Algebra z geometrią 2013/2014

Kolokwium pisemne 2.12.2013

Instrukcje: *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. *Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Zadanie 1. Udowodnij że znak odwrotności permutacji jest równy znakowi tej permutacji: $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ (2 punkty). Wykaż że odwzorowanie

$$\{e^{2\pi i \frac{k}{7}} \mid k \in \{0, ..., 6\}\} \ni z \longmapsto z^5 \in \{e^{2\pi i \frac{k}{7}} \mid k \in \{0, ..., 6\}\}$$

jest permutacją (2 punkty). Rozłóż ją na cykle rozłączne (3 punkt) i oblicz jej znak (3 punkty).

Zadanie 2. Udowodnij że sprzężenie zespolone jest homomorfizmem ciał (3 punkty). Znajdź (6 punktów) i naszkicuj (1 punkt) zbiór rozwiązań równania $|z - 3 + i|^2 = \operatorname{Re}(z(2 - 2i) + 5(2 + i)) + 3z\bar{z}$.

Zadanie 3. Korzystając z Zasadniczego Twierdzenia Algebry, udowodnij że jeśli z jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego $p \in \mathbb{R}[\mathbb{N}]$, to również jego sprzężenie zespolone $\overline{z}$ jest pierwiastkiem p, tzn. $f_p(z) = 0 \;\Rightarrow\; f_p(\overline{z}) = 0$ (4 punkty). Rozwiąż równanie $z^3 + 6z + 2 = 0$ (6 punktów).

Zadanie 4. Podaj przykład wielomianu nad $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ stopnia 3 którego funkcja wielomianowa jest zerowa (1 punkt). Znajdź iloraz oraz resztę z dzielenia wielomianu (2 punkty) α przez β dla

$$\alpha := x^7 - 2x^3 + px^2 + qx + p + q + 3 \in \mathbb{R}[\mathbb{N}], \qquad \beta := x^3 - x - 1 \in \mathbb{R}[\mathbb{N}].$$

Wyznacz p i q dla których β dzieli α (2 punkty). Udowodnij że β rozkłada się na 2 wielomiany nieredukowalne (pierwsze) nad $\mathbb{R}$ (5 punktów).