

Algebra z geometrią I

Kolokwium dodatkowe, I 2013 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi kolokwium jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z kolokwium. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Zadanie 1. Zdefiniuj permutację i znak permutacji (2 punkty). Niech $X := \{z \in \mathbb{C} : z^{20} = 1\}$. Sprawdź że wzór $\sigma(z) = iz^3$ określa permutację zbioru X .

- a) Znajdź rozkład permutacji σ na cykle (2 punkty).
- b) Oblicz jej znak $\text{sign } \sigma$ (2 punkty).
- c) Znajdź najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą N taką że $\sigma^N = \text{id}$ (2 punkty).
- d) Oblicz σ^{2013} (2 punkty).

Zadanie 2. Udowodnij że każdy homomorfizm ciał jest injektywny (2 punkty). Niech $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ będzie ciałem liczb wymiernych. W iloczynie kartezjańskim $\mathbb{K} := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, określamy działania:

$$(a, b) \oplus (a', b') := (a + a', b + b'), \quad (a, b) \star (a', b') := (aa' + 3bb', ab' + ba')$$

- a) Sprawdź że $(\mathbb{K}, \oplus, \star)$ jest ciałem (4 punkty).
- b) Dla elementu $(3, 1)$ podaj jego element przeciwny oraz element odwrotny (2 punkty).
- c) Sprawdź czy odwzorowanie

$$\mathbb{K} \ni (a, b) \mapsto a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

jest homomorfizmem ciała $(\mathbb{K}, \oplus, \star)$ w ciało liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (2 punkty).

Zadanie 3. Podaj przykład n -elementowej multiplikatywnej podgrupy $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (2 punkty). Niech $T := \{z \in \mathbb{C} : z^3(1+z) = 1+\bar{z}\}$.

- a) Wykaż że $T \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (3 punkty).
- b) Opisz elementy zbioru T i naszkicuj zbiór T na płaszczyźnie (2 punkty).
- c) Sprawdź czy $(T, \cdot)$ jest grupą ze względu na mnożenie liczb zespolonych (3 punkty).

Zadanie 4. Udowodnij że pierścień wielomianów $\mathbb{C}[\mathbb{N}]$ jest izomorficzny z pierścieniem zespolonych funkcji wielomianowych (4 punkty). Znajdź wszystkie rozwiązania zespolone $x \in \mathbb{C}$ równania (6 punktów)

$$x^3 - 3x^2 + 3 = 0.$$