

Algebra z geometrią II

Egzamin poprawkowy, 3 IX 2013 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisanie i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłóiku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami łacińskimi (z polskimi znakami diaktrycznymi jeśli trzeba) i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Część A

Zadanie 1. Udowodnij że jeśli zbiór wszystkich rozwiązań układu równań liniowych nad $\mathbb{C}$ jest nieskończony, to nie może być przeliczalny (3 punkty). W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, rozwiąż układ rzeczywistych równań liniowych

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 2, \\ \lambda x - y + z = 0, \\ x + y + \lambda z = 1, \end{cases} \quad (7 \text{ punktów}).$$

Zadanie 2. Podaj przykład macierzy $F \in M_3(\mathbb{Z})$ która nie jest ani nilpotentna ani diagonalizowalna (2 punkty). Znajdź wszystkie rozwiązania zespolone równania

$$\det(A - x \cos^2(\pi A)) = 0,$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (8 \text{ punktów}).$$

Zadanie 3. Niech $M \xrightarrow{f} N$ będzie dowolnym surjektywnym odwzorowaniem liniowym. Udowodnij że odwzorowanie transponowane $f^T: N^* \rightarrow M^*$ jest injektywne (1 punkt). Niech $V := \mathbb{R}_2[t]$ będzie przestrzenią rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2. Pokaż że funkcjonały liniowe $\omega^i \in V^*$ ($i = 1, 2, 3$) określone wzorami

$$\omega^1(v) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(t) dt, \quad \omega^2(v) := \frac{1}{4} \int_{-2}^2 v(t) dt, \quad \omega^3(v) := \int_0^1 v(t) dt, \quad v \in V,$$

tworzą bazę przestrzeni V^* (4 punkty). Znajdź bazę E przestrzeni V do której $B := \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ jest bazą dualną (5 punktów).

Część B

Zadanie 4. Zdefiniuj macierz formy kwadratowej $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, oraz pokaż że znak jej wyznacznika nie zależy od wyboru bazy (3 punkty). Dana jest rzeczywista forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ określona w następujący sposób:

$$Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T B \mathbf{v}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zapisz Q we współrzędnych (x, y, z) (1 punkt). Sprowadź Q do postaci kanonicznej (3 punkty). Znajdź wszystkie wartości parametru λ dla których forma Q jest dodatnio określona, oraz wszystkie wartości parametru λ dla których jest zdegenerowana, oraz wyznacz sygnaturę Q w zależności od λ (3 punkty).

Zadanie 5. Zdefiniuj sprzężenie hermitowskie endomorfizmu skończeniowymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej, oraz udowodnij że wartości własne endomorfizmu samosprężonego są rzeczywiste (4 punkty). Niech $\mathbb{C}^4$ będzie wyposażona w standardowy iloczyn skalarny. Podaj bazę ortonormalną podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{C}^4$ generowanej przez wektory

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ punktów}).$$

Zadanie 6. Podaj przykład endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{C}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym który jest diagonalizowalny, ale nie jest normalny (4 punkty). Niech $\mathbb{C}^3$ będzie wyposażona w standardowy iloczyn skalarny. Podaj bazę ortonormalną wektorów własnych oraz rozkład spektralny endomorfizmu $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ którego macierz w bazie kanonicznej to

$$f_{BB} := \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 0 & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ punktów}).$$