Algebra z geometrią 2012/2013

Egzamin próbny, 3 VI 2013 r.

Instrukcje: *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. *Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Zadanie 1. Formy biliniowe i kwadratowe: Udowodnij że, jeżeli $A \in M_2(\mathbb{R})$ jest macierzą rzeczywistej formy kwadratowej, to jest ona diagonalizowalna jako macierz endomorfizmu $a \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ (4 punkty). Niech $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową określoną w następujący sposób:

$$Q(\mathbf{v}) = 3\lambda x^2 + 2\lambda y^2 + \lambda z^2 + \lambda^2 t^2 - 4xy - 2\lambda xz, \qquad \mathbf{v} = (x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sprowadź Q do postaci kanonicznej oraz znajdź wszystkie wartości parametru λ dla których forma Q jest dodatnio określona (2 punkty), oraz wszystkie wartości parametru λ dla których jest ona zdegenerowana (2 punkty). Wyznacz sygnaturę Q dla $\lambda = -2$ oraz $\lambda = 0$ (2 punkty).

Zadanie 2. Norma, iloczyn skalarny, bazy ortonormalne: Udowodnij że macierz przejścia z bazy ortonormalnej do bazy ortonormalnej jest unitarna (4 punkty). Sprawdź że, w przestrzeni $\mathbb{C}_2[x]$ wszystkich funkcji wielomianowych z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$ nie posiadających stopnia nie większego od 2, odwzorowanie

$$\mathbb{C}_2[x] \times \mathbb{C}_2[x] \ni \langle v|w\rangle \longmapsto \langle v|w\rangle := 6\int_{-1}^{1} t^2\, \overline{v(t)}\, w(t)\, dt \in \mathbb{C}$$

jest iloczynem skalarnym (3 punkty). Zortonormalizuj względem tego iloczynu skalarnego bazę $\{u_i\}_1^3$, gdzie $u_1(x) := 1$, $u_2(x) := x$, $u_3(x) := x^2$ (3 punkty).

Zadanie 3. Sprzężenie hermitowskie: Zdefiniuj sprzężenie hermitowskie endomorfizmu skończeniewymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej, oraz udowodnij że wartości własne izometrii takiej przestrzeni mają moduł 1 (4 punkty). Znajdź wszystkie odwzorowania $h \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ których macierz H w bazie kanonicznej jest macierzą hermitowską spełniającą

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(4 punkty).}$$

Znajdź bazę ortonormalną $\mathbb{C}^2$ złożoną z wektorów własnych h (2 punkty).

Zadanie 4. Rozkład na (uogólnione) podprzestrzenie własne, diagonalizacja macierzy (twierdzenia spektralne): Podaj przykład endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{C}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym który jest diagonalizowalny, ale nie jest normalny (4 punkty). W bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym macierz endomorfizmu $h \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ ma postać

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Pokaż że w $\mathbb{C}^3$ istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych h (2 punkty).

ii) Znajdź rzuty spektralne na podprzestrzenie własne h (2 punkty).

iii) Czy istnieje stała $\alpha \in \mathbb{C}$ taka że endomorfizm αh jest unitarny (2 punkty)?