Algebra z geometrią 2013/2014

Kolokwium próbne 25.11.2013

Instrukcje: *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. *Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Zadanie 1. (Permutacje.) Zdefiniuj permutację i znak permutacji (2 punkty). Sprawdź że formuła

$$\sigma(k) = \frac{|\,4k - 33\,| + 1}{2}$$

określa permutację zbioru $S = \{1, 2, 3, ...15\}$ (2 punkty).

a) Znajdź rozkład tej permutacji na cykle (2 punkty).

b) Znajdź znak σ (2 punkty).

c) Oblicz σ^5 (2 punkty).

Zadanie 2. (Liczby zespolone.) Zdefiniuj i wyjaśnij symbol e^{it} (2 punkty). Udowodnij że sprzężenie zespolone jest homomorfizmem ciał (3 punkty). Następnie wykaż że (5 punktów)

$$(1 - \varepsilon) \cdots (1 - \varepsilon^{n-1}) = n, \quad \text{gdzie } \varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Zadanie 3. (Zespolone równania 3-ego i 4-ego stopnia.) Podaj pierwsze imię Cardano (0 punktów). Udowodnij że pierścień wielomianów $\mathbb{C}[\mathbb{N}]$ jest izomorficzny z pierścieniem zespolonych funkcji wielomianowych (4 punkty). Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki wielomianu (6 punktów)

$$z^3 + 24z^2 - 648.$$

Zadanie 4. (Wielomiany i funkcje wymierne.) Niech R będzie pierścieniem bez dzielników zera. Udowodnij że $\forall\ \alpha, \beta \in R[\mathbb{N}] \setminus \{0\} :\ \deg(\alpha * \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ (2 punkty). Nie korzystając z algorytmu dzielenia wielomianów z resztą, znajdź resztę z dzielenia wymiernego wielomianu

$$1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$$

przez wymierny wielomian $x^2 - 1$ (4 punkty). Następnie rozłóż na ułamki proste wymierną funkcję wymierną otrzymaną przez podzielenie tak otrzymanej reszty przez $x^2 - 1$ (4 punkty).