

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria XI

14 XII 2012 r.

Definicja Niepusty podzbiór $W \subset V$ nazywamy podprzestrzenią przestrzeni liniowej V jeśli:

- i) $\forall u, v \in W : u + v \in W$,
- ii) $\forall u \in W \forall \alpha \in K : \alpha u \in W$.

Zadanie 1. Dla każdego z poniższych podzbiorów W przestrzeni liniowej V sprawdzić czy spełnia on warunek (i) oraz czy spełnia warunek (ii) z definicji podprzestrzeni:

- a) $W := \{(x_1, x_2) \in V \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;
- b) $W := \{(x_1, x_2) \in V \mid x_1 = 0 \text{ lub } x_2 = 0\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;
- c) $W := \{(x_1, x_2) \in V \mid |x_1| - |x_2| = 1\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;
- d) $W := \{(x_1, x_2) \in V \mid x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;
- e) $W := \{w \in V : w(1) = w(-1)\}$, gdzie $V = \mathbb{R}[\mathbb{N}]$ (przestrzeń wektorowa wielomianów);
- f) $W := \{w \in V : w' = 2w\}$, gdzie $V = \mathbb{R}[\mathbb{N}]$ i w' oznacza pochodną wielomianu w .

Zadanie 2. W zależności od wartości parametru p zbadać liniową niezależność trójki wektorów

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2p \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} p \\ 5 \\ 3+p \\ -3p \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10+p \\ -13 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Niech $V = \{v \in \mathbb{R}[\mathbb{N}] \mid \deg(v) \leq 2\}$ i $W = \{w \in V \mid w(1) = w(2) = 0\}$. Wykazać, że $W = \text{span}(x^2 - 3x + 2)$

Zadanie 4. W przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji rzeczywistych na $\mathbb{R}$ zbadać liniową niezależność układu funkcji:

- a) $1, \sin x, \cos x$.
- b) $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx$.

Zadanie 5. Sprawdź liniową niezależność następujących wektorów w przestrzeni liniowej wielomianów. Jeśli są liniowo zależne to zredukuj system do liniowo niezależnego.

$$\begin{aligned} v_1 &= x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \\ v_2 &= x^3 + 3x^2 + 4x + 5, \\ v_3 &= x^2 + 2x^2 + 3x + 3, \\ v_4 &= x^3 + 2x^2 + 3x. \end{aligned}$$