

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria I

5 X 2012 r.

Zad. 1. Zbadać czy zdanie

1. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ jest tautologią,
2. $\left(\exists_{x \in X} [p(x) \wedge q(x)] \right) \Rightarrow [\exists_{x \in X} p(x)] \wedge [\exists_{x \in X} q(x)]$ jest prawdziwe.

Zad. 2. Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subset \Omega$ ich różnica symetryczna to

$$A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wykazać, że:

- a) Różnica symetryczna jest działaniem łącznym, tzn. dla każdych podzbiorów A, B, C zbioru Ω zachodzi

$$(A \div B) \div C = A \div (B \div C).$$

- b) Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subset \Omega$ istnieje jedyny podzbiór $X \subset \Omega$, taki, że

$$(A \div X) = B$$

(tj. powyższe równanie ma jednoznaczne rozwiązanie).

Zad. 3. Dany jest zbiór Ω oraz ustalony jego podzbiór $X \subset \Omega$. Na zbiorze 2^Ω definiujemy relację

$$\forall A, B \subset \Omega : A \sim B \Leftrightarrow A \div B \subset X.$$

Sprawdzić czy ta relacja jest relacją równoważności.

Zad. 4. Sprawdzić, czy następujące relacje są relacjami równoważności:

- a) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{Z}} (a - b) = 5n$,
- b) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} (a - b) = 5n$,
- c) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \sim b \Leftrightarrow |a - b| \neq 0$,
- d) $\forall a, b \in \mathbb{N}^+ : a \sim b \Leftrightarrow a, b$ są względnie pierwsze, tj. nie mają wspólnych dzielników.

Zad. 5. Określić relację równoważności na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, tak aby klasami równoważności (abstrakcji) tej relacji były:

- a) proste postaci $y = 3x + b$ dla $b \in \mathbb{R}$,
- b) parabole postaci $y = x^2 + c$ dla $c \in \mathbb{R}$,
- c) okręgi o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniach $r \geq 0$.

Zad. 6. Dla danego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ określamy relację

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y),$$

gdzie $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Sprawdzić, czy ta relacja jest relacją równoważności w przypadku, gdy:

- a) $A = \mathbb{R}$,
- b) $A = \mathbb{R}^+$,

jeśli jest, to znaleźć liczbę elementów w każdej klasie równoważności.