

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Egzamin pisemny

26 stycznia 2013 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi kolokwium jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisanie i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z kolokwium. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłóiku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Zadanie 1. Udowodnij że odwzorowanie liniowe f jest injekcją wtedy i tylko wtedy gdy $\ker f = 0$ (2 punkty). Niech F będzie odwzorowaniem określonym (na przestrzeni wektorowej rzeczywistych funkcji wielomianowych których stopień nie jest większy niż 2 w przestrzeń wektorową rzeczywistych funkcji wielomianowych których stopień nie jest większy niż 3) przez wzór

$$F: \mathbb{R}_2[x] \ni P \longmapsto 2\frac{dP}{dx} + P \in \mathbb{R}_3[x].$$

Sprawdź że F jest $\mathbb{R}$ -liniową injekcją (3 punkty). Podaj bazę obrazu (2 punkty) i jądro (2 punkty) odwzorowania F . Czy wymiary obrazu i jądra uległyby zmianie gdybyśmy ciało $\mathbb{R}$ zastąpili ciałem $\mathbb{Q}$ (1 punkt)?

Zadanie 2. Jakiej postaci musi być dziedzina odwzorowania liniowego jeśli jego macierz ma tylko jedną kolumnę (1 punkt)? W bazie kanonicznej macierz F_s odwzorowania liniowego $f_s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dana jest wzorem

$$F_s := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 5 & s & 11 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Znajdź macierz odwzorowania f_s zmieniając bazę kanoniczną $\mathbb{R}^3$ na

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2 \text{ punkty}).$$

W zależności od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$, oblicz (7 punktów) kiedy zbiór

$$G_{s,t} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f_s(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- a) jest zbiorem pustym?
- b) jest zbiorem jednoelementowym, jaki to element?
- c) jest zbiorem nieskończonym?

Zadanie 3. Udowodnij że przestrzenie wektorowe V i W są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy ich wymiary są równe (4 punkty). (Można założyć że są one skończeniowymiarowe, choć to w niczym nie pomaga.) W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dwie podprzestrzenie V, U są zadane odpowiednio:

$$V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 0 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 0 = x_2 - 3x_3 \end{cases} \right\}.$$

Znajdź wymiary przestrzeni $V, U, U + V$ oraz $V \cap U$ (6 punktów).

Zadanie 4. Podaj przykład zbioru liniowo niezależnego nad $\mathbb{R}$ który jest liniowo zależny nad $\mathbb{C}$ (1 punkt). Niech $W \subset \mathbb{R}^5$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Rozpatrzmy zbiory wektorów:

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -14 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} \quad U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- Które z powyższych zbiorów wektorów są bazami przestrzeni W (3 punkty)?
- Które z tych zbiorów można uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$ za pomocą wektorów należących do W (3 punkty)?
- Które z tych zbiorów nie można uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$ tylko za pomocą wektorów należących do W , ale można uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$ w jakiś inny sposób (3 punkty)?

Zadanie 5. Dlaczego wyznacznik automorfizmu musi być odwracalny (1 punkt)? Wiadomo że dla pewnej macierzy $B \in M_3(\mathbb{R})$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Oblicz wartości macierzy B na wektorach bazy kanonicznej (6 punktów).
- Oblicz ślad (1 punkt) i wyznacznik (2 punkty) macierzy B .