

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria XII

21 XII 2012 r.

Zadanie 1. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ wektory $(1, 1, 1)$, $(1, \alpha, 2)$, $(2, 3, 4)$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

Zadanie 2. Znaleźć bazy przestrzeni rozwiązań następujących układów równań liniowych w $\mathbb{R}^n$:

$$\text{a) } \begin{cases} 9x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 3. Dla ustalonego $n \in \mathbb{Z}_+$ dany jest ciąg liczb $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Niech dla $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$v_j = \begin{bmatrix} a_1 a_j - 1 \\ a_2 a_j - 1 \\ \vdots \\ a_n a_j - 1 \end{bmatrix}.$$

Zbadać liniową niezależność układu wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. W zależności od n i wybranego ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, przedyskutować maksymalną liczbę wektorów liniowo niezależnych tego układu wektorów. Kiedy układ tych wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$?

Zadanie 4. Podać bazę przestrzeni wektorowej

$$V := \{v \in \mathbb{R}[\mathbb{N}] : v(1) = v(-1) \wedge \deg v \leq 3\} \cup \{0\}.$$

Zadanie 5. Pokaż że elementy $(1, 1)$, $(1, -1) \in \mathbb{Z}^2$ są liniowo niezależne, ale nie tworzą bazy. Pokaż że te same elementy rozważane w $\mathbb{Q}^2$ tworzą bazę.

Zadanie 6. Niech R będzie pierścieniem i $V = \bigoplus_{\mathbb{N}} R$ wolnym prawym R -modulem. Oznaczmy przez $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bazę kanoniczną V . Znajdź w tej bazie a) macierz odwzorowania liniowego A zadanego przez $\forall k \in \mathbb{N} : A(e_k) = e_{k+1}$, b) macierz odwzorowania liniowego B zadanego przez $B(e_0) = 0$ i $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 0} B(e_k) = e_{k-1}$. Wymnóż macierze A i B tak żeby otrzymać w tej samej bazie macierz odwzorowania liniowego $A \circ B$.