

Algebra z geometrią 2012/2013

Egzamin pisemny, 24 VI 2013 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Zadanie 1. Zdefiniuj macierz formy kwadratowej $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oraz pokaż że znak jej wyznacznika nie zależy od wyboru bazy (3 punkty). Sformułuj twierdzenie pozwalające na definicję sygnatury α (1 punkt). Zbadaj dodatniość, rząd i sygnaturę formy kwadratowej $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, gdzie

$$Q(\mathbf{v}) = x^2 + \lambda y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 6yz, \quad \mathbf{v} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \quad (3 \text{ punkty}).$$

Srowadź formę Q do postaci kanonicznej (3 punkty).

Zadanie 2. Zdefiniuj iloczyn skalarny na zespolonej przestrzeni wektorowej oraz podaj wzór na metrykę indukowaną przez iloczyn skalarny (4 punkty). W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym, podaj bazę ortonormalną podprzestrzeni generowanej przez wektory

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ punktów}).$$

Zadanie 3. Zdefiniuj sprzężenie hermitowskie endomorfizmu skończeniowymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej, oraz udowodnij że wartości własne endomorfizmu samosprężonego są rzeczywiste (4 punkty). W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym macierz endomorfizmu $f \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$ w bazie kanonicznej ma postać:

$$F := \begin{pmatrix} 4 + 3i & 4i & -6 - 2i \\ -4i & 4 - 3i & -2 - 6i \\ 6 + 2i & -2 - 6i & 1 \end{pmatrix}.$$

Oblicz wartości własne f (3 punkty), oraz zbadaj czy f jest endomorfizmem: a) normalnym, b) hermitowskim, c) unitarnym (3 punkty).

Zadanie 4. Niech V będzie dowolną zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny. Udowodnij że, jeżeli endomorfizm $f \in \text{End}(V)$ posiada bazę ortonormalną wektorów własnych, to jest on endomorfizmem normalnym (4 punkty). Niech $\mathbb{C}^3$ będzie wyposażona w standardowy iloczyn skalarny. Oblicz spektrum, wymiary podprzestrzeni własnych, oraz podaj bazę ortonormalną wektorów własnych endomorfizmu $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ którego macierz w bazie kanonicznej jest postaci

$$f_{BB} := \begin{pmatrix} 0 & 4i & 0 \\ -4i & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ punktów}).$$