

Algebra z geometrią 2013/2014

Egzamin próbny 03.02.2014

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Zadanie 1. Liniowa niezależność, rozpinanie, bazy (skończone układy ale niekoniecznie nad ciałem): Niech $B \subset \mathbb{Q}^4$ będzie zbiorem 4 wektorów. Czy B musi być zbiorem linowo niezależnym jeśli każdy 3-elementowy podzbiór B jest liniowo niezależny (4 punkty)? Niech

$$W := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ u \\ 12 \\ u+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4.$$

Dla jakich $u \in \mathbb{Q}$ można podrzestrzeń W opisać jednym równaniem liniowym (6 punktów)?

Zadanie 2. Sumy, ilorazy, sumy proste, wymiar (skończone): Niech V będzie skończeniowymiarową przestrzenią wektorową. Korzystając z faktu że dla dowolnego $f \in \text{End}(V) : V \cong \ker f \oplus \text{im} f$, udowodnij że

$$\forall f \in \text{End}(V) : \dim \ker f = \dim \text{coker} f \quad (2 \text{ punkty}).$$

W przestrzeni $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$ dwie podrzestrzenie V i U są zadane odpowiednio:

$$V := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 \mid \begin{cases} 0 = x - y + z - t \\ 0 = y - 3z \end{cases} \right\}.$$

Znajdź wymiary przestrzeni V , U , $U + V$ oraz $V \cap U$ (8 punktów).

Zadanie 3. Odwzorowania liniowe (jądra, obrazy, kojądra): Rozważmy włożenie grup abelowych $\subset : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ jako odwzorowanie $\mathbb{Z}$ -liniowe. Udowodnij że jego odwzorowanie transponowane nie jest surjekcją (3 punkty). Niech $\mathbb{R}_n[t]$ oznacza rzeczywistą przestrzeń wektorową rzeczywistych funkcji wielomianowych których stopień nie jest większy niż n . Niech f będzie odwzorowaniem określonym wzorem

$$f : \mathbb{R}_2[t] \ni p \longmapsto 2 \frac{dp}{dt} + p \in \mathbb{R}_3[t].$$

Sprawdź że f jest $\mathbb{R}$ -liniową injekcją (3 punkty). Podaj bazę obrazu (2 punkty) i kojądra (2 punkty) odwzorowania f .

Zadanie 4. Macierze odwzorowań liniowych (skończone ale niekoniecznie kwadratowe):

Czy rozmiar macierzy odwzorowania liniowego pomiędzy przestrzeniami wektorowymi może zależeć od wyboru bazy (1 punkt)? W bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $f_k: \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ to

$$F_k := \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Znajdź macierz odwzorowania f_k w bazie

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3 \text{ punkty}).$$

Dla jakich $k \in \mathbb{Q}$ zbiór

$$G_k := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid F_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

jest zbiorem jednoelementowym, i jaki to wtedy element (6 punktów)?