

Algebra z geometrią I

Egzamin poprawkowy, 5 III 2013 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisanja i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Część A

Zadanie 1. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Udowodnij że permutacja zbioru n -elementowego jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na $n - 1$ elementach (1 punkt). Dane są dwa odwzorowania zbioru $T := \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ w siebie:

$$T \ni k \longmapsto \rho(k) = 2k + 1 \pmod{10} \in T,$$

$$T \ni k \longmapsto \sigma(k) = \frac{|4k - 21| + 1}{2} \in T.$$

- a) Czy odwzorowania ρ lub σ są permutacjami zbioru T (3 punkty)?
- b) W przypadku odpowiedzi pozytywnej podać: znak permutacji, rozkład na cykle i permutację odwrotną (6 punktów).

Zadanie 2. Udowodnij że podpierścień $K := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ pierścienia macierzy $M_2(\mathbb{R})$ jest izomorficzny z ciałem $\mathbb{C}$ (4 punkty). Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie liczbą spełniającą warunek $z + z^{-1} = 2 \cos \varphi$.

- a) Wykaż że $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}: z^n + z^{-n} = 2 \cos n\varphi$ (3 punkty).
- b) Dla ustalonego kąta φ zdefiniujmy $X_\varphi := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid z + z^{-1} = 2 \cos \varphi\}$ oraz $H_\varphi := \{z^n \in \mathbb{C} \mid z \in X_\varphi, n \in \mathbb{N}\}$. Czy ze względu na mnożenie $\cdot$ liczb zespolonych $(H_\varphi, \cdot)$ jest grupą (2 punkty)? Dla jakich φ zbiór H_φ jest skończony (1 punkt)?

Zadanie 3. Udowodnij że pierścień wielomianów $\mathbb{C}[\mathbb{N}]$ jest izomorficzny z pierścieniem zespolonych funkcji wielomianowych (4 punkty). Znajdź wszystkie rozwiązania zespolone równania (6 punktów)

$$z^3 - 6z^2 - 4 = 0.$$

Część B

Zadanie 4. Niech B i C będą odpowiednio bazami M i N , oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie dowolnym odwzorowaniem liniowym. Zdefiniuj elementy macierzowe i macierz odwzorowania f względem baz B i C (4 punkty). (Choć to w niczym nie pomaga, można założyć że M i N są skończeniowymi przestrzeniami wektorowymi.) Podaj przykład przekształcenia liniowego $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniającego warunki (6 punktów):

$$\ker \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \right\}, \quad \operatorname{im} \varphi = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 5. Niech V będzie niezerową przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze n . Udowodnij że każdy n -elementowy liniowo niezależny podzbiór V jest jego bazą oraz że każdy podzbiór V rozpinający V musi mieć co najmniej n -elementów (4 punkty). W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_4[\mathbb{N}]$ wszystkich wielomianów nad $\mathbb{R}$ nie posiadających stopnia większego od 4 definiujemy następujące podprzestrzenie:

$$\begin{aligned} V &:= \operatorname{span}\{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + x + 1, x^3\}, \\ U &:= \operatorname{span}\{x^4 - x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3 - x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2 - x + 1\}. \end{aligned}$$

- a) Znajdź wymiary przestrzeni V , U , $U + V$ oraz $V \cap U$ (4 punkty).
- b) Podaj bazy V i U takie aby ich część wspólna była bazą $V \cap U$ (2 punkty).

Zadanie 6. Udowodnij że wyznacznik surjektywnego endomorfizmu musi być odwracalny (4 punkty). Niech $\mathbb{R}_2[x]$ będzie przestrzenią wektorową wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2, oraz niech F_s będzie odwzorowaniem liniowym określonym przez wzór

$$F_s: \mathbb{R}_2[x] \ni P \longmapsto 6x^2 \int_0^1 P(x) dx + s \frac{dP}{dx} \in \mathbb{R}_2[x].$$

Dla jakich parametrów $s \in \mathbb{R}$ funkcja wielomianowa $x^2 + 2x + 1$ należy do obrazu F_s (4 punkty)?
Dla $s = 1$ oblicz ślad i wznacznik tego odwzorowania (2 punkty).