M \xrightarrow{f} N$ rozszczepia się $\Leftrightarrow$ istnieje odwzorowanie liniowe $N \xrightarrow{s} M$ : $f \circ s = \mathrm{id}$. Odwzorowanie $s$ nazywamy rozszczepieniem lub retrakcją odwzorowania $f$.

Odwzorowanie rozszczepiane $f$ musi być surjekcją, bo w przeciwnym razie $\exists\, n \notin \operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im}(f \circ s) = \operatorname{Im} \mathrm{id} = N$, co jest niemożliwe. Podobnie, odwzorowanie rozszczepiające $s$ musi być injekcją, bo $\operatorname{Ker} s \subseteq \operatorname{Ker}(f \circ s) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}) = 0$. Zaś odwzorowanie $s \circ f$ ma własność (idempotentną):

$$(s \circ f)^2 := s \circ \underbrace{f \circ s} \circ f = s \circ \mathrm{id} \circ f = s \circ f\,.$$

Kanoniczna surjekcja $\mathbb{Z}$-modułów $\mathbb{Z} \ni m \mapsto [m] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nie rozszczepia się. Istotnie, jeśli $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{s} \mathbb{Z}$ jest $\mathbb{Z}$-liniowe, to otrzymujemy sprzeczność:

$$ns([1]) = s([n]) = s(0) = 0 \iff s([1]) = 0 \iff s = 0\,.$$

# Potenty i endomorfizmy

**Definition**

Niech $R$ będzie dowolnym pierścieniem. Element $r \in R$ nazywamy:

1. idempotentem $\Leftrightarrow r^2 = r$,
2. unipotentem $\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : r^n = 1$,
3. nilpotentem $\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \; r^n = 0$.

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych z $M$ do $N$ oznaczamy przez $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Jest grupą abelową ze względu na punktowe dodawanie $+$. Jeśli $M = N$, to $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ jest pierścieniem ze względu na punktowe dodawanie $+$ i składanie odwzorowań $\circ$. Elementy neutralne to odpowiednio odwzorowanie zerowe i odwzorowanie identycznościowe. Liniowe odwzorowania z $M$ do $M$ nazywamy endomorfizmami, a pierścień który tworzą oznaczamy przez $\mathrm{End}_R(M)$. Tak więc $s \circ f$ jest idempotentem w pierścieniu endomorfizmów $\mathrm{End}_R(M)$.

# Sumy i produkty

## Definitions

Niech $R$ będzie dowolnym pierścieniem, $M$ dowolnym lewym $R$-modułem, a $N_1$ i $N_2$ dowolnymi podmodułammi $M$. Sumą podmodułów $N_1$ i $N_2$ nazywamy podmoduł

$$\boxed{N_1 + N_2 := \{m + n \in M \mid m \in N_1, n \in N_2\}}.$$

Jeśli $N_1 \cap N_2 = \{0\} = 0$, to sumę $N_1 + N_2$ nazywamy sumą prostą i oznaczamy przez $\boxed{N_1 \oplus N_2}$.

## Definition

Niech $R$ będzie pierścieniem, a $M_i$, $i \in I$, niepustą rodziną lewych $R$-modułów. Produktem tych modułów nazywamy

$$\boxed{\prod_{i \in I} M_i := \left\{ f \in \operatorname{Map}\Big(I, \bigcup_{i \in I} M_i\Big) \;\Big|\; \forall\, i \in I : \; f(i) \in M_i \right\}}.$$

Zbiór $\prod_{i \in I} M_i$ jest modułem ze względu na działania punktowe.

# Zewnętrzne sumy proste

**Definition**

Niech $R$ będzie pierścieniem, a $M_i$, $i \in I$, niepustą rodziną lewych $R$-modułów. Sumą prostą tych modułów nazywamy

$$\boxed{\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ f \in \prod_{i=I} M_i \;\middle|\; f(i) \neq 0 \text{ dla skończonej ilości } i \in I \right\}}.$$

Zbiór $\bigoplus_{i\in I} M_i$ jest podmodułem $\prod_{i\in I} M_i$.

Utożsamiając

$$M_i \cong \left\{ f \in \prod_{k\in I} M_k \;\middle|\; \forall\, k \neq i : f(k) = 0 \right\},$$

widzimy że $\forall\, i \neq j : M_i \cap M_j = 0$, co daje zgodność z poprzednią definicją sumy prostej. Jeśli zbiór $I$ jest skończony, to

$$\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i\,.$$

# Twierdzenie o rozszczepianiu

**Theorem**

*Niech* $0 \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \to 0$ *będzie ciągiem dokładnym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. $\exists\, s_1 \in \mathrm{Hom}_R(M_2, M_1) : f_1 \circ s_1 = \mathrm{id}$ *($f_1$ rozszczepia się),*
2. $\exists\, p_0 \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_0) : p_0 \circ f_0 = \mathrm{id}$ *($f_0$ rozszczepia $p_0$),*
3. $\exists$ *podmoduł* $M_1' : M_1 = \mathrm{Ker}\, f_1 \oplus M_1' = \mathrm{Im}\, f_0 \oplus M_1'$.

**Lemma**

*Niech* $N = N_1 \oplus N_2$. *Wtedy*

$$\forall\, k \in \{1, 2\}\ \exists\, p_k \in \mathrm{Hom}_R(N, N_k) : p_k \circ i_k = \mathrm{id}\,,$$

*gdzie* $i_k \in \mathrm{Hom}_R(N_k, N)$ *jest włożeniem:*

$$\forall\, n \in N_k : \ i_k(n) := n \in N.$$

# Dowód lematu

**Dowód:** Jeśli $n_1, n_1' \in N$, $n_2, n_2' \in N_2$, to

$$n_1 + n_2 = n_1' + n_2' \quad \Longleftrightarrow \quad (n_1 = n_1' \text{ i } n_2 = n_2')\,.$$

Istotnie, $n_1 + n_2 = n_1' + n_2' \Leftrightarrow n_1 - n_1' = n_2' - n_2 \in N_1 \cap N_2 = 0$.
Zatem rozkład dowolnego $n \in N$ na sumę elementów z $N_1$ i $N_2$ jest jednoznaczny, i możemy zdefiniować odwzorowania $p_k \in \mathrm{Hom}_R(N_1, N_k)$, $k \in \{1, 2\}$, przez wzory

$$p_k(n) := n_k \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n_{k'} \in N_{k'},\, k' \neq k : n = n_k + n_{k'}\,.$$

Liniowość odwzorowań $p_k$ wynika z tego, że $N_k$ są modułami oraz z implikacji

$$\left.\begin{aligned} n &= n_k + n_{k'} \\ m &= m_k + m_{k'} \\ r &\in R \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m + n = \underbrace{m_k + n_k}_{\in N_k} + \underbrace{m_{k'} + n_{k'}}_{\in N_k'} \\ rn = \underset{\in N_k}{rn_k} + \underset{\in N_k'}{rn_{k'}} \end{cases}.$$

Wreszcie $p_k \circ i_k = \mathrm{id}$, $k \in \{1, 2\}$, wynika stąd że

$$\forall\, n_k \in N_k : n_k = n_k + 0 \in N\,. \qquad \blacksquare$$

# Dowód twierdzenia

**Dowód:** ❶⇒❸: Dla dowolnego $x \in M_1$ mamy:

$$x = s_1(f_1(x)) + x - s_1(f_1(x)) \in \operatorname{Im} s_1 + \operatorname{Ker} f_1 \,.$$

Stąd $M_1 = \operatorname{Im} s_1 + \operatorname{Ker} f_1$. Ta suma jest prosta bo, jeżeli $x \in \operatorname{Im} s_1 \cap \operatorname{Ker} f_1$, to

$$\exists\, y \in M_2 : x = s_1(y) \text{ oraz } 0 = f_1(x) = (f_1 \circ s_1)(y) = y \,,$$

skąd $x = s_1(0) = 0$, co oznacza $\operatorname{Im} s_1 \cap \operatorname{Ker} f_1 = \{0\} = 0$.

❸⇒❶: Niech $p_1 \in \operatorname{Hom}_R(M_1, \operatorname{Ker} f_1)$ będzie lematowym rzutowaniem na składnik prosty $\operatorname{Ker} f_1$. Z surjektywności $f_1$ mamy

$$\forall\, m \in M_2 \; \exists\, \tilde{m} \in M_1 : \; f_1(\tilde{m}) = m \,.$$

Odwzorowanie $M_2 \ni m \stackrel{s_1}{\mapsto} \tilde{m} - p_1(\tilde{m}) \in M_1$ jest dobrze zdefiniowane bo

$$\tilde{m} \in \operatorname{Ker} f_1 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{m} - p_1(\tilde{m}) = \tilde{m} - \tilde{m} = 0 \,.$$

Liniowość $s_1$ jest ewidentna: jeżeli $f_1(\tilde{m}) = m$ to $f_1(r\tilde{m}) = rm$, jeżeli $f_1(\tilde{m}_1) = m_1$ i $f_1(\tilde{m}_2) = m_2$ to $f_1(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2) = m_1 + m_2 \,.$

# Koniec dowodu

Ponadto, dla dowolnego $m \in M_1$ mamy:

$$f_1(s_1(m)) = f_1(\tilde{m}) - f_1(p_1(\tilde{m})) = f_1(\tilde{m}) = m\,,$$

co oznacza $f_1 \circ s_1 = \mathrm{id}$.

❷⇐❸: Niech $p_2 \in \mathrm{Hom}_R(M_1, \mathrm{Im}\, f_0)$ będzie lematowym rzutowaniem na składnik prosty $\mathrm{Im}\, f_0$. Z injektywności $f_0$ wynika że homomorfizm $\tilde{f}_0 : M_0 \ni m \mapsto f_0(m) \in \mathrm{Im}\, f_0$ jest bijekcją. Zatem mamy $p_0 := \tilde{f}_0^{-1} \circ p_2 \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_0)$ taki że

$$\forall\, m \in M_0 :\ (p_0 \circ f_0)(m) = \tilde{f}_0^{-1}(f_0(m)) = m\,.$$

❷⇒❸: Dla dowolnego $x \in M_1$ mamy:

$$x = f_0(p_0(x)) + x - f_0(p_0(x)) \in \mathrm{Im}\, f_0 + \mathrm{Ker}\, p_0\,.$$

Stąd $M_1 = \mathrm{Im}\, f_0 + \mathrm{Ker}\, p_0$. Ta suma jest prosta bo, jeżeli $x \in \mathrm{Im}\, f_0 \cap \mathrm{Ker}\, p_0$, to

$$\exists\, y \in M_0 : x = f_0(y) \text{ oraz } 0 = p_0(x) = (p_0 \circ f_0)(y) = y\,,$$

skąd $x = f_0(0) = 0$, co oznacza $\mathrm{Im}\, f_0 \cap \mathrm{Ker}\, p_0 = \{0\} = 0$. ■